Nagy István

VILLAMOSMÉRNÖKI ALAPISMERETEK

SAJÁT JEGYZETEK...

Nagy István 2004
buenos@freemail.hu

Tartalomjegyzék

El szó.....5
1. Középiskolai matek-fizika.....7
2. Matematika.....12
3. Valószín ségszámítás.....37
4. Számítástudomány alapjai.....44
5. Fizika.....50
6. Programozás.....77
7. Digitális technika.....80
8. Informatika.....93
9. Hálózatok és rendszerek.....115
10. Elektromágneses terek.....146
11. Szabályozástechnika.....159
12. Híradástechnika.....176
13. Méréstechnika.....197
14. Elektronika.....214
15. Villamos energetika.....251
16. Elektronikai technológia.....259
17. Labor.....262
18. A kiegészítés:
- 18.1 Zavarvédelem.....269
- 18.2 Speciális alkatrészek.....270
- 18.3 Érzékel k, és jelkondicionálásuk.....271
- 18.4 Áramköri illesztések.....272
- 18.5 Nagyfrekvenciás technika.....274
- 18.6 Jel és információtovábbítás
  - 19.6.1 Vezetékek, vezetékes adatátvitel.....280
  - 19.6.2 Rádiótechnika, rádióátvitel.....282
  - 19.6.3 Infravörös technika, infravörös átvitel.....283
- 18.7 Audiotechnika.....284
- 18.8 Videotechnika.....286
- 18.9 A m szaki rajz alapjai.....287

El szó

Ez a jegyzet a saját m egyetemi órai jegyzeteim kidolgozásait tartalmazza kis kiegészítéssel. Olyan dolgokkal, amiket az egyetemen nem tanultam, de amikr l úgy véltem, hogy szükség lehet rájuk a szakirányos tanulmányaimhoz, illetve a kés bbi munkához.

Ami itt le van írva azt érdemes tudni annak, aki elektronikus berendezéseket akar tervezni. Persze ezen kívül még sok mást is, mert ezek csak alapismeretek. Nagyrészt.

A könyv használható tanulásra, ismeretek felfrissítésére, és kézikönyvként. Tanulásra, hiszen a vizsgákra ezekb l a kidolgozásokból készültem fel. (mindb l átmentem) Kézikönyvként is, mivel nem lehet mindent fejben tartani, és utánanézni a dolgoknak egy könyvben sokkal egyszer bb, és gyorsabb, mint egy egész könyvgy jteményt átböngészni mindig mindenért, ha keresünk valamit.

A szövegekben hibák valószín leg el fordulnak, ezért ha valaki ezek alapján tévútra kerül valamiben, azért felel sséget nem vállalok.

1. fejezet

Középiskolai matek-fizika

(Ez nem saját jegyzet, de idepasszol, így beszerkesztettem) ez a MINIMUM!

MATEMATIKA

ez a MINIMUM!

FONTOS TÉNYEK, TÖMÖR TÁBLÁZATOK, VILÁGOS ÖSSZEFÜGGÉSEK

SZÁMHALMAZOK. Természetes számok: $N=\{0;\ 1;\ \ldots\}$ Felírás tízes számrendszerben: $652=6\cdot10^2+5\cdot10+2$. Egész számok: $Z=\{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$. Racionális számok: $Q=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,\ q\in Z,\ q\neq0\right\}$. Bármely racionális szám felírható végtelen szakaszos tizedestört alakban. A véges tizedestörteket tekinthetjük 0 periódusú végtelen szakaszos tizedestörteknek. Bármely végtelen szakaszos tizedestört felírható két egész szám hányadosaként. Pl. $x=0{,}\dot{2}\dot{3}$ $100x=23{,}\dot{2}\dot{3}$ $100x-x=99x=23$ $x=\frac{23}{99}$. Irracionális számok: nem szakaszos végtelen tizedestörtek. Pl. 0,10110111… Valós számok: a racionális és irracionális számok halmazának egyesítése. A valós számokat számegyenesen szemléltethetjük. Minden valós számnak megfelel egy pont a számegyenesen és a számegyenes minden pontjának megfelel egy valós szám.
SZÁMHALMAZOK KAPCSOLATA $N\subset Z\subset Q\subset R$.
A MŰVELETEK ELVÉGEZHETŐSÉGE

	N	Z	Q	R
összeadás	mindig elvégezhető			
kivonás	nem mindig végezhető el	mindig elvégezhető		
szorzás	mindig elvégezhető			
osztás	nem mindig végezhető el		0-val való osztás kivételével mindig elvégezhető	

MŰVELETI TULAJDONSÁGOK. Minden számhalmazban teljesül: $a+b=b+a$; $ab=ba$ (kommutativitás); $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$ (asszociativitás); $a(b+c)=ab+ac$ (disztributivitás). Ha $a<b$, akkor $a+c<b+c$; ha $a<b$ és $c>0$, akkor $ac<bc$; Ha $a<b$ és $c<0$, akkor $ac>bc$ (monotonitás); az utolsó tulajdonság csak Z, Q, R halmazokban teljesül.

ABSZOLÚTÉRTÉK. $|x|=\begin{cases}x, & \text{ha } x\geqq0\\ -x, & \text{ha } x<0\end{cases}$ Abszolútérték-jel „felbontása": $|x+2|=\begin{cases}x+2, & \text{ha } x+2\geqq0, \text{ azaz } x\geqq-2\\ -(x+2)=-x-2, & \text{ha } x+2<0, \text{ azaz } x<-2\end{cases}$

OSZTHATÓSÁG A TERMÉSZETES SZÁMOK KÖRÉBEN. Egy *a* természetes számot a *b* természetes szám osztójának nevezzük, ha létezik olyan *c* természetes szám, amelyre teljesül $b=ac$. Főbb OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK: egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha páros; egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó számjegye 0 vagy 5; egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható néggyel; egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 3-mal illetve 9-cel, ha számjegyeik összege osztható 3-mal illetve 9-cel. *Prímszámok:* pontosan két osztójuk van. Végtelen sok prímszám van. Pl. 2, 3, 5… Bármely két természetes szám egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára: $72=2^3 3^2$; $42=2\cdot3\cdot7$. **Legkisebb közös többszörös:** $[72;\ 42]=2^3\cdot3^2\cdot7$. Alkalmazás: törtek közös nevezőre hozásánál. **Legnagyobb közös osztó:** $(72;\ 42)=2\cdot3$. Alkalmazás: pl. törtek egyszerűsítésénél.
SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS. A gyakorlatban gyakran használjuk számok századrészeit, melyet százaléknak is nevezünk. 650-nek 73%-a $(650/100)\cdot73$, 53 a 105-nek 53/105 századrésze. Ha egy szám 39%-a 150, akkor a szám $(150/39)\cdot100$.

HATVÁNY. Az *a* valós szám *n*-edik hatványa olyan *n* tényezős szorzat, melynek minden tényezője a, $n\geqq2$; $a^1=a$. Pl. $2^3=2\cdot2\cdot2=8$; elnevezések: 2: hatványalap, 3: hatványkitevő, 8: hatványérték. *A hatványozás tulajdonságai:*
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $a^m:a^n=a^{m-n}$, ha $m>n$ $a\neq0$; $(a^m)^n=a^{mn}$;
$(ab)^m=a^m\cdot b^m$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, $b\neq0$
HATVÁNYKITEVŐ értelmezése kiterjesztésének egyik alapelve a fenti tulajdonságok (azonosságok) érvényben maradása. Ha $a\neq0$, $1=\frac{a^5}{a^5}=a^{5-5}=a^0$. Definíció: $a^0=1$.
$\frac{a^2}{a^5}=\frac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{1}{a^3}=a^{2-5}=a^{-3}$ Definíció: Ha $a\neq0$ és n természetes szám: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

GYÖK. Fogalma: Ha $a\geqq0$ és $n>1$ páros szám, akkor *n*-edik gyök *a*-n értjük azt a nem negatív számot, amelynek *n*-edik hatványa *a*. Ha *a* tetszőleges valós szám és $n>1$ páratlan szám, akkor *n*-edik gyök *a*-n értjük azt a számot, amelynek *n*-edik hatványa *a*. Pl. $\sqrt[3]{-8}=-2$, mert $(-2)^3=-8$; $\sqrt[4]{16}=2$, mert $2^4=16$.
NÉGYZETGYÖK *a*-nak nevezzük azt a nem negatív számot, amelynek négyzete *a* ($a\geqq0$). $\sqrt{25}=5$, mert $5^2=25$.
Az n-edik gyökökre vonatkozó azonosságok. Ha $a\geqq0$ és $b>0$, akkor: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.
TÖRTKITEVŐJŰ HATVÁNY ÉRTELMEZÉSE. $a>0$ és m, $n\in N$, $n\geqq2$ $a^{\frac{m}{n}}>0$ azt a számot jelenti, melyre teljesül $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$.

LOGARITMUS. Egy pozitív *x* valós szám *a* alapú logaritmusának nevezzük azt a kitevőt, amelyre *a*-t emelve *x*-et kapunk ($a>0$ és $a\neq1$): $a^{\log_a x}=x$; $\log_3 81=4$, mert $3^4=81$. A tízes alapú logaritmus jelölése: lg. $\lg 0{,}001=-3$. A definíció következménye: $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$. *A logaritmus tulajdonságai:* Ha $m>0$, $n>0$, $a>0$ és $a\neq1$, akkor: $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$; $\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$; Ha $x>0$, akkor $\log_a x^n=n\log_a x$. Áttérés más alapú logaritmusra: Ha $x>0$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, akkor $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$. Hatvány, gyök, logaritmus kapcsolata:

$$2^5=32 \quad\rightleftarrows\quad \sqrt[5]{32}=2$$
$$\rightleftarrows\quad \log_2 32=5 \quad\rightleftarrows$$

ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK. Számok, változók, a négy alapművelet és racionális kitevőjű hatványok szerepelhetnek bennük. $3a-2b$; $\sqrt{a+b}$; $\frac{2a^2+5b^3}{a-b}$; Nem algebrai kifejezés pl. $\log_3(x^2-4x)$, $\sin x$. **Egész kifejezés:** változó nem szerepel nevezőben illetve gyökjel alatt. A számlálóban szerepelhet változó. $\frac{2x-7}{3}$. **Tört kifejezés:** a nevezőben is szerepel változó. $\frac{2x^2}{1-x}$.
Algebrai kifejezés értelmezési tartománya: a változók összes értékei, melyekre van értelme az algebrai kifejezésnek. Az a változó *n*-edfokú polinomjának nevezzük az $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ alakú kifejezést, ahol $n\in N^+$ és a_i-k valós számok ($a\neq0$). Azonosság olyan egyenlőség, amely a benne szereplő változók minden lehetséges értékére fennáll.
Nevezetes azonosságok: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

FÜGGVÉNY. Adott két halmaz, *H* és *K*. Ha a *H* halmaz minden egyes eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a *K* halmaz egy-egy elemét, e hozzárendelést függvénynek nevezzük. Jelölés: $f: H\to K$, $x\mapsto f(x)$. A *H* halmazt a függvény értelmezési tartományának nevezzük, jele *D*. A függvényértékek összességét a függvény értékkészletének nevezzük, jele *R*.
FÜGGVÉNY GRAFIKONJA: az x;y derékszögű koordinátarendszerben az egyes *x* értékekhez a hozzátartozó függvényértékeket mérjük fel. A kapott pontok alkotják a függvény grafikonját. A függvénygörbe pontjai kielégítik az $y=f(x)$ egyenletet, ezt az egyenletet a függvénygörbe egyenletének nevezzük.
Néhány egyszerűbb függvény:
Elsőfokú függvény: $f: R\to R$, $x\mapsto ax+b$, ahol a, $b\in R$ és $a\neq0$. Minden elsőfokú függvény grafikonja egyenes. Az *a* értéket az egyenes meredekségének nevezzük.
Másodfokú függvény: $f: R\to R$, $x\mapsto ax^2+bx+c$, ahol a, b, $c\in R$ és $a\neq0$. Minden másodfokú függvény grafikonja parabola.
Abszolútérték függvény: $f: R\to R_0^+$, $x\mapsto|x|$, ahol R_0^+ a nem negatív valós számok halmaza.
Törtfüggvény: $f: R\setminus\{0\}\to R\setminus\{0\}$, $x\mapsto\frac{1}{x}$; a törtfüggvény grafikonja hiperbola.
Négyzetgyökfüggvény: $f: R_0^+\to R_0^+$, $x\mapsto\sqrt{x}$.
Hatványfüggvény: $f: R\to R$, $x\mapsto x^n$ ($n\in N^+$).
Exponenciális függvény: $f: R\to R^+$, $x\mapsto a^x$, ahol $a>0$; $a>1$ esetén a függvény szigorúan monoton nő, $0<a<1$ esetén a függvény szigorúan monoton fogy, $a=1$ esetén a grafikon az $y=1$ egyenes.
Logaritmusfüggvény: $f: R^+\to R$, $x\mapsto\log_a x$, ahol $a>0$ és $a\neq1$. $a>1$ esetén a függvény szigorúan monoton nő, $0<a<1$ esetén a függvény szigorúan monoton fogy.

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK ÉS VIZSGÁLATUK

A függvénytulajdonság meghatározása	*Geometriai (szemléletes) nyelven való megfogalmazás*
Értelmezési tartomány: azon *x*-értékek halmaza, melyekre értelmezve van az $x\mapsto f(x)$ függvény	A függvénygörbe *x* tengelyre való merőleges vetülete
Értékkészlet: a függvényértékek összessége.	a függvénygörbe *y* tengelyre való merőleges vetülete
Szélsőértékhelyek, értékek: az értelmezési tartomány elemei, melyeken a függvény az adott pont környezetében a legnagyobb (lokális maximum) ill. a legkisebb (lokális minimum) értéket veszi fel. A teljes értelmezési tartományon felvett legnagyobb (legkisebb) függvényértékek: globális [abszolút] maximum, (globális [abszolút] minimum).	*Lokális:* a grafikon egy adott szakaszán a legmagasabban (legmélyebben) elhelyezkedő pont első koordinátája: maximum (minimum) hely; második koordinátája: maximum (minimum) értéke. *Globális:* a teljes függvénygörbe legmagasabban (legmélyebben) elhelyezkedő pontja: maximum (minimum).
Páros függvény: az értelmezési tartomány minden *x* elemére teljesül: $f(-x)=f(x)$.	A grafikon szimmetrikus az *y* tengelyre
Páratlan függvény: az értelmezési tartomány minden *x* elemére teljesül: $f(-x)=-f(x)$.	A grafikon szimmetrikus az origóra
Periodikus függvény: létezik olyan $T\neq0$ valós szám úgy, hogy az értelmezési tartomány minden *x* elemére teljesül: $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.	A grafikon *x* tengely menti T nagyságú eltolása esetén önmagába megy át
Egy függvény **szigorúan monoton nő** egy intervallumon, ha az intervallum tetszőleges x_1, x_2 elemére fennáll: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.	A függvény grafikonja emelkedő az illető intervallumon.
Egy függvény **szigorúan monoton fogy** egy intervallumon, ha az intervallum tetszőleges x_1, x_2 elemére fennáll: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.	A függvény grafikonja süllyedő az illető intervallumon.
Zérushelyek: az értelmezési tartomány azon *x* elemei, amelyekre teljesül: $f(x)=0$.	A függvénygörbe és az *x* tengely metszéspontjai

EGYENLETEK. Az $f(x)=g(x)$ változót tartalmazó egyenlőséget egyismeretlenes egyenletnek nevezzük. A változó mindazon értékeit, amelyekre fennáll az egyenlőség, az egyenlet gyökeinek nevezzük. A gyökök összessége az egyenlet megoldáshalmaza. Az egyenletek megoldásait meghatározott halmazokon keressük: a $3x+5=7$ egyenletnek az egész számok halmazán nincs megoldása, a racionális számok halmazán $x=\frac{2}{3}$ a gyök. Két egyenletet ekvivalensnek nevezünk, ha az alaphalmazuk közös és gyökeik rendre megegyeznek. Az olyan átalakításokat, amelyek egy egyenletet vele ekvivalens egyenletbe visznek át, ekvivalens átalakításoknak nevezzük; az egyenlet mindkét oldalához hozzáadva ugyanazt a számot, levonva ugyanazt a számot, mindkét oldalt szorozva ugyanazzal a 0-tól különböző számmal, mindkét oldalt osztva ugyanazzal a nem nulla számmal, ekvivalens egyenletet kapunk.
NEM EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK
1. Ha az $f(x)=g(x)$ egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk a $h(x)$ kifejezéssel, ahol a $h(x)$ minden *x*-re értelmezve van, az $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ gyökei lesznek az eredeti egyenlet gyökei, de ezenkívül a $h(x)=0$ egyenlet gyökei is. Ez utóbbiak „új" gyökök lehetnek az eredeti egyenlet szempontjából, helyességüket az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizni kell. $x-1=2$ gyök: $x=3$
$(x-1)(x+2)=2(x+2)$ gyökök: $x_1=3$ $x_2=-2$
2. $f(x)=g(x)$ és $f(x)^2=g(x)^2$ kapcsolata. Az utóbbi egyenletnek nyilvánvalóan gyökei lesznek az eredeti egyenlet gyökei, de ezenkívül az $f(x)=-g(x)$ gyökei is. $\sqrt{x+2}=x$ gyöke $x=2$; $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$ gyökei $x_1=2$ és $x_2=-1$.
$\frac{f(x)}{g(x)}=0$ **típusú egyenletek.** Egy tört akkor és csak akkor 0, ha számlálója 0 és a nevezője nem nulla. Az ilyen típusú egyenlet megoldása két lépésből áll: 1. Megoldjuk az $f(x)=0$ egyenletet. 2. Minden kapott gyökre ellenőrizni kell, hogy g(x) helyettesítési értéke nem nulla-e. Ha nulla, az illető gyök nem megoldása az eredeti egyenletnek, ha nem nulla, akkor megoldás.
Egyenlet értelmezési tartománya: a változó mindazon értékei, melyekre f(x) és g(x) is értelmezve van. $\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x+2}$ Ét.: $R\setminus\{-2;3\}$
Gyökvesztés: Ha egy egyenlet mindkét oldalát egy változót tartalmazó kifejezéssel osztjuk – *h(x)* –, a $h(x)=0$ egyenlet gyökei „elvesznek". $x^2=x$ gyökei $x_1=0$ és $x_2=1$, x-szel osztva $x=1$ egyenletet kapjuk, az $x=0$ gyök „elveszett".
NÉHÁNY EGYENLETTÍPUS.
Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet. $ax+b=0$; a, $b\in R$ és $a\neq0$
Megoldás: $x=\frac{-b}{a}$
Másodfokú egyenlet. $ax^2+bx+c=0$ ahol a, b, $c\in R$ és $a\neq0$
Megoldás: $x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ A $D=b^2-4ac$ kifejezést diszkriminánsnak nevezzük. Ha $D>0$, az egyenletnek két valós gyöke van. Ha $D=0$, egy gyök van, $D<0$ esetén az egyenletnek nincs valós megoldása.
Négyzetgyökös egyenletek. Cél a négyzetgyökök eltávolítása, ezt a két oldal négyzetreemelésével érhetjük el. Így új gyökök keletkezhetnek.
Exponenciális egyenlet. $a^{f(x)}=a^{g(x)}$; $a>0$, $a\neq1$ egyenlet ekvivalens az $f(x)=g(x)$ egyenlettel.
Logaritmikus egyenlet. A legegyszerűbb típusú logaritmikus egyenlet: $\log_a f(x)=\log_a g(x)$; $a>0$ és $a\neq1$. Megoldás: Megoldjuk az $f(x)=g(x)$ egyenletet. A kapott gyökök közül az lesz az eredeti egyenletnek is megoldása, amelyik kielégíti az $f(x)>0$ és $g(x)>0$ egyenlőtlenségeket: $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$. Az $x^2-3x-5=7-2x$ egyenlet megoldásai -3 és 4. Ezek közül csak -3 elégíti ki az $x^2-3x-5>0$ és $7-2x>0$ egyenlőtlenségeket, tehát az eredeti egyenlet gyöke -3.
Egyenletek grafikus megoldása. Az $f(x)=g(x)$ egyenlet grafikus megoldása során közös koordinátarendszerben ábrázoljuk az f(x) és g(x) függvényeket, a két függvénygörbe közös pontjainak abszcisszái lesznek az egyenlet megoldásai.

EGYENLETRENDSZEREK. Ha két kétismeretlenes egyenlethez – $f(x,\ y)$ és $g(x,\ y)$ – keressük a közös megoldást, kétismeretlenes egyenletrendszerről beszélünk. Analóg módon beszélhetünk többismeretlenes egyenletrendszerről is.
MEGOLDÁSI MÓDOK. **Grafikus eljárás:** Kétismeretlenes egyenletrendszer esetén közös koordinátarendszerben ábrázoljuk a két függvényt. A grafikonok metszéspontjának (metszéspontjainak) koordinátái lesznek az egyenletrendszer megoldásai.
Behelyettesítő módszer. Az egyik egyenletből kifejezzük valamelyik ismeretlent, a kapott kifejezést a másik egyenletbe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit már meg tudunk oldani.
Egyenlő együtthatók módszere. Ha a két egyenletben valamelyik ismeretlen együtthatója megegyezik (vagy egymás ellentettjei), a két egyenletből kivonással (összeadással) elérhető egy egyismeretlenes egyenlet.
Pl. $x^2+y^2+x+y=2$ és $2x^2-y^2+2x-y=4$
Több egyenlet, több ismeretlen esetén az utóbbi két módszer valamelyikének alkalmazásával igyekszünk kétismeretlenes egyenletrendszert kapni.

EGYENLŐTLENSÉGEK. Az $f(x)<g(x)$ egyenlőtlenség megoldásán értjük a változó mindazon szóbajöhető értékét, amely az egyenlőtlenséget igaz kijelentéssé teszi. Egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy az összes szóbajöhető megoldást megkeressük, vagy bebizonyítjuk, hogy nincs megoldás.
Egyismeretlenes egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Az egyenlőtlenség két oldalán szereplő *f(x)* ill. *g(x)* függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk és a függvények monotonitási tulajdonságainak segítségével leolvassuk a megoldást.
Exponenciális egyenlőtlenségek. $a^{x-3}<a^{2x+5}$ I. $a>1$ esetén az a^x függvény szigorúan monoton nő, az egyenlőtlenség ekvivalens az $x-3<2x+5$ egyenlőtlenséggel. Megoldás: $x>-8$. II. $0<a<1$ esetén az a^x függvény szigorúan monoton fogy, az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens az $x-3>2x+5$ egyenlőtlenséggel; tehát $x<-8$. III. $a=1$ esetén az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, hiszen mindkét oldal értéke minden x-re 1.
Logaritmikus egyenlőtlenségek. $\log_a f(x)<\log_a g(x)$. Az előbbiekhez hasonlóan $a>1$ és $0<a<1$ eseteket kell megkülönböztetni és a függvény monotonitási tulajdonságát kell felhasználni.
Négyzetgyökös egyenlőtlenségek. $\sqrt{f(x)}<g(x)$ megoldásánál az $f(x)\geqq0$ $g(x)\geqq0$ és $f(x)<[g(x)]^2$ egyenlőtlenségek közös megoldásait kell keresni. $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$. Megoldás: $x^2-3x+2\geqq0$; $x+3\geqq0$; $x^2-3x+2>(x+3)^2$ egyenlőtlenségek közös megoldása. Ezenkívül $x^2-3x+2\geqq0$ és $x+3<0$ egyenlőtlenségek közös megoldása is megfelelő, hiszen ez esetben a baloldalon nem negatív, a jobb oldalon negatív szám szerepel.
NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉGEK. Két pozitív szám számtani, mértani és harmonikus közepe közötti összefüggés: $H(a;b)\leqq G(a;b)\leqq A(a;b)$
Harmonikus közép: a, $b>0$, $H(a;b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ *Számtani közép:* a, $b\in R$, $A(a;b)=\frac{a+b}{2}$ *Mértani közép:* a, $b\geqq0$, $G(a;b)=\sqrt{a\cdot b}$

SZÁMSOROZATOK. A természetes számok halmazán – O-t kivéve – értelmezett számfüggvényeket számsorozatoknak nevezzük. Elnevezésük, jelölésük: a_1: sorozat első tagja; a_n: a sorozat n-edik tagja; S_n: a sorozat első n tagjának összege. **Sorozatok megadása:** 1. *Képlettel* $a_n=\frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; … 2. *Rekurzióval.* $a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ($n>2$). 3. *Verbális utasítással:* A sorozat első tagja Π egy tizedesjegyre megadott közelítő értéke, második tagja Π két tizedesjegyre megadott közelítő értéke,…

Számtani sorozat: 2;5;8 … $a_n = a_{n-1} + d$, ahol d a sorozatra jellemző állandó, tetszőleges két szomszédos tag különbsége. $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, (a_1 és d adott) $n \to a_n$ elsőfokú függvény.
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Mértani sorozat: Pl. 2;6;18 … $a_n = a_{n-1} \cdot q$, ahol q a sorozatra jellemző állandó. $a_n = a_1\, q^{n-1}$ (a_1 és q adott), $n \to a_n$ exponenciális függvény $S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$ $q \neq 1$, q = 1 esetén minden elem a_1.
$S_n = n a_1$

Kamatos kamatszámítás: $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ K_0: kezdőtőke, n év, p %-os kamat. K_n: összeg n év múlva.

KOMBINATORIKAI ALAPISMERETEK. Permutáció. *n* különböző elem egy lehetséges sorrendjét az *n* elem egy permutációjának nevezzük. Az *n* különböző elem összes lehetséges permutációinak a száma $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$
Ismétléses permutáció. Az *n* elem között *k* megegyező van. $P_{n,i}^{k} = \frac{n!}{k!}$
Variáció. *n* különböző elem közül *k* elemet választunk ki, a sorrend számít és egy elemet csak egyszer választhatunk ki: $(n > k)$ $V_n^k = n(n-1) \ldots (n-k+1)$
Ismétléses variáció. *n* elem közül *k* elemet választunk ki, egy elemet többször is kiválaszthatunk, sorrend számít. (Totó: 1, x, 2 közül kell 13+1 elemet kiválasztani) $V_{n,i}^k = n^k$
Kombináció. *n* különböző elem közül *k* elemet kell kiválasztani, egy elemet csak egyszer, sorrend nem számít. (Lottó: 90 szám közül kell ötöt kiválasztani) $C_n^k = \frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$

GEOMETRIA

ALAPFOGALMAK: pont, egyenes, sík
Definiált fogalmak: pl. szög: Egy pontból kiinduló két félegyenes a rájuk illeszkedő síkot két részre bontja. Ezen részeket szögeknek nevezzük. Szögmérés: A kör kerületének $\frac{1}{360}$-ad részéhez tartozó középponti szög mértéke 1°. Szög ívmértéke egyenlő a szöghöz tartozó körív és körsugár hányadosával. i = r esetén a középponti szög mértéke 1 radián.
Szögfajták. $0 < \alpha < 90°$: hegyesszög, $\alpha = 90°$: derékszög, $90° < \alpha < 180°$: tompaszög, $\alpha = 180°$: egyenesszög, $180° < \alpha < 360°$: homorúszög, $\alpha = 360°$: teljesszög.
Két egyenes kölcsönös helyzete. *Metszők*: van közös pontjuk és közös síkjuk, *párhuzamosak*: van közös síkjuk, nincs közös pontjuk, *kitérők*: nincs közös pontjuk és nincs közös síkjuk.
Egyenes és sík kölcsönös helyzete. *Párhuzamosak*: nincs közös pontjuk, egyenes *illeszkedik* a síkra, egyenes *metszi* a síkot egy pontban.
Távolságok. Pont és egyenes (sík) távolságán értjük a pontnak az egyenesre (síkra) vonatkozó merőleges vetületétől való távolságát.
Térelemek szöge. *Metsző egyenesek* szögén a két egyenes által alkotott szögek közül a 90°-nál nem nagyobb szögét értjük. *Két kitérő egyenes szögét* megkapjuk, ha az egyik egyenes tetszőleges pontján a másik egyenessel párhuzamos egyenest húzunk, e két egyenes szöge lesz a keresett szög. *Egyenes és sík szöge* megegyezik az egyenes síkra vonatkozó merőleges vetületének az egyenessel bezárt szögével. *Két sík hajlásszöge*: metszésvonal tetszőleges pontjában merőlegeseket emelünk mindkét síkban. E két félegyenes szöge lesz a két sík szöge. **Szögpárok.** *Egyállású szögek*: száraik párhuzamosak és azonos irányúak. *Váltószögek*: száraik párhuzamosak és ellentétes irányúak. *Mellékszögek*: egyik száruk közös, másik száruk egymás kiegészítő félegyenesei. *Csúcsszögek*: száraik rendre egymás kiegészítő félegyenesei. *Merőleges szárú szögek*: száraik rendre merőlegesek egymásra. *Tételek*: Egyállású szögek egyenlők. Váltószögek egyenlők. Csúcsszögek egyenlők. Mellékszögek összege 180°. Merőleges szárú szögek egyenlők (hegyesszögek esetén); összegük 180° (egyik tompaszög).
Nevezetes ponthalmazok. Kör: egy ponttól adott távolságra levő pontok halmaza a síkban. *Szakaszfelező merőleges*: a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban. (Térben: szakaszfelező merőleges sík) *Szögfelező*: a szög száraitól egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok halmaza a szögtartományban.
HÁROMSZÖGEK GEOMETRIÁJA. Osztályozás: *a) oldalak szerint*: egyenlőoldalú, egyenlőszárú, különböző oldalú. *b) szögek szerint*: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű.
Összefüggések háromszög oldalai, szögei között: Minden háromszögben bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik és viszont. A háromszög belső szögeinek összege 180°. Bármely külső szög egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.
Nevezetes vonalak. A háromszög *oldalfelező merőlegesei* A háromszög *oldalfelező merőlegesei* egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra helyezkedik el. (A háromszög köré írható kör középpontja). A háromszög *szögfelezői* egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög oldalegyeneseitől egyenlő távolságra helyezkedik el, (a háromszögbe írható kör középpontja). A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt *súlyvonalnak* nevezzük. A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást (súlypont). A háromszög súlyvonalai a csúcstól számítva 2:1 arányban osztják egymást. A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt *középvonalnak* nevezzük. A háromszög középvonala a harmadik oldallal párhuzamos és feleakkora hosszúságú. *Magasságvonal*: a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást (magasságpont).
Néhány nevezetes alakzat. *Ellipszis*: olyan pontok halmaza a síkon, amelyekre igaz, hogy két adott ponttól vett távolságaik összege állandó, (a két pont távolságánál nagyobb).
Hiperbola: olyan pontok halmaza a síkban, amelyekre igaz, hogy két ponttól vett távolságaik különbségének abszolútértéke állandó, (a két pont távolságánál kisebb).
Parabola: olyan pontok halmaza a síkon, amelyek egy ponttól és egy egyenestől való távolsága megegyezik.
Az olyan alakzatot, amely bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza, *konvex alakzatnak* nevezzük.

KONVEX NÉGYSZÖGEK OSZTÁLYOZÁSA

Konvex négyszög
Belső szögek összege 360°

Trapéz
Van párhuzamos oldalpárjuk
Egy száron fekvő szögek összege 180°

Deltoid
Két-két szomszédos oldal megegyezik. Átlók merőlegesek egymásra

Paralelogramma
Két-két szemközti oldal párhuzamos
Szemközti oldalak egyenlők.
Szemközti szögei egyenlők, átlók felezik egymást.

Téglalap
Minden szöge derékszög
Átlói egyenlők

Rombusz
oldalai egyenlők

Négyzet
oldalai és szögei egyenlők

A geometriai transzformációk a sík (tér) önmagára való leképezései.

A SÍK EGYBEVÁGÓSÁGI (TÁVOLSÁGTARTÓ) TRANSZFORMÁCIÓI

Egyenesre való tükrözés	*Elforgatás*	*Eltolás*
t: a tükrözés tengelye P pont képe P' PP' szakaszt a tengely merőlegesen felezi Tengelyre illeszkedő pont képe önmaga.	O: forgatás centruma α: forgatás szöge P' rajta van O középpontú OP sugarú körön. POP' = α, O képe önmaga, α = 180°: középpontos tükrözés.	*v*: eltolás vektora a sík tetszőleges Q_1 pontjaira: QQ' = PP' = *v*

EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK TULAJDONSÁGAI

Transzf. / *Tulajd.*	*egyenesre von. tükrözés*	*elforgatás*	*eltolás*
távolságtartás	mindháromra teljesül		
szögtartás	mindháromra teljesül		
körüljárás	megváltoztatja	megtartja	
fixelemek	tengely (minden pontja) tengelyre merőleges egyenesek	középpont középpontos tükrözésnél: középponton átmenő egyenesek	Az eltolás irányával párhuzamos egyenesek.

Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi át. Tengelyesen (középpontosan) szimmetrikus alakzatok: van olyan egyenesre (pontra) vonatkozó tükrözés, mely az alakzatot önmagába viszi át.
Középpontos hasonlóság O: középpont. λ: középpontos hasonlóság aránya. P pont képe P', λ > O esetén P' az OP félegyenesen van és OP'/OP = λ, λ < O esetén P' az OP kiegészítő félegyenesen van és |OP'|/|OP| = |λ|
Hasonlósági transzformáció: egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymásutáni alkalmazásával nyert transzformáció. Hasonlósági transzformációk tulajdonságai: aránytartás (a képszakasz és az eredeti szakasz hosszának aránya állandó.) Szögtartás, párhuzamosságtartás. *Középpontos hasonlóság fixelemei*: középpont, középponton átmenő egyenesek. Két alakzatot *hasonlónak* nevezünk, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikra képezi le.

HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ÉS HASONLÓSÁGÁNAK ALAPESETEI.

Jelölés: o: oldal sz: szög	*Háromszögek egybevágósági tételei*	*Háromszögek hasonlósági tételei*
O-SZ-O	Két háromszög egybevágó, ha két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és az ezek által bezárt szögek egyenlők	Két háromszög hasonló, ha két-két oldalhosszuk aránya és az ezek által közrefogott szögek egyenlők
o-o-o	Két háromszög egybevágó, ha oldalaik hossza páronként egyenlő	Két háromszög hasonló, ha megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő
sz-o-sz	Két háromszög egybevágó, ha egy oldaluk hossza és két-két szögük páronként egyenlő.	Két háromszög hasonló, ha két-két szögük páronként egyenlő.
O-SZ-O	Két háromszög egybevágó, ha két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és a két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögek egyenlők.	Két háromszög hasonló, ha két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és a két oldal közül a hosszabbikkal szemközt levő szögek egyenlők.

Párhuzamos szelők tétele. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya egyenlő a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.
Derékszögű háromszögekre vonatkozó néhány összefüggés.
Pitagorasz tétele: egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két rövidebb oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.
Mértani közepek a derékszögű háromszögekben. Befogótétel: bármely derékszögű háromszögben a befogó mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének. $a = \sqrt{pc}$, $b = \sqrt{qc}$. *Magasságtétel*: bármely derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó két darabjának.
A kör geometriája. A körvonal két pontját összekötő egyenesszakaszt *húrnak* nevezzük. *Átmérő*: középponton átmenő húr. A körvonal két pontjára illeszkedő egyenest *szelőnek* nevezzük. A kör bármely szelője a kört *két körszeletre* bontja. *Körcikk*: a körlemez két sugár által határolt része. Azonos középpontú köröket *koncentrikus köröknek* nevezzük. *Körgyűrű*: a sík két koncentrikus kör által határolt része. *Körérintő* olyan egyenes, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel. *Kerületi szög* csúcsa egy kör kerületén helyezkedik el, szárai a kör egy-egy húrját tartalmazzák, vagy egyik szára egy húrt tartalmaz, másik szára a kör egyik érintője. *Középponti szög*: középpontja egy kör középpontja, szárai a kör egy-egy sugarát tartalmazzák.
Thalész tétele: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy kör valamely átmérője derékszögben látszik, az adott kör, kivéve az átmérő végpontjait. Alkalmazás: körhöz külső pontból érintő szerkesztése. **Húrnégyszögnek** nevezzük az olyan négyszögeket, melyeknek minden oldala egy kör egy-egy húrja. *Tétel*: Minden húrnégyszögben a két-két szemközti szög összege 180°. *Megfordítás*: Ha egy konvex négyszögben két-két szemközti szög összege 180°, akkor ez a négyszög húrnégyszög. **Érintőnégyszögnek** nevezzük az olyan négyszögeket, amelyeknek minden oldala ugyanazon kör egy-egy érintője. *Tétel*: Bármely érintőnégyszögben a szemközti oldalak összege megegyezik. *Megfordítás*: Ha egy konvex négyszögben a két-két szemközti oldal összege megegyezik, akkor e négyszög érintőnégyszög. *Tétel*: Ugyanabban a körben vagy egyenlő sugarú körökben, ugyanahhoz vagy ugyanakkora körívhez tartozó középponti szög kétszerese a kerületi szögnek.
VEKTOROK. Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük. Jelölés: $\underline{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$. Bármely vektorhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy eltolást, melyet ez a vektor határoz meg. Ez a szemléletes modell segíthet a vektorműveletek jobb megértéséhez. Vektor hosszát a vektor *abszolútértékének* nevezzük. Jelölése: $|\underline{v}|$. *Egyállású* (párhuzamos) vektorok: van olyan egyenes, mely mindkettővel párhuzamos. Két vektor *egyenlő*, ha abszolútértékük megegyezik, egyállásúak és azonos irányításúak. **Vektorműveletek.** *Összeadás*: Egyik vektor végppontjába felmérjük a másik vektort, az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektor lesz a két vektor összege. Ez az összeadási eljárás kiterjeszthető tetszőleges számú vektor összeadására. *Kivonás*: A két vektort közös kezdőpontból mérjük fel, a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő vektor végpontjába mutató vektor lesz a különbségvektor. *Vektor számmal való szorzása* $\lambda\underline{a}$ hossza $|\lambda|\,|\underline{a}|$, állása $\underline{a}$ állása, iránya $\lambda > 0$ esetén $\underline{a}$ iránya, $\lambda < 0$ esetén ellentétes $\underline{a}$ irányával.
Két vektor *skaláris szorzata*: $\underline{a}\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cdot \cos\gamma$.
Vektorműveletek tulajdonságai. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$; $\underline{a}\underline{b} = \underline{b}\underline{a}$ (kommutativitás) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$; $(\lambda\underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda(\underline{a}\underline{b})$; $\lambda(\mu\underline{a}) = (\lambda\mu) \cdot \underline{a}$ (asszociativitás) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$; $\lambda\underline{a} + \mu\underline{a} = (\lambda + \mu)\,\underline{a}$; $\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\,\underline{b}$ (disztributivitás)
Vektorok felbontása. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ a sík nem párhuzamos vektorai, akkor a sík bármely vektora egyértelműen bontható fel a két adott vektorral párhuzamos összetevőkre. $\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$
Vektor koordinátái. Felbontás, $\underline{i}$, $\underline{j}$ irányú összetevőkre. ($\underline{i}$ és $\underline{j}$ egymásra merőleges egységvektorok, $\underline{i}$ vektor +90°-os elforgatottja $\underline{j}$ vektor). *Vektor hossza*: $\underline{v}\,(v_1; v_2)$ $d = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. *Helyvektor*. Origó kezdőpontú vektor. Helyvektor koordinátái megegyeznek a végpontjának koordinátáival.
ANALITIKUS GEOMETRIA. Két pont távolsága:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $[P_1(x_1; y_1);\ P_2(x_2; y_2)]$
Felezőpont koordinátái: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
Harmadolópont koordinátái: $x = \frac{2x_1 + x_2}{3}$ $y = \frac{2y_1 + y_2}{3}$
$P(x_0; y_0)$ ponton átmenő $\underline{n}(A, B)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $Ax + By = Ax_0 + By_0$. Párhuzamos egyenesek normálvektorai párhuzamosak (egyik normálvektor számszorosa a másik normálvektor). *Merőleges* egyenesek: egyik egyenes normálvektorának 90°-os elforgatottja párhuzamos a másik egyenes normálvektorával. Két egyenes metszéspontját a két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja.
Kör. C(u;v) középpontú, r sugarú kör egyenlete:
$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$. Origó csúcspontú, y tengelyű *parabola* egyenlete: $x^2 = 2py$
Ellipszis. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a: fél nagytengely, b: fél kistengely
Hiperbola. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a: fél főtengely, b: fél melléktengely.
TRIGONOMETRIA **Szögfüggvények derékszögű háromszögben.**
sin α = szöggel szemközti befogó/átfogó; cos α = szög melletti befogó/átfogó; tg α = szöggel szemközti befogó/szög melletti befogó; ctg α = szög melletti befogó/szöggel szemközti befogó
Vektor irányszöge: a vektornak a vízszintes tengellyel bezárt szöge.
Tetszőleges szög szögfüggvényei.
sin α: α irányszögű egységvektor második koordinátája.
cos α: α irányszögű egységvektor első koordinátája.
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ahol $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k = 0, \pm 1, \pm 2$;
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ahol $\alpha \neq k\pi$.
Háromszögekre vonatkozó trigonometriai összefüggések.
$T = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ Sinustétel: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Cosinustétel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
Trigonometrikus egyenletek. Legegyszerűbb típusai: $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\mathrm{tg}\,x = c$; $\mathrm{ctg}\,x = d$. Csak $|a| \leqq 1$; $|b| \leqq 1$ esetén van megoldás. Trigonometrikus egyenletek megoldásánál a fenti alakokra igyekszünk következtetni a trigonometriai összefüggések segítségével. Néhány trigonometriai összefüggés: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ tetszőleges α-ra; $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.
KERÜLET ÉS TERÜLETSZÁMÍTÁS.
Négyzet: K = 4a; $t = a^2$, ahol *a* a négyzet oldala.
Téglalap: K = 2 (a + b); T = ab, ahol a, b a téglalap oldalai.
Paralelogramma: K = 2 (a + b); $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = ab \cdot \sin\gamma$, ahol *a*, *b* a paralelogramma oldalai, γ a paralelogramma egyik szöge.
Háromszög: K = a + b + c;
$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{a \cdot b\sin\gamma}{2}$; m_a, m_b, m_c a háromszög magasságai
Trapéz: K = a + b + c + d; $T = \frac{(a + c) \cdot m}{2} = k \cdot m$, ahol a, b, c, d a trapéz oldalai, m a trapéz magassága, k a trapéz középvonala $k = \frac{a + c}{2}$
Deltoid: K = 2 (a + b); $T = \frac{ef}{2}$, ahol a, b a deltoid oldalai, e, f a deltoid átlói.
Szabályos n-szög: $K = 2n \cdot r \cdot \sin\frac{\Pi}{n}$ $T = \frac{n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\Pi}{n}}{2}$, ahol r a szabályos n-szög köré írható kör sugara.
Kör: $K = 2r\Pi$; $T = r^2\Pi$
ívhossz: $i = \frac{2r\Pi\alpha°}{360°}$; $T_{KC} = \frac{r^2\Pi\alpha°}{360°}$
Körgyűrű: $T = R^2\Pi - r^2\Pi$
TÉRFOGAT ÉS FELSZÍNSZÁMÍTÁS.
Kocka: $A = 6a^2$; $V = a^3$, ahol *a* a kocka éle.
Téglatest: A = 2 (ab + ac + bc); V = abc, ahol a, b, c a téglatest élei.
Henger: $A = 2r^2\Pi + 2r\Pi m$; $V = r^2\Pi \cdot m$, ahol *r* az alapkör sugara, *m* a henger magassága.
Hasáb: $A = 2T + P_t$; $V = T \cdot m$, ahol T az alap területe, P_t a palást területe (oldallapok területének összege), *m* a hasáb magassága.
Kúp: $A = r^2\Pi + r\Pi a$; $V = \frac{r^2\Pi \cdot m}{3}$, ahol *r* az alapkör sugara, *a* a kúp alkotója, *m* a kúp magassága.
Gúla: $A = P_t + T$; $V = \frac{T \cdot m}{3}$; T: a gúla alapterülete, *m* a gúla magassága.
Csonkagúla: $A = T + t + P_t$; $V = \frac{m(T + t + \sqrt{Tt})}{3}$, ahol m magasság, T, t alaplapok területe.
Csonkakúp: $A = R^2\Pi + r^2\Pi + (R + r)\,\Pi \cdot a$
$V = \frac{m\Pi(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$; $R_1 r$ alapkörök sugarai, *m* magasság.
Gömb: $A = 4r^2\,\Pi$; $V = \frac{4r^3\Pi}{3}$, ahol *r* a gömb sugara.

Dr. Ambrus András

MAGYAR NYELV · MAGYAR IRODALOM · VILÁGIRODALOM · MAGYAR TÖRTÉNELEM · VILÁGTÖRTÉNELEM · MATEMATIKA · FIZIKA · BIOLÓGIA · KÉMIA · FÖLDRAJZ · ANGOL · FRANCIA · NÉMET · OROSZ · SPANYOL
Kiadja az AURA Kiadó az „Eszterlánc" Diákszövetkezet Rt. közreműködésével
Második kiadás
Felelős kiadó: Sulyok Miklós
Sorozatszerkesztő: Boldizsár Gábor, Medgyes Péter
Tipográfia: Kóbol Vera
Békéscsabai Konzervgyár Nyomdája
Felelős vezető: Krattinger József
59,- Ft

ez a MINIMUM!

FIZIKA

FONTOS TÉNYEK, TÖMÖR TÁBLÁZATOK, VILÁGOS ÖSSZEFÜGGÉSEK

ez a MINIMUM!

I. A TÖMEGPONT KINEMATIKÁJA

Az olyan testeket, amelyek mérete nem összemérhető a szóba jövő távolságokkal, tömegpontnak nevezzük. Egyenes vonalúnak nevezünk egy mozgást akkor, ha a pályagörbe egyenes. Egyenes vonalú egyenletes mozgás során bármely útszakasz és a megtételéhez szükséges időtartam hányadosa állandó, függetlenül az időtartam nagyságától. Az s/t hányadost sebességnek nevezzük: $v = s/t$. Az átlagsebesség az összes megtett útnak és a megtételéhez szükséges összes időnek a hányadosa, azaz: $v_{átl} = s_ö/t_ö$. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló a mozgás, ha az út és a megtételéhez szükséges idő között négyzetes kapcsolat van. A gyorsulást megadja a sebességváltozás és a hozzá szükséges időtartam hányadosa: $a = \Delta v/\Delta t$. A mozgás pillanatnyi sebessége, illetve a megtett útja (ha a t=0 időben v=0): $v = a \cdot t$ illetve $s = (a/2) \cdot t^2$. Az út kiszámítható a gyorsulásból és a sebességből is $s = v^2/2a$. Összefoglalva a kapott egyenlőségeket $v = at$ $s = (a/2) \cdot t^2$ $s = v^2/(2a)$ $v = \sqrt{2as}$

Nem nulla kezdősebességű egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásra vonatkozó összefüggések: $v = v_0 + a \cdot t$ $s = v_0 \cdot t + (a/2) \cdot t^2$. Ha elejtünk egy testet úgy, hogy mozgását a Föld vonzásán kívül más hatás nem befolyásolja, szabadesésről beszélünk. A szabadesés egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgás. A Földön szabadon eső test gyorsulását nehézségi gyorsulásnak nevezzük, jele: g. Értéke függ a földrajzi helytől.

A *függőleges lefelé hajítást* úgy értelmezhetjük, mint két mozgásból „összetett" mozgást, amelyben t idő alatt a test v_0 sebességgel, egyenes vonalú, egyenletes mozgással jut $v_0 \cdot t$ távolságra, és ugyanezen idő alatt szabadon esik $(g/2)t^2$ távolságra: $s = v_0 \cdot t + (g/2) \cdot t^2$ ill. $v = v_0 + g \cdot t$. Hasonlóan értelmezzük a függőleges felfelé hajítást is. A test felfelé mozog egyenletesen, miközben lefelé szabadon esik:
$s = v_0 \cdot t - (g/2) \cdot t^2$ illetve $v = v_0 - g \cdot t$. Az emelkedés ideje: a test addig mozog felfelé, amíg sebessége zérus nem lesz: $v = v_0 - g \cdot t = 0$, amiből $t = v_0/g$ így az emelkedés magassága: $s = v_0^2/(2g)$.

Vízszintes hajításnak nevezzük a vízszintes irányban v_0 kezdősebességgel elhajított test mozgását. A test mozgása itt is két mozgásból tevődik össze, egy vízszintes, egyenes vonalú egyenletes mozgásból és egy szabadesésből: $x = v_0 t$; $y = -(g/2) \cdot t^2$. Az idő kiküszöbölve kapjuk a pálya egyenletét $y = -(g/2v_0^2) \cdot x^2$.

Ha az elhajított test kezdeti sebességének iránya a vízszintessel szöget zár be, akkor *ferde hajításról* beszélünk. A mozgást összetettnek gondolva: $x = v \cdot \cos\alpha \cdot t$
$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - (g/2) \cdot t^2$
A pálya tetőpontján a függőleges sebesség zérusra csökkent, amiből az emelkedés ideje: $t = v_0 \sin\alpha / g$. Az emelkedés magassága: $h = v_0 \sin\alpha\, t - g/2 \cdot t^2$ max. értéke: $h_{max} = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$. A teljes repülési idő az emelkedési idő kétszerese. A vízszintes elmozdulás: $s = v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha/g$
A pálya egyenlete: $y = x \cdot tg\,\alpha - g \cdot x^2/(2v_0 \cos^2\alpha)$.

II. A TÖMEGPONT DINAMIKÁJA

A) AZ ERŐTÖRVÉNYEK *Newton I. törvénye: Minden test megőrzi nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg más testek hatása nem kényszeríti ezen állapot megváltoztatására.*
Newton II. törvénye: A tömegpontot a ráható erő saját irányába gyorsítja, az erő arányos a gyorsulással és a test tehetetlen tömegével. Képletben: $F = m \cdot a$.
A dinamika alapegyenlete: A tömegpontra ható erők eredője egyenlő a tömeg és a gyorsulás szorzatával. A gyorsulás az eredő erő irányába jön létre.
Newton III. törvénye: Két test kölcsönhatásakor az erők mindig párosával lépnek fel, az erők egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak.
A nehézségi gyorsulást létrehozó erőt *nehézségi erőnek* nevezzük. $F = mg$. Fonálra függesztett, vagy vízszintes felületre helyezett test függőlegesen ható súlyerőt fejt ki a felfüggesztésre, illetve az alátámasztásra. Ha a felfüggesztés, vagy alátámasztási pont a testtel együtt szabadon esik, akkor az erő nem lép fel: a test súlytalan. Az alátámasztott vagy felfüggesztett testre a másik test a felületen, illetve a felfüggesztésen keresztül ún. kényszererőt fejt ki. Ezt az erőt két összetevőre, a felületre merőleges kényszererőre *(K)* és a felülettel párhuzamos súrlódási erőre *(S)* bontjuk. A testre ható csúszási súrlódási erő iránya mindig ellentétes a test felülethez viszonyított mozgásának irányával, nagysága pedig csak a nyomóerőtől függ: $S = \mu K$, ahol μ a csúszási súrlódási együttható. Tapadási súrlódási erő addig lép fel, ameddig a test egyensúlyban van, 0 és a maximum közötti értékeket vehet fel. Képletben $S <= S_{max} = \mu_0 K$, ahol μ_0 a tapadási súrlódási együttható, K pedig a felületre merőleges nyomóerő.

B) AZ IMPULZUS (lendület, mozgásmennyiség)
Változtassuk meg egy *m* tömegű test sebességét Δt idő alatt v_1-ről v_2-re! A dinamika alaptörvényét felhasználva, az $F\Delta t = mv_2 - mv_1$ egyenlethez jutunk. Az $F\Delta t$ szorzatot erőlökésnek, az mv szorzatot impulzusnak nevezzük, jele: I (p). *A tömegpontra ható eredőerő és az erőhatás idejének szorzata egyenlő a tömegpont impulzusának megváltozásával (impulzustörvény).*

C) A KÖRMOZGÁS A pálya kör, a megtett út a körpálya íve. A sebességvektor érintő irányú, ez a kerületi sebesség. A $w = \Delta\alpha/\Delta t$ hányadost szögsebességnek nevezzük. A kerületi sebesség nagysága és a szögsebesség kapcsolata $v = rw$. Ha a szögsebesség változik, akkor a változás sebességét a szöggyorsulás adja meg: $\beta = \Delta w/\Delta t$. A pályamenti (kerületi) gyorsulás nagysága és a szöggyorsulás között az alábbi összefüggés adódik: $a_é = \Delta v/\Delta t = r \cdot \Delta w/\Delta t = r\beta$.
Egyenletes körmozgás során mind a kerületi sebesség, mind a szögsebesség állandó. A körpálya egyszeri befutásához szükséges időt keringési időnek nevezzük és T-vel jelöljük. Az egységnyi idő alatti fordulatok száma a fordulatszám, jele: n, $n = 1/T$ így: $w = 2\pi/T = 2\pi \cdot n$. Egyenletes körmozgás során a sebességvektor nagysága állandó, de iránya változik; a mozgás gyorsuló. A centripetális gyorsulás iránya a kör középpontja felé mutat, nagysága $a = v^2/r$.
Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele egy olyan F eredőerő-hatás, amely a kör középpontja felé mutat és nagysága: $F = ma_{cp} = m \cdot v^2/r$.
A körmozgásra vonatkozó dinamikai feltétel általánosítása: a testre ható erőket sugárirányú és érintőirányú összetevőkre bontjuk. A sugár, illetve érintőirányú erőösszetevőkre az $F_r = ma_{cp}$ illetve $F_é = ma_é$ összefüggéseknek kell minden pillanatban teljesülniük. Az eredő gyorsulás nagyságát a Pitagorasz-tétel segítségével határozhatjuk meg.

D) A HARMONIKUS REZGŐMOZGÁS A kitérés az idő szinuszos függvénye: $x = A \cdot \sin(w \cdot t)$, ahol A a rezgés amplitúdója, ω pedig a körfrekvencia. A sebesség ill. gyorsulás: $v = A \cdot w \cdot \cos(w \cdot t)$ ill. $a = -A \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t)$. Látszik, hogy $a = -w^2 \cdot x$, azaz a gyorsulás arányos a kitéréssel, de azzal ellentétes. A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele: a testre ható erők eredője a kitéréssel arányos, de azzal ellentétes, azaz $F = -D \cdot x$. Így a rezgésidő $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/D}$.

E) MUNKA–ENERGIA A munka fogalma: általában munkavégzéssel változtathatjuk meg a testek helyzetét, mozgásállapotát – energiáját. Egy testre ható állandó nagyságú és irányú *F* erő munkája, miközben a test egyenes pályán *s* úton mozog: $W = F \cos\alpha\, s$, ahol α az erő és az elmozdulás iránya által bezárt szög. A munka előjeles skaláris mennyiség, értéke pozitív vagy negatív attól függően, hogy az erő az elmozdulással hegyes vagy tompa szöget zár be.
Emelési munka. Az egyenletes emelés azt jelenti, hogy a test gyorsulása nulla, tehát $F = mg$. Így az F erő munkája: $W_{em} = mgh$.
Súrlódási munka. Vízszintes talajon mozog egy test állandó erő hatására állandó sebességgel. Ekkor a húzóerő a súrlódási erő ellenében végez munkát:
$W_S = F_S \cdot s \cdot \cos 180° = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s$.
Gyorsítási munka. A test állandó gyorsulással mozog. A testre ható erők munkája vízszintes súrlódásmentes talajon, amíg 0-ról v sebességre gyorsul a test:
$W_{gy} = F \cdot s = m \cdot (a \cdot t)^2/2 = m \cdot v^2/2$. A munkavégzés kizárólag a test adataitól – tömegétől, sebességétől – függ.
Változó erő munkája az erő–elmozdulás grafikon görbe alatti területével egyezik meg. Rugó megnyújtása közben végzett munka: a rugóerő egyenletesen változik a megnyújtáskor: $F = kx$. A munka meghatározásához az elmozdulás–erő függvény alatti területet kell meghatározni: $W_r = 1/2 \cdot k \cdot x_0^2$ ahol x_0 a rugó megnyúlását jelöli.
Teljesítmény, hatásfok. A munkavégzés „gyorsaságára" jellemző mennyiség a $P = W/t$ teljesítmény. Amennyiben egy folyamatra teljesül, hogy a munka egyenesen arányos az eltelt idővel, azaz a mennyiség állandó, azt mondjuk, hogy a teljesítmény állandó. SI-egysége: 1 J/s = 1 watt. Annak az állandó húzóerőnek a teljesítménye, amely egy testet egyenes vonalú egyenletes mozgással, állandó v sebességgel húz: $P = W/t = F \cdot s/t = F \cdot v = áll.$ Ha a teljesítmény nem állandó, a $P = W/t$ hányados az átlagos teljesítményt adja. A $P = Fv$ összefüggés ebben az esetben a pillanatnyi teljesítményt adja. Egy folyamat hatékonyságát a munkavégzés hatásfokával jellemezhetjük, jele: η, definíciója:
$W_{haszn}/W_{össz.} = P_{haszn}/P_{össz.}$ A hatásfok nulla és egy közé eső szám, amelynek 100-szorosa százalékban adja meg a hatásfok értékét.
Energia. Az, hogy adott erő hatására a test mozgásállapota milyen mértékben változik, nem az erőtől, hanem az erő munkájától függ. Az F erő munkája:
$W = F_S = m \cdot a \cdot s = m(v_2^2 - v_1^2)/2 = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$. Megállapíthatjuk, hogy egy adott nagyságú munkavégzés a test mozgásállapotát jellemző, csak a test adatait tartalmazó $(1/2)mv^2$ mennyiség adott mértékű megváltozását eredményezi. Ezt a mozgásállapotra jellemző fizikai mennyiséget a test mozgási (vagy más néven kinetikus) energiájának nevezzük: $E(mozg) = (1/2)m \cdot v^2$.
A mozgási energia fogalmával előző eredményünk a következőképpen foglalható össze: *A testre ható erők eredőjének munkája egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával. Ez a MUNKATÉTEL:* $W_{(össz.\ erő)} = \Delta E_{(mozg.)}$.
Helyzeti energia (rugalmas). Egy rugó megnyújtásakor az $(1/2)k \cdot x^2$ mennyiség csak a rugó feszítettségére jellemző. A rugó megfeszítéséhez befektetett munka tárolódik a rugóban, ez a rugó rugalmas energiája: $E_{(rug.)} = (1/2)k \cdot x^2$
Nehézségi erő és helyzeti energia. Ha a Föld felszíne fölött nem túl nagy h_1 magasságban levő P_1 pontból tetszőleges útvonalon egyenletesen a P_2 pontba viszünk egy m tömegű testet, akkor az ehhez szükséges munka csak a magasságkülönbségtől függ, a választott úttól függetlenül: $W = m \cdot g \cdot h$. Az mgh mennyiség azt a munkát adja meg, amit a nehézségi erő végez az m tömegű testen, ha a test magassága h-val csökken. Ezért ezt a mennyiséget a test helyzeti energiájának nevezzük: $E_{(helyzeti)} = m \cdot g \cdot h$.
A mechanikai energiamegmaradás tétele: Ha a konzervatív erők hatása alatt mozgó test helyzeti energiája csökken, akkor a munkatétel alapján a mozgási energiája ugyanennyivel nő és fordítva: $E_{(helyzeti)} + E_{(mozgási)} = állandó$

F) PONTRENDSZER MOZGÁSÁNAK LEÍRÁSA A pontrendszer tagjaira ható erőket két csoportba oszthatjuk: külső, illetve belső erőkre. Az olyan pontrendszert, amelyben csak belső erők hatnak, zárt rendszernek nevezzük. *Zárt pontrendszer összlendülete állandó. Ezt a tételt lendületmegmaradás vagy impulzusmegmaradás tételének is nevezzük.*
Ütközések. Tökéletesen rugalmatlannak nevezzük két test ütközését akkor, ha az ütközés után közös sebességgel haladnak tovább. Az ütközés során csak belső erők hatnak, ezért alkalmazható a lendületmegmaradás törvénye, amiből $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2)v$, ahol v a közös sebesség. Könnyen belátható, a rendszer összes mozgási energiája csökken.
Ha az ütközésben résztvevő testek együttes mozgási energiája az ütközés előtt és után megegyezik, tökéletesen rugalmas ütközésről beszélünk. Ha az ütközés során minden sebességvektor ugyanabba az egyenesbe esik, úgy az ütközést centrális ütközésnek nevezzük.
A pontrendszer teljes mozgásienergia-változását a fellépő külső és belső erők munkájának összege adja meg: $W_{(Fkülső)} + W_{(Fbelső)} = \Delta E_{(mozg.)}$. *Ezt az összefüggést a pontrendszerre vonatkozó munkatételnek nevezzük.*

G) A BOLYGÓK MOZGÁSA
Kepler I. törvénye: A bolygók pályája ellipszis, ennek egyik gyújtópontjában a Nap áll.
Kepler II. törvénye: A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.
Kepler III. törvénye: A bolygók keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a bolygópályák fél nagytengelyeinek köbei. Két bolygóra: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$ ahol T_1 és T_2 a két keringési idő, a_1 és a_2 a két fél nagytengely.
Az általános tömegvonzás törvénye: Bármely két test között kölcsönös vonzoerő lép fel, amely pontszerű testek esetén a két test tömegével egyenesen, a közöttük lévő távolság négyzetével fordítottan arányos: $F = f \cdot m_1 \cdot m_2/r^2$. Ez a tömegvonzási, vagy más néven gravitációs kölcsönhatás az anyagi testek egyik alapvető kölcsönhatási formája. Az f arányossági tényezőt gravitációs állandónak nevezzük, értéke: $f = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2$

H) A MEREV TEST (A merev test bármely két pontjának távolsága állandó, a testre ható erők nagyságától függetlenül).
A merev testre ható erő támadáspontja a hatásvonala mentén eltolható anélkül, hogy az erő hatása megváltozna. A merev test három egymással nem párhuzamos erő hatására akkor van egyensúlyban, ha a három erő hatásvonalának egyetlen közös pontja van és az erők vektori összege nulla. Az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságát erőkarnak nevezzük és k-val jelöljük. Az erő forgatóhatását a *FORGATÓNYOMATÉKKAL* jellemezzük. Az F erő adott tengelyre vonatkozó forgatónyomatékát az erő és az erőkar szorzatával definiáljuk: $M = F \cdot k$. A merev test egyensúlyának eszerint két feltétele van:
1. a testre ható erők vektori összege nulla.
2. az erők forgatónyomatékainak összege bármely pontra mint forgáspontra vonatkozóan nulla.
Tengellyel rögzített merev test akkor van egyensúlyban, ha a ráható erők tengelyre vonatkoztatott előjeles forgatónyomatékainak algebrai összege nulla. A tengelynél éppen akkora kényszererő lép fel, hogy a testre ható összes erő eredője nulla legyen. A felfüggesztés, vagy alátámasztás révén nyugalomban lévő kiterjedt merev test egyensúlya háromféle lehet: biztos (stabilis), közömbös (indifferens), bizonytalan (labilis). Biztos a test egyensúlya, ha súlypontja a felfüggesztési pont alatt van. Ilyenkor a kissé kimozdított testet a nehézségi erő forgatónyomatéka az eredeti helyzete felé fordítja vissza. Közömbös a test egyensúlya, ha a testet súlypontján átmenő tengellyel rögzítjük. Ebben az esetben a test bármilyen helyzetben egyensúlyban marad.
Bizonytalan a test egyensúlya, ha a felfüggesztési vagy alátámasztási pont a test súlypontja alatt van. Ilyenkor a kissé megmozdított test nem tér vissza ebbe a helyzetbe, a nehézségi erő forgatónyomatéka egyre jobban elfordítja egészen addig, amíg a test át nem fordul biztos egyensúlyi helyzetébe.
Forgómozgás esetén a test egyes pontjai egy adott tengely körüli körmozgást végeznek. Ez a tengely lehet a test környezetéhez képest nyugalomban lévő vagy a testtel együtt mozgó. Merev test esetén valamennyi pont szögsebessége azonos, így az egyes pontok tengelyhez viszonyított sebessége: $v = r \cdot w$, ahol r a vizsgált pont tengelytől mért távolsága, ω pedig a szögsebesség. Ha a tengely pillanatnyi sebessége v_0, akkor az egyes pontok pillanatnyi sebességét a v_0 és v vektorok összege szolgáltatja. Tiszta gördülés esetén $v_0 = r \cdot w$, ahol r a tisztán gördülő test sugara. Állandó forgatónyomaték hatására egy tengellyel rögzített merev test szöggyorsulása állandó. Ha változtatjuk a forgatónyomatékot, akkor a szöggyorsulás vele arányosan változik, azaz adott test és adott tengely esetén: $M/\beta = állandó$. Az állandót *tehetetlenségi nyomatéknak* nevezzük. Ha egymástól függetlenül mérjük az M forgatónyomatékot és a β szöggyorsulást, akkor az M/β hányados megadja a Θ tehetetlenségi nyomaték értékét. A tehetetlenségi nyomaték kiszámításához fel kell osztani gondolatban a testet „n" apró részre. Legyen egy ilyen kis rész tömege m_i, távolsága a forgástengelytől pedig r_i. Szorozzuk össze az m_i tömeget az r_i távolság négyzetével, majd összegezzük ezt a test összes pontjára: $\Theta = \Sigma m_i \cdot r_i^2$.
A haladó mozgást jellemző $I = mv$ lendületnek forgómozgáskor a *perdület* (másnéven impulzusnyomaték vagy impulzusmomentum) felel meg: $N = \Theta w$. A forgómozgás dinamikai alapegyenletéből kiindulva: $M = \Delta N/\Delta t$. Ha most $M = 0$, akkor a ΔN perdületváltozás is nulla. Ez azt jelenti, hogy a test $N = \Theta\omega$ perdülete állandó, ha a külső forgatónyomatékok összege nulla. Ez a perdület megmaradásának tétele; (a perdület vektormennyiség).

I) DEFORMÁLHATÓ TESTEK A szilárd testek erő hatására többé-kevésbé deformálódnak. A deformált testek az erőhatás megszűnte után különböző módon viselkednek. Maradandó alakváltozásról beszélünk akkor, ha a test az erőhatás megszűnése után nem nyeri vissza eredeti alakját. Rugalmas alakváltozásról beszélünk akkor, ha az erőhatás megszűnte után a test teljesen visszanyeri eredeti alakját. Tökéletesen rugalmas anyag nincs!
A rugalmas megnyúlás: az l hosszúságú A keresztmetszetű fémszál Δl megnyúlása arányos az F húzóerővel, az l hosszal, és fordítottan arányos az A keresztmetszettel, az anyagi minőségtől való függést az E nyújtási rugalmassági modulus, vagy Young-modulus jellemzi: $\Delta l = (F \cdot l)/(E \cdot A)$. Ez a nyújtásra vonatkozó **Hooke-törvény**. Mindenféle rugalmas deformációra érvényes, hogy kis mértékű alakváltozásoknál a deformáció arányos az erővel. Ez az általánosított Hooke-törvény.
A *folyadékok* és a gázok legszembetűnőbben abban különböznek a szilárd testektől, hogy nincs önálló alakjuk. Leglényegesebb tulajdonságai a következők: a folyadéknak nincs önálló alakja; térfogata jó közelítéssel állandó; nyugvó szabad felszíne vízszintes, cseppekre szakad, részecskéi között a kölcsönhatás csak kis távolságon belül érvényesül. A folyadék a nyíró-igénybevételnek nem tud ellenállni, a nyugvó folyadék belsejében nem keletkezik nyírófeszültség; az edény falára és a belehelyezett test felületére is csak merőleges erőt képes kifejteni!
A *gázok* összenyomhatók, így térfogatuk nem állandó. A rendelkezésükre álló teret egyenletesen töltik ki. A gázokban sem jönnek létre nyírófeszültségek. Emiatt a tartály falára és a belehelyezett testekre csak merőleges erőt képes a nyugvó gáz kifejteni. A nyírófeszültségek hiánya miatt a folyadékok és a gázok sok tekintetben igen hasonlóan viselkednek. Nyugvó folyadékokra és gázokra érvényes ***Pascal törvénye:*** *zárt térben lévő nyugvó folyadékban vagy gázban a külső erő által létrehozott nyomás minden irányban gyengítetlenül terjed.*
A hidrosztatikai nyomás. A nyugvó folyadékban a szabad felszíntől h mélységben minden irányban azonos, $p = \rho g h$ nagyságú, a folyadék súlyából származó hidrosztatikai nyomás lép fel.
Arkhimédész törvénye: *A folyadékba mártott testre felhajtóerő hat,* amely a nyugvó folyadékban fellépő hidrosztatikai nyomás mélységfüggésének következménye. *Nagysága megegyezik a test által kiszorított folyadék súlyával.*
Folyadékok és gázok áramlása. Nem túl nagy sebességgel áramló gázok a folyadékhoz hasonlóan szintén nem nyomódnak össze. Az áramló anyagra vonatkozó egyszerűsítő feltevéseink: térfogata nem változik, súrlódásmentes, azaz nem ébrednek benne nyírófeszültségek, hőmérséklete nem változik. Az áramlásról feltételezzük, hogy időben állandó. A kontinuitási egyenlet: összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására fennáll, hogy az áramlási cső keresztmetszetének és az ott felvett sebességnek a szorzata a cső bármely helyén állandó. Az áramlási cső bármely helyén: $P + (1/2) \cdot \rho \cdot v^2 = állandó$. Ez ***Bernoulli törvénye*** vízszintes áramlási csőre. A törvény értelmében a nagyobb sebességgel áramló folyadékban a nyomás kisebb.
A közegellenállás.
A nyugvó légnemű vagy folyékony közeg a benne moz-

gó testre a relatív sebességgel ellentétes irányú erőt fejt ki, amely a szilárd test alakján kívül, annak homlokfelületétől (az áramlásra merőleges keresztmetszet), a közeg sűrűségétől és a relatív sebességtől függ: $F=k\cdot A\cdot\rho\cdot v^2$ Az összefüggésben k-val az alaki tényezőt jelöltük. Kis sebességű áramlásoknál a közegellenállási erő a sebesség első hatványával arányos.

III. HŐTAN

Két test hőmérséklete egyenlő, ha hőegyensúlyi állapotban vannak. A hőmérséklet mérésére pl. a higany hőtágulását használhatjuk (*Celsius-skála* [t]). Az abszolút hőmérsékleti skála (T) az anyagok minőségétől független, léptéke a Celsius-skálával azonos, $T=t+273$

Állapotváltozások: huzal hosszváltozása arányos a hőmérsékletváltozással, az eredeti hosszal, és függ az anyagi minőségtől: $\Delta l=\alpha\cdot l_O\cdot\Delta t$ Az α arányossági tényező a lineáris hőtágulási együttható.

Szilárd test térfogatváltozása:

$\Delta V=3\alpha V_0\cdot\Delta t$. Folyadékok esetén $\Delta V=\beta\cdot V_O\cdot\Delta t$, ahol β a térfogati hőtágulási együttható.

Ideális gáz: azok a gázok, melyek térfogatának és nyomásának szorzata állandó hőmersékleten állandó *(Boyle–Mariotte). Gay-Lussac I. törvénye:* adott mennyiségű gáz térfogatváltozása egyenesen arányos a hőmérséklet-változással, és a gáz 0 °C-on mért térfogatával: $\Delta V=(1/273\ °C)\cdot V_O\cdot\Delta t$ (izobár állapotváltozás) *Gay-Lussac II. törvénye:* adott mennyiségű gáz nyomásváltozása állandó térfogatón egyenesen arányos a hőmérséklet-változással és a 0 °C-on mért nyomással: $\Delta p=(1/273\ °C)\cdot p_O\cdot\Delta t$ (izochor állapotváltozás). E három törvényből következik az *általános gáztörvény:* adott mennyiségű ideális gázra $p\cdot V/T=$ *áll.* (T kelvinben mért absz. hőm.). Az itt szereplő állandó kifejezhető a gáz tömegével is: $p\cdot V=(m/M)\cdot R\cdot T$, vagy $p\cdot V=n\cdot R\cdot T$, ahol m a gáz tömege, M a gáz moláris tömege, R=8,31 J/K, n a mólok száma.

Az I. főtétel egy test belső energiájának megváltozása egyenlő a testtel hőfolyamat során közölt energia és a munkavégzés összegével: $\Delta U=Q+W$ (A tágulási munka $W=p\cdot\Delta V$). Szilárd testek és folyadékok esetén W kicsi, így $\Delta U=Q$. A felvett hő egyenesen arányos a hőmérséklet-változással: $\Delta Q=C\cdot\Delta t$ Itt a C a hőkapacitás. C arányos a tömeggel, és függ az anyagi minőségtől: $C=c\cdot m$ A c tényező neve fajhő, számértéke megadja azt a hőt, amely az adott anyag 1 kg-jának hőmérsékletét 1 K-nel emeli. A halmazállapot-változások állandó hőmérsékleten történő hőfelvétellel vagy leadással járnak, ez szigorúan arányos a tömeggel: $Q=L\cdot m$, ahol L olvadáshő, párolgáshő vagy forráshő. Gázok fajhője függ a folyamattól. Az izobár (p=áll) és az izochor (V=áll.) állapotváltozásokra jellemző cp, ill. cv fajhők között érvényes a Robert Mayer-egyenlet: $cp–cv=R/M$

Speciális állapotváltozások:

1. T=áll. *(izoterm)* $\Delta U=0=Q+W$, a gáz fajhője végtelen nagy.
2. p=áll. *(izobár)* $\Delta U=cp\cdot m\cdot\Delta T–p\cdot\Delta V$.
3. V=áll. *(izochor)* $\Delta U=cv\cdot m\cdot\Delta T\ (W=0)$.
4. Q=0 *(adiabatikus)* $\Delta U=W$ a gáz fajhője nulla.

Az olyan testeket, amelyek hőkapacitása nagyon nagy, hőtartályoknak nevezzük. *A II. főtétel* (Planck): *nem lehet olyan, periodikusan működő hőerőgépet készíteni, amely egyetlen hőtartály lehűlése árán munkát végezne.* Hőerőgépek működtetéséhez legalább két hőtartály szükséges. Ha a gép a magasabb hőmérsékletű hőtartályt fűti, akkor hőszivattyúról beszélünk.

IV. AZ ELEKTROMOSSÁG

A) ELEKTROSZTATIKA Súrlódás, dörzsölés hatására az elektromosan semleges tárgyak pozitív, ill. negatív töltésűvé válhatnak. Az azonos töltéssel rendelkező testek között taszító, az ellentétes töltésűek között vonzóerő hat, amely *Coulomb törvénye* szerint két, pontszerűnek tekinthető elektromos test között $F=k\cdot q\cdot Q/r^2$ nagyságú. Q ill. q az elektromos töltés mértékét jelöli, amelynek egysége 1 C, a k állandó pedig $9\cdot10^9\ Nm^2/c^2$.

Az elektromosan töltött testeket elektromos erőtér veszi körül, amely az *E* térerősséggel jellemezhető: $E=F/Q$. Két vagy több elektromos töltés által létrehozott térerősség vektorilag összegezhető (szuperpozíció). Homogén az elektromos tér, ha az elektromos térerősség nagyság és irány szerint állandó. Az elektrosztatikus térben, a gravitációs térhez hasonlóan, bármely zárt görbén mozgatva töltést, a teljes munkavégzés zérus. Ezért két pont között a töltésen végzett munka és a töltés hányadosa a tér két pontjára jellemző mennyiség, amelyet *elektromos feszültségnek* nevezünk: $U=W/Q=E\cdot\Delta s$ A feszültség egysége: 1 J/C = 1 V. Kiválasztható egy pont a térben, pl. a forrástól végtelen távol, amelyhez viszonyítva a feszültséget *potenciálnak* nevezik. *Így a két pont közötti feszültség megegyezik a két pont potenciáljának különbségével.* Fontos jelenség az elektromos megosztás, amely szerint az elektromos térbe helyezett fémes vezető belsejében zérus az eredő térerősség. Ez ad lehetőséget pl. az elektromos leárnyékolásra. Minden fémes testre jellemző egy alapvető fizikai mennyiség, a *kapacitás*, amely megmutatja, hogy egy adott töltésmennyiség milyen potenciált hoz létre a testen: $c=Q/U$ A kapacitás egysége az 1C/1V=1Farad. Nagy kapacitású eszközök a kondenzátorok, amelyek használata többek között a híradástechnikában fontos. Pl. a síkkondenzátor által tárolt energia: $E=(1/2)\cdot c\cdot U^2$

B) AZ ELEKTROMOS ÁRAM Potenciálkülönbség hatására vezetőkben a szabad töltéshordozók a potenciálesés irányába elmozdulnak. Ez az elektromos áram, amely az *áramerősséggel* jellemezhető: $I=Q/t$ egysége 1 C/s=1 A. *Ohm törvénye* szerint a fémes vezetőkre jellemző az U/I hányados, amelyet ellenállásnak nevezzük: $R=U/I$, egysége 1 V/A=1Ω. A fémes vezetők ellenállása függ az anyagi minőségtől, a geometriai mérettől és a hőmérséklettől:

$R=\rho\cdot l/A;\ \rho t=\rho_0\cdot(1+\alpha\cdot\Delta t)$

Fontos, a technikában jól használható tulajdonsága a fémeknek a *SZUPRAVEZETÉS, amely szerint alacsony hőmérsékleten a fémek tökéletes, ellenállás nélküli vezetővé, szupravezetővé válnak.*

Az ellenállások vagy fogyasztók kapcsolásában az eredő ellenállás Kirchoff törvényei szerint számolható: $R_{soros}=\Sigma R_i$, illetve $1/R_{párh.}=\Sigma 1/R_i$

Az elektromos töltés hordozói a feszültségforrásból felvett energiát a fogyasztó ionjainak leadják, így a fém az áram hatására felmelegszik. Az így keletkezett hő, tehát az áram munkája: $W=U\cdot Q=U\cdot I\cdot t=I\cdot R\cdot t$ A fogyasztó által felvett teljesítmény $P=W/t=U\cdot I=I\cdot R$ A tartós egyenáramot szolgáltató berendezések a galvánelemek, telepek, akkumulátorok, amelyek az elektromos energiát kémiai energia formájában tárolják.

V. AZ ÁLLANDÓ MÁGNESES TÉR

A) MÁGNESES TÉR JELLEMZÉSE, FORRÁSA Megfigyelhető, hogy az úgynevezett állandó mágnesek (pl. patkómágnes), áramjárta vezetékek, tekercsek környezetünkben mágneses teret hoznak létre. Itt a másik mágnesre (pl. iránytűre) vagy árammal átjárt vezetőre erő hat. Jól vizsgálhatók a mágneses térben uralkodó erőviszonyok egy kicsiny, tengely körül forgatható áramjárta mérőkerettel, a magnetométerrel. A pontos mérések szerint a tér minden egyes pontjában a magnetométerre maximális forgatónyomaték hat, amely egy a kiválasztott pontra jellemző irányba fordítja a magnetométert: $M_{max}=B\cdot I\cdot A$ Az összefüggésben szereplő B-t a tér *mágneses indukciójának* nevezik, iránya az előbb említett irány, egysége 1 N/A·m = 1 V·s/m² = 1 Tesla. A *mágneses fluxus* bevezetésével jól érzékelhető az elektromos és a mágneses tér szerkezete között az alapvető különbség: $\Sigma\Delta\Phi=\Sigma B\cdot\Delta A=0$, zárt felületre vonatkoztatva.

Az árammal átjárt vezeték maga körül hengerszimmetrikus mágneses teret kelt. Ezt az egyébként kísérlettel is bemutatható eredményt általános formában a következő törvény tartalmazza: $\Sigma B\cdot\Delta s=\mu_0\cdot I$, (zárt görbére vonatkoztatva), ahol a μ_0 állandó értéke $1{,}26\cdot10^{-6}$(V·s)/(A·m); ez a mágneses permeabilitás. Mindezek alapján pl. az egyenes vezető körül $B=\mu_0\cdot I/2r\cdot\pi$, a tekercs belsejében $B=\mu_0\cdot I\cdot N/l$ (homogén) a mágneses indukció.

B) ERŐHATÁSOK A MÁGNESES TÉRBEN Mágneses térben az árammal átjárt vezetékre, ha az nem áll párhuzamosan a B-vel, erő hat. Ez okozza a tekercsek elfordulását is. Pl. két párhuzamos, áramjárta vezeték vonzó- ill. taszítóerőt fejt ki egymásra, az áramirányoktól függően. Homogén térben, a B-re merőleges, l hosszúságú, I áramot vivő vezetőre $F=B\cdot I\cdot l$ nagyságú, I-re és B-re merőleges irányú erő hat. Hasonlóan, a mágneses térben szabadon mozgó elektromos töltésekre is hat erő *(Lorentz-erő):* $F=q\cdot v\cdot B$, amely v-re és B-re merőleges. Így pl. körpályára állíthatók a felgyorsított részecskék. A magfizikai részecskegyorsítók így működnek.

C) INDUKÁLT FESZÜLTSÉG, VÁLTÓÁRAM Mágneses térben mozgatva fémes vezetőt, a benne lévő szabad töltéshordozók is elmozdulnak a vezető irányába, a Lorentz-erő miatt ($v\perp B$, Flv, $F\perp B$!). A töltésszétválasztás feszültséget eredményez a két végpont között: ezt *indukált feszültségnek* nevezik: $U=B\cdot l\cdot v$ Amennyiben zárt áramkört létesítünk, a mozgó, most már árammal átjárt vezetőre a mágneses tér fékező erőhatást fejt ki *(Lentz törvénye).* Így az energiamegmaradás érvényesül, hiszen mechanikai munka árán nyerjük az elektromos energiát. Ez a mozgás folyamatosan fenntartható, pl. forgatással, és így a kivezetésen: $U(t)=B\cdot l\cdot v\cdot sin\ w\cdot t$ váltakozó feszültséget, a bekötött ellenálláson $I(t)=B\cdot l\cdot v\cdot sin\ w\cdot t/R$ váltóáramot kapunk. Az egyenáramhoz hasonlóan, ennek a váltóáramnak hőhatása is van, amely hasznos érték (effektív érték); természetesen kisebb, mint a csúcsérték: $U_{eff}=U_{max}/\sqrt{2};\ I_{eff}=I_{max}/\sqrt{2}$ Ezek alapján a váltóáram munkája: $W=U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot t=U^2_{eff}/R$ teljesítménye: $P=U^2_{eff}/R=I^2_{eff}\cdot R$.

VI. A VÁLTOZÓ MÁGNESES TÉR

Indukált feszültség mérhető egy tekercs kivezetésein akkor is, ha a belsejében a mágneses teret bármilyen módon megváltoztatjuk (kikapcsolás, bekapcsolás, áramerősség-változás). A jelenséget Faraday ismerte fel; elektromágneses indukciónak nevezik (nyugalmi, kölcsönös és önindukció): $U_{ind}=-\Delta\Phi/\Delta t=-\Delta(B\cdot A)/\Delta t$ A negatív előjel a Lentz-törvényt takarja, amely szerint zárt áramkörben az indukált áram mágneses tere ellentétes irányú az őt létrehozó $\Delta\Phi$ mágneses fluxusváltozással. Az N menetszámú tekercsben az indukált feszültség értéke $U_i=N\cdot\Delta\Phi/\Delta t$ Tekercsben az áramerősség megváltozása egyben a saját mágneses fluxust is megváltoztatja, így indukált feszültséget eredményez. Ez az önindukció, $U=-L\cdot\Delta I/\Delta t$, ahol L a tekercsre jellemző önindukciós együttható, egysége 1 V·s/A = 1 H. A tekercs adataival kifejezve: $L=\mu_0 N^2\cdot A/l$. Fontos megjegyezni, hogy az I árammal átjárt tekercs nemcsak mágneses teret hoz létre, hanem $E=(1/2)\cdot L\cdot I^2$ mágneses energiát is tárol a belsejében. Váltóáramú áramkörben a tekercs is és a kondenzátor is egy-egy külön ellenállást képvisel: $X_L=L\cdot w$ $X_c=1/(c\cdot w)$. A fémes vezetők R ellenállása váltóárammal ugyanúgy megjelenik, mint egyenárammal.

A leggyakoribb, ún. soros R–L–c kör váltóáramú eredő ellenállása (Z) a fázisviszonyok miatt a következő összefüggéssel számolható: $Z=\sqrt{R^2+(L\cdot\omega-1/c\cdot\omega)^2}$. Az áram és a feszültség között fáziseltérés van, amelyre a $cos\vartheta=R/Z$ összefüggés vonatkozik. A váltóáramú áramkör hatásos, vagy effektív teljesítménye: $P_{eff}=U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot cos\vartheta=I^2_{eff}\cdot R$. A $cos\vartheta$ szorzó a *teljesítménytényező.*

Az elektromágneses indukció jelenségének jó néhány gyakorlati alkalmazásával találkozhatunk. Pl. az elektromos energia szállítására, vagy a különböző elektronikus eszközök működtetésére a váltófeszültség amplitúdója fel- ill. letranszformálható *(transzformátor)* miközben az áramerősség amplitúdója fordítva változik: $N_1/N_2=U_1/U_2=I_2/I_1$. A váltófeszültség előállítása a generátorokban történik, amelyek működése szintén a mozgási indukción alapul. Hasonlóan, a váltózó mágneses tér forgatja meg az elektromágnest a villanymotorokban.

VII. ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK, OPTIKA

A) ELEKTROMÁGNESES REZGÉSEK, RÁDIÓHULLÁMOK Korábban már láttuk, hogy a kondenzátor és az indukciós tekercs egyaránt képes energiatárolásra ($E_c=(1/2)\cdot C\cdot U^2$, $E_L=(1/2)\cdot L\cdot I^2$). Így a feltöltött kondenzátor fegyverzeteit egy indukciós tekercsen keresztül zárva, a kondenzátor energiája átvándorol a tekercsbe, miközben abban feszültséget indukál. Ezután Lentz törvénye szerint a tekercs lesz az energiaforrás, és a jelenség folytatódik. Ez az elektromos *rezgőkör,* amelyben a veszteségek miatt csillapított rezgések alakulnak ki, $T=2\cdot\pi\sqrt{L\cdot c}$ periódusidővel. [Thomson-képlet $(1/2)\cdot L\cdot I^2=(1/2)\cdot c\cdot U^2$.] Az energiaveszteségek pótolhatók, ha ugyanazzal a frekvenciával periodikusan energiát táplálunk vissza a rezgőkörbe. Ily módon, az ún. visszacsatolással csillapítatlan, nagyfrekvenciás rezgések is előállíthatók, pl. elektroncső vagy tranzisztor áramkörrel.

A csillapítatlan elektromágneses rezgéseket a térbe kisugározva elektromágneses hullámokat kapunk, amelyek kiválóan alkalmasak mindennemű információ hordozására (morze, rádióhullámok, televízió stb.). Maxwell törvényének általánosítása szerint az ilyen változó elektromágneses hullám képes önmagát fenntartva, fénysebességgel terjedni. Az elméleti megfontolások és a kísérletek szerint a látható fény és a más módon előállított elektromágneses hullámok között teljes az analógia, csupán paraméterekben – frekvencia, hullámhossz – különböznek. Valamennyi hullámtulajdonság jól megfigyelhető: *visszaverődés, törés, polarizáció, interferencia,* természetesen alkalmasan megválasztott berendezéssel.

Az elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses komponens egyaránt jelen van, és a tér egységnyi felületén időegység alatt $S=(1/\mu_0)\cdot E\cdot B$ energia áramlik keresztül (*S* a Poynting-vektor). Az elektromágneses hullám az energia mellett impulzust is hordoz, így teljes mértékben anyagi kölcsönhatásba képes lépni a környezettel, pl. nyomást fejt ki (fénynyomás).

B) HULLÁMOPTIKA A látható fény az elektromágneses hullámok között, az elektromágneses spektrumban, amely a váltakozó áramoktól egészen a kozmikus sugárzásig tart, egy nagyon szűk tartományban helyezkedik el, számunkra mégis a legfontosabb! A terjedési tulajdonságai teljes egészében megegyeznek a mechanikai hullámokéval, ezek a következők. *Visszaverődés:* $\alpha=\alpha'$, *törés:* $sin\ \alpha/sin\ \beta=c_1/c_2=n$, *polarizáció, interferencia, elhajlás* (optikai rés, rács). Fontos megjegyezni, hogy a fehér fény összetett, elemeire bontható (szivárvány) pl. prizmán átbocsájtva. A fénynek ez a tulajdonsága jól felhasználható a különböző anyagok, távoli égitestek összetételének vizsgálatához (spektroszkópia).

VIII. ATOMFIZIKA

A) AZ ANYAG ATOMOS FELÉPÍTÉSE Az atom – oszthatatlan – szó a görögöktől származik. A 19. század kémiai és fizikai kutatásai alapján ma már mindenki tudja, hogy az anyagok további, sokkal kisebb, elemi részecskékre oszthatók. A molekula fogalmát, mint egy adott anyag legkisebb, még önállóan létező részét Avogadro vezette be, nevéhez fűződik a kémiából ismert Avogadro-szám, vagy Loschmidt-szám: $L=6{,}02\cdot10^{23}$. Ennek ismeretében már a múlt században meg tudták határozni pl. a hidrogén atomméretét: 10^{-8}cm nagyságrendű átmérő, és 10^{-24}g tömeg adódott. Faraday elektrolízisre vonatkozó kísérletei az elemi, tovább nem osztható elektromos töltés egységét is megadták, amely nagyon jól megegyezett a későbbi, pl. a gázkisülésnél észlelt *elemi töltéssel.* Mint tudjuk, ez az *elektron,* töltése: $e=1{,}6\cdot10^{-19}C$, tömege $m=9{,}1\cdot10^{-31}kg$.

Az atomszerkezet megismerésében a múlt század végén felfedezett radioaktivitás döntő fontosságú volt. Felismerték a radioaktív sugárzások vizsgálatakor, hogy az atomok tömegének nagy része, valamint teljes pozitív töltése egy igen kicsiny helyen, az *atommagban* összpontosul *(Rutherford),* amelynek átmérője 10^{-15}m nagyságrendű. Így születtek meg az első atommodellek – Thomson-modell, Rutherford-modell, Bohr-modell –, amelyek azonban az újabb és újabb kísérleti eredmények alapján mind túlhaladottá váltak. Ugyanis ma már tudjuk, hogy az elemi részecskék egészen más törvényekkel írhatók le, mint a makroszkopikus testek.

B) KETTŐS TULAJDONSÁG A múlt század végén, *Max Planck* a különböző hőmérsékletű testek által kisugárzott energia vizsgálata során egy, a klasszikus fizikai szemléletnek ellentmondó eredményre jutott. Nevezetesen arra, hogy az energiakisugárzás nem folytonos, hanem kicsiny, elemi energiaadagokban, kvantumokban történik. Az f frekvenciájú hullám esetében: $E=h\cdot f$, ahol $h=6{,}34\cdot10^{-34}$J/s, a Planck-féle állandó. Ez a felismerés vezetett el a kvantumelmélethez, amely mai ismereteink szerint alkalmas az anyag szerkezetének a leírására. A kvantumelméletet *Albert Einstein* alkalmazta először más területen is; a fényelektromos jelenségnél. Einstein feltételezése szerint az f frekvenciájú fény hatása $E_f=h\cdot f$ energiájú részecskék, a *fotonok* áramának felel meg. A fotonok mint energiával $(h\cdot f)$, tömeggel $(h\cdot f/c^2)$, impulzussal $(h\cdot f/c)$ rendelkező részecskék létezésének közvetlen kísérleti igazolására ma már számos kísérlet – Franck–Hertz-kísérlet, Compton-effektus – szolgál.

Később *Louis de Broglie* francia fizikus a fénynél tapasztalt kettős tulajdonságot az elektronra, majd más elemi részecskékre is általánosította. Feltételezése alapján pl. egy elektronsugárban haladó elektronok is rendelkeznek hullámtulajdonsággal $(\lambda=h/p)$, így pl. elhajlásra, interferenciára képesek. Ilyen jelenségeket később sikerült is atomi rácsokon előállítani. Éppen ezért, tehát a hullámtermészete miatt, a mikrorészecske mozgása közben nem adható meg a pályája, a térbeli helye, nem ismerhetjük pontosan az impulzusát. Ezt a bizonytalanságot tartalmazza a *Heisenberg-féle határozatlansági reláció:* $\Delta x\cdot\Delta p=h/(4\pi)$.

Az elektronnak az atomon belül elfoglalt helyéről, energiájáról így csak valószínűségi megállapítások tehetők. Ez a kvantummechanikai atommodell azonban – bár magasabb matematikai eljárást használva – nagyon jó egyezést mutat mind a klasszikus atomképpel, mind a valósággal.

IX. MAGFIZIKA

A) AZ ATOMMAG, A RADIOAKTIVITÁS A radioaktív sugárzások alapján az atommagok két nagy csoportba oszthatók: stabil magok és radioaktív magok. A sugárzóanyag azért képes α (2 proton–2 neutron), β (elektron) vagy γ (elektromágneses foton) sugárzást kibocsájtani, mert így kisebb energiájú állapotba kerül, így érvényesül az energiaminimum elve. Az atomok magjának megismeréséhez a legjobb elektronmikroszkóp sem ad elegendő nagyítást, erre csak a részecskegyorsítók alkalmasak. Éppen ezért a magfizika nagyon „fiatal" tudomány, pl. a magok egyik alkotóelemét, a neutront csak 1932-ben fedezték fel. Az A tömegszámú és Z rendszámú magot Z proton és A–Z neutron alkotja, amelyeket a magerők – másnéven *nukleáris erők* – tartják össze. A nukleáris erők tulajdonságairól (megjegyezzük, hogy ez még egyáltalán nem lezárt fejezete a tudománynak) a következőt tudjuk: 10^{-15}m hatótávolságúak és függetlenek az elektromos töltéstől. A magban kötött nukleonok (protonok és neutronok közös elnevezése) a magerők miatt nagy energiával kötődnek. Ez a kötési energia, amelynek megértéséhez szükséges az *Einstein-féle relativitáselmélet* egyébként kísérletekkel is igazolt tétele. A *tömeg–energia ekvivalencia elv* szerint minden E energiával együtt megjelenik az $m=E/c^2$ összefüggésnek megfelelő tehetetlen tömeg is. Az atommagok esetében ez a *tömegdefektus* néven ismert jelenség úgy érvényesül, hogy az A db. nukleon együttes tömegénél általában jóval kisebb az A tömegszámú atommag tömege. Pl. a hélium esetében ez az eltérés közel egy százalék, amely minden egyes héliummagnál –4,5 pJ energiát jelent! A különböző atommagok egy nukleonra jutó átlagos kötési energiája – E/A – nagymértékben különböző, az 58-as tömegszámú vasra a legkisebb. Ez azt jelenti, hogy a kötési energia itt minimális, tehát ez a legstabilabb elem. A spontán bomló radioaktív elemek α-sugárzás kibocsájtása közben (amely általában együtt jár a β- ill. a γ-sugárzással) egyre közelebb kerülnek a stabil, minimális energiájú állapothoz. Természetesen stabil magok léteznek 58-tól különböző tömegszámmal is, mivel akár a könnyű magok egyesüléséhez *(fúzió),* akár a nehéz magok bomlásához általában nagy energiabefektetés szükséges *(aktiválási energia).*

B) AZ ATOMENERGIA FELHASZNÁLÁSA A nukleáris energia felszabadítására két lehetőség van. Az egyik, hogy a nagy tömegszámú, „nagy" kötési energiával rendelkező nehéz magokat mesterségesen széthasítjuk, és így erősen kötött atommagokat hozunk létre. Ez a maghasadás vagy láncreakció. Erre általában az uránt használják, és a láncreakció folyamatosságát a kilépő neutronok biztosítják. A maghasadással működő reaktorokban, vagy másnéven atomerőművekben a szabályozást a kilépő neutronok lassításával érik el. A nukleáris energia felszabadításának másik lehetősége a magfúzió, azaz a kis rendszámú elemek egyesítése. Termikus aktiválásnak nevezik, amikor az aktiválási energiát a részecskék termikus mozgása biztosítja. A fúziós energiafelszabadításnak ez a ma egyetlen járható útja (10^7 K hőmérséklet), tehát szabályozható, irányított energiatermelésre még nem használható (sajnos a H-bombában már használták!). A csillagok belsejében, ahol a nagy gravitációs nyomás ellensúlyozza a magas hőmérséklettel együttjáró hatalmas nyomást (plazmaállapot, plazmanyomás), ilyen típusú energiatermelés folyik.

Rácz Mihály–Varga Antal

MAGYAR NYELV · MAGYAR IRODALOM · VILÁGIRODALOM · MAGYAR TÖRTÉNELEM · VILÁGTÖRTÉNELEM · MATEMATIKA · FIZIKA · BIOLÓGIA · KÉMIA · FÖLDRAJZ · ANGOL · FRANCIA · NÉMET · OROSZ · SPANYOL

Kiadja az AURA Kiadó, az „Eszteriánc" Diákszövetkezeti Rt. közreműködésével
Második kiadás
Felelős kiadó: Sulyok Miklós

Sorozatszerkesztő: Boldizsár Gábor, Medgyes Péter
Tipográfia: Kóbói Vera
Békéscsabai Konzervgyár Nyomdája
Felelős vezető: Krattinger József

59,– Ft

2. fejezet

Matematika

~~FELADAT MEGOLDÁS~~

BIZONYÍTÁSOK

-INDIREKT:

feltételezzük az állítás ellenkezőjét, majd abból ellentmondásra jutunk

-INDUKTÍV:

1. $n=1$-re BIZ. (BEHELYETTESÍTÉS)
2. feltételezzük n-re
3. BIZ $n+1$-re

Pl: BIZ 1-re, és leírt hogy $(n+1)$-re ~~hogy~~ számított érték hogy viszonyul az $(n+2)$-re számítottól.

Pl: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1. 1-re: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ✓

2.
3. $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

n-re; mivel Σ, ezért a köv. tag. $(n+1)$; $n+1$-re

Ezt bizonyítani!

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+2+3n}{2}$$

$n^2+3n+2 = n^2+3n+2$ ✓ OK

Pl: INDIREKT-re:

$\sqrt{2}$ IRRACIONÁLIS:

TF: $\sqrt{2}$ RAC $\rightarrow \sqrt{2} = \frac{P}{Q}$ (P, Q egész sz. és relatív PRÍMEK)

$2 = \frac{P^2}{Q^2}$ $\quad \frac{P^2}{2} = Q^2$ $\quad$ P^2 OSZTHATÓ 2-VEL $\rightarrow$ P is osztható (mert P egész volt)

$\frac{P}{2} = P_1$ $\quad \frac{4P_1^2}{2} = Q^2$

$2P_1^2 = Q^2$ $\quad \frac{Q^2}{2} = P_1^2$ $\quad$ Q^2 is osztható 2-vel $\rightarrow$ Q is (ugyanezért.)

Mivel P és Q is osztható 2-vel egyszerűsíthetjük vele

-DE AKKOR MÉGSEM RELATÍV PRÍMEK

$\rightarrow$ ELLENTMONDÁS.

Tehát: $\sqrt{2} \neq \frac{P}{Q} \rightarrow \sqrt{2}$ IRRACIONÁLIS

BINOMIÁLIS IZÉK:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

n eleműből hányféle k elemű hány féle képpen?

BINOMIÁLIS TÉTEL:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= 1 \cdot b^n + a\,b^{n-1} + \dots + a^{n-1} b + a^n$$

BIN. EGYÜTTHATÓK: (PASCAL △)

$n=0\ldots$ $\downarrow$; $k=0\ldots \rightarrow$; $k=0\ldots \leftarrow$

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

$\boxed{n.\ \text{SOR}\ k.\ \text{ELEM}}$

a és a $\rightarrow a+b$ - képzése.

ha $(a-b)^n = [a+(-b)]^n$

az előjelek váltakozva fognak, a feladattól függően.

FELHASZNÁLÁS BIZONYÍTÁSRA.

$(a+b)^n + (a-b)^n = ?$

ezek és ezek felírjuk, bizonyos tagok előjele ellentétes kiejtve egymást. csak a maradékkal kell foglalkozni

VALÓS SZÁMOK:

INTERVALLUM:

$[a,b]$ $\quad a \leq x \leq b$ ZÁRT

(a,b) $\quad a < x < b$ NYÍLT

KOMPLEX SZÁMOK $\quad j^2 = -1$

(φ - ARGUMENTUM) $\quad x+y=$

$A+jB = r\cos\varphi + rj\cdot\sin\varphi = r e^{j\varphi}$

ALGEBRAI $\rightarrow$ BEHELYETTESÍT. TRIG. $\rightarrow$ ÁTÍRÁS $\rightarrow$ EULER

$r = \sqrt{A^2+B^2}$ $\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$

MŰVELETEK: $\quad \varphi \hat{=} \varphi + k\pi \quad k \in N$

⊕ $z_1+z_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

⊙ $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2),\ (x_1y_2 + x_2y_1) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

HATV.

$z^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) = r^n e^{jn\varphi}$

$\sqrt{\ }$ $k = 1..n..\infty$

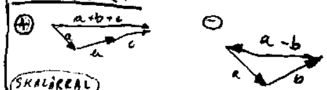
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$

VEKTORALGEBRA

-2 VEKTOR = ha párhuzamosak, hosszuk =, irányuk megegyezik

- egyenlőség. közös kezdőpontba téve (irányuk párhuzamosak, vagy merőlegesek) vizsgálható.

MŰVELETEK



SKALÁRRAL

$k=2$ $\quad \underline{a} \parallel \underline{b}$ ha $\underline{a} = \lambda \underline{b}$

SKALÁRIS SZ.

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cdot \cos\varphi$ (SZÁM)

$=0$ ha MERŐLEGESEK

NEM ASSZOCIATÍV

$(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot c \neq a(b \cdot c)$

VEKTORIÁLIS SZ.

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$ (VEKTOR) JOBBKÉZ SZABÁLY

$(\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a}))$

$|\underline{c}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi \quad |\underline{c}| = T$

VEGYESSZORZAT

$\underline{a}\underline{b}\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ (SZÁM)

általuk kifeszített test térfogata. $=0$ ha 1 síkúak.

BÁZIS: KOORDINÁTARENDSZEREK

3 vektora alkotja

ORTONORMÁL BÁZIS:

a 3 vektor derékszöget zár be. i, j, k - JOBB RENDSZER

$\underline{a}$ vektor: (a_1, a_2, a_3)

⊕ $\underline{a} + \underline{b} = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

⊖ HASONLÓ

SKALÁRRAL SZ.

$\lambda \underline{a} = (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3)$

SKALÁRIS

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

VEKTORIÁLIS SZ. DETERMINÁNSSAL

$D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ $\quad$ FŐÁTLÓ $f = A \cdot D$ $\quad$ MELLÉKÁTLÓ $m = C \cdot B$ $\quad f - m$

1×1 $\quad a \xrightarrow{\text{DET.}} a$

2×2 $\quad f - m$

3×3 EZ A VEKTOROKNÁL (LETAKARNI AZT A SORT ÉS OSZLOPOT, AMIRE MÉZZÜK AMI MARAD ANNAK A DET.)

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

RECIPROK

$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{|z|}$

KONJUGÁLT $z^* = (x, -y) = r e^{-j\varphi} = r(\cos\varphi - j\sin\varphi)$

OSZTÁS: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$

$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

EGYENESEK.

MEGADÁS:

PONT + VEKTOR.

A PARAMÉTERES EGYENLETRENDSZER:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \\ z = z_0 + t\, v_3 \end{array}\right\} \underline{R} = \underline{R}_0 + t\underline{v}$$

$$t = \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

SÍK:

MEGADÁS: PONT + n-VEKTOR (A VEKTOR ⊥ A SÍKRA)

$(\underline{R}-\underline{R}_0)\cdot \underline{n} = 0$ (HESSE-EGYENL.)

Az $R-R_0$ egyenes a síkban van, és merőleges $\underline{n}$-re.

VEKTOREGYENLET:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$(Ax+By+Cz = \underbrace{-D - Ax_0 + By_0 - Cz_0}_{\text{SZÁM}})$

VEKTOR VETÜLETE:

$$v = \frac{(a\cdot b)\, b}{|b|^2}$$

SZÖGEK

- Sík-sík:

$$\cos\varphi = \frac{n_1 n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}$$

- EGYENES-EGYENES:

$$\cos\varphi = \frac{v_1 v_2}{|v_1|\cdot|v_2|}$$

- EGYENES-SÍK:

$$\cos\varphi = \frac{v\cdot n}{|v|\cdot|n|}$$

- VEKTOR-KOORDINÁTA TENGELY

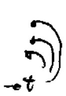
$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} \leftarrow \text{KÖZBEZÁRT}$$

METSZÉSPONT (DÖFÉS):

- EGYENES-SÍK:

Egyenes paraméteres egyenleteit (az egy rendszert) behelyettesíteni a sík egyenletébe → t (megoldva). Ezt vissza az egyenletrendszerbe → x, y, z koordináták

$$x y z = \begin{array}{l} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \\ z = z_0 + t v_z \end{array}$$



$Ax + By + Cz = E \to t$

- EGYENES-EGYENES:

① EGYÁLTALÁN METSZIK E EGYMÁST? (e, f)

- e - n 1 PONTOT KISZEDÜNK: A
- f - ből is: B
- $\overline{AB} = \underline{g}$, $\underline{v}$ - e g irányvektora

[redacted]

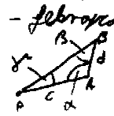
- $\underline{a}$ az e egyenes irányvektora
- $\underline{b}$ az f-é

$- \underline{a} \times \underline{v} = \lambda(\underline{b}\times\underline{v})$?

HA IGEN, AKKOR METSZIK EGYMÁST

② A METSZÉSPONT:

- felbontás:



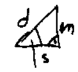
$\overline{AB}$ - hossza $= d$

$\underline{a}, \underline{v}$ szöge $= \alpha$

$\underline{b}, \underline{v}$ szöge $= \beta$

(korábban leírva)

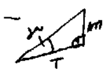
- és tanonság



$m = \sin\mu \cdot d$

$s = \cos\mu \cdot d$

$180 - \alpha = \mu$



$\gamma = 180 - \alpha - \beta$

$T = \operatorname{tg}\gamma \cdot m$

- $C-T$ kivonásával, amit az a távolság, amennyire a metszéspont van az A-tól.

$C = T - S$

- P-PONT KOORDINÁTÁI:

A PONT, - $\underline{a}$ vektor → EGYENES. felírjuk az egyenletrendszert, és behelyettesítjük $t = \frac{c}{|\underline{a}|}$-et. megkapjuk x_p, y_p, z_p-t.

- PONT - EGYENES:

Hogy rajta van-e, koordinátáit behelyettesítjük az

$t = \frac{x - x_0}{p_x}$

$t = \frac{y - y_0}{p_y}$

$t = \frac{z - z_0}{p_z}$ - egyenletekbe. ha mindhárom $t =$ akkor rajta van.

- SÍK-PONT HASONLÓAN.

$A(X - P_x) + B(y - P_y) + C(z - P_z) = 0$

ha teljesül $= 0$ akkor rajta van.

TÁVOLSÁGOK:

- PONT-PONT:

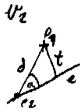
$X_A - X_B = X_d$

$Y_A - Y_B = Y_d$

$Z_A - Z_B = Z_d$

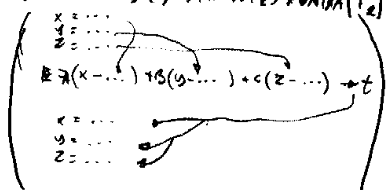
$TÁV = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + Z_d^2}$

- PONT - EGYENES: $(P_1$-pont, e-egyenes$)$
  - AZ EGYENES TETSZŐLEGES PONTJÁT KIVÁLASZTJUK. (PL A MEGADOTT PONTOT) P_2
  - P_1P_2 - távolságot kiszámoljuk (d)
  - P_1P_2 egyenes irányvektora: v_2 (az e egyenesé v_1)
  - v_1 és v_2 szöge $= \alpha$



- t - távolság $= \sin\alpha \cdot d$

- PONT-SÍK. (P_1, S)
  - EGYENEST KÉPZÜNK, aminek pontja a P_1 és irányvektora $\underline{n}$ a sík n-vektora.
  - INNENTŐL EGYENES ÉS SÍK DÖFÉSPONTJA (P_2)



$x = \dots$
$y = \dots$
$z = \dots$

$A(x - \dots) + B(y - \dots) + C(z - \dots) \to t$

$x = \dots$
$y = \dots$
$z = \dots$

- TÁVOLSÁG: P_1, P_2 TÁVOLSÁGA =

$$\begin{array}{l} X_1 - X_2 = X_d \\ Y_1 - Y_2 = Y_d \\ Z_1 - Z_2 = Z_d \end{array} \quad TÁV = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + Z_d^2}$$

- EGYENES - EGYENES (e, f)
  - e irányvektora a, f-é pedig b
  - síkot képzünk: melynek PONTJA f kezdőpontja (megadott pont) és $\underline{n}$-vektora: $\underline{a}\times\underline{b}$
  - e megadott pontja és az így sík távolságát keressük. (fent megadva) (PONT-SÍK TÁV.)
- SÍK-SÍK: (S_1, S_2)

PÁRHUZAMOSAK-E: $\underline{n}_1 = \lambda \underline{n}_2$?

① PÁRHUZAMOSAK: VAN TÁVOLSÁG:
- S_1 és S_2-nek a megadott pontjával. PONT-SÍK távolság. (fent leírva) -

② NEM PÁRH: METSZIK EGYMÁST

→ METSZÉSVONAL: (adott: $S_1 S_2$ $n_1 n_2$ $P_1 P_2$)
- e vonal irányvektora: $\underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$
- képezzük az $\underline{n}_1 \times \underline{v} = \underline{m}$ vektort.
- így felírható a $(P_1, \underline{m})$ egyenes.
- ennek az egyenesnek kell a döféspontja S_2 síkkal → P_3 pont.
- P_3, $\underline{v}$ a metszésvonal.
- EGYENES-SÍK: (e, S)
  - döfi-e? IGEN → 0
  - NEM:

e megadott pontja és sík távolsága: PONT-SÍK

SOROZATOK

- KONVERGENS-E? → HATÁRÉRTÉK ∞-BEN ∞ / NEM.
- MŰVELETEK IGAZAK, KIVÉVE $\frac{a_n}{b_n}$ ha $\lim b_n = 0$
- KISZÁMÍTÁS: ÁTALAKÍTÁSOKKAL $\boxed{\text{CÉLJUK:}}$ $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, \infty \cdot 0$ ELKERÜLÉSE
- POLINOM: $\pm\infty$ MINDIG
- POLINOM / POLINOM:
  - HA KELL KIEMELNI, legnagyobb fokszámú tagot a sz. és a nevező
  - akkor mindkét tagot elosztani a kiemelt
  - ezzel a legnagyobb kitevőjű tag, $n!$...)
  - amit tudunk: ilyen tagok $\frac{a}{n^3} \to 0$

$\frac{a}{b} \to ?$ ha a számlálóban tart ∞-be $\Rightarrow \frac{a}{b} \to \infty$

Ha b gyorsabb $\Rightarrow \frac{a}{b} \to 0$

$\frac{n!}{8^n} \to \infty$ ha $n \to \infty$

- $\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}$ -nál: PROBLÉMA: $\infty - \infty = ?$ EZÉRT

$= \sqrt{P_1} - \sqrt{P_2} \cdot \frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}$

egyszerűsíteni. AKOR IS, HA EGY TÖRT NEVEZŐJE, VAGY SZÁMLÁLÓ

- $\sqrt{\ }$ elhúzás: $\left(\lim_{n\to\infty}\right)$

kiemelni olyat, amiek viszont tudjuk a $\sqrt{\ }$-ét venni, és a másodrendű $\angle 1$ pl:

$\sqrt{6n^2 + 3n} = n\sqrt{6 + \frac{3}{n}} \to n\sqrt{6}$

- $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$ IDE ALAKÍTANI

$\lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{B}{C\cdot n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} A^n \left(1 + \frac{B/CA}{n}\right)^n = A^n e^{\frac{B}{CA}}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+A} = e$ HA A SZÁM.

- $\lim a^b = \lim e^{b \ln a} = \overbrace{\lim b \ln a}^{x}$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ ($\leftarrow a_{n+1}$) $= e^x$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^n = \infty$

- CAUCHY KRITÉRIUM:

a_n konv. ha $a_n, a_m > n_0$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

- RENDŐRELV:

Ha $a_n < b_n < c_n$

és $a_n \to A$

$c_n \to A$ akkor $b_n \to A$

L'HOSPITAL-SZABÁLY: $\lim \frac{a}{b} = \lim \frac{a'}{b'}$

$\left(\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n < \lim_{n\to\infty} c_n\right)$ MINORÁNS, MAJORÁNS

- HÁNYADOS KRIT.

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- $< q < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$
- $> q > 1 \Rightarrow \lim a_n = \infty$
- $= 1$ NEM TUDJUK

- $\sqrt{\ }$ KRITÉRIUM

$\sqrt[n]{a_n}$
- $< q < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$
- $> q > 1 \Rightarrow \lim a_n = \infty$
- $= 1 \Rightarrow ?$

- $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\quad \sqrt[n]{a} \to 1$

- REKURZÍV SOROZATOK (ÁLTALÁBAN a_1-ET MEG KELL)

$a_{n+1} = f_{a_n}$ $\quad \lim a_n$?

$X = f_{(X)} \to X = \lim a_n$

mert $\lim a_n = \lim a_{n-1}$ ...

- HA $\frac{\text{POLINOM}}{\text{POLINOM}}$, ÉS KÜLÖNBÖZŐ FOKSZÁMÚ, AKKOR KI KELL EMELNI, AMIT AZ LEGYEN.

- ÁTALAKÍTÁSI SZABÁLYOK:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a+b)^2$

$a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^2$

- REKURZÍV: (ÁLTALÁBAN MEG KELL) a_{n}... ha $n=1$ ... MEGHATÁROZNI

KELLET $\to$ EXPLICITRE: MAJD KÖVETKEZTETNI A KÉPLETRE.
a_1

SOROK

– KONVERGENS-E

KONVERGENS, HA:
- S_n részletösszegek sorozata ... ig.

$\lim_{n\to\infty} S_n = A$

- Ha $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - S_n = 0$

- q^n - SOR

KONVERGENS, HA: $|q| < 1$

EKKOR $S = \frac{1}{1-q}$ (MÉRTANI SOR)

- $\frac{1}{n^k}$ SOR, HA $k > 1$

(a sorozat már akkor is, ha $k = 1$)

- SZÁMMAL SZORZÁS, VAGY HOZZÁADÁS NEM VÁLTOZTAT JA MEG A KONVERGENCIÁT. (HOZZÁADHATUNK, KIVONHATUNK, OSZTHATUNK ELŐBB)

- SZÜKSÉGES (NEM ELÉGSÉGES) FELTÉTEL:

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

- POZITÍV TAGÚ SOROK KRITÉRIUMAI:

– MAJORÁNS:

$a_n > b_n$, a_n konv $\to b_n$ IS KONV.

– MINORÁNS:

$a_n < b_n$, a_n DIV $\to b_n$ IS DIV.

– RENDŐRELV:

$a_n > b_n > c_n$; a_n, c_n KONV.

b_n IS KONV.

– HÁNYADOS:

HA $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1 \to$ A SOR KONV.

– $\sqrt{\ }$ KRIT:

HA $\lim \sqrt[n]{a_n} < q < 1 \to$ A SOR IS KONVERGENS

- ABSZOLÚT KONVERGENS, HA:

$\sum |a_n|$ – KONVERGENS

KONV $\not\to$ ABS KONV (ÁLTALÁBAN)

ABS KONV. $\to$ KONV.

- FELTÉTELESEN KONVERGENS, HA: KONV. DE NEM ABS KONV.

KONV = FELT $\cup$ ABS.

- VÁLTAKOZÓ ELŐJELŰ SOROKRA:

LEIBNIZ-TÉTEL:

HA $a_k \to 0$ MONOTON $\Rightarrow \sum (-1)^k a_k$ KONV.

(HA A NEM VÁLTAKOZÓ RÉSZ $\to 0$ MONOTON, AKKOR AZ EGÉSZ KONVERGENS)

- SOR TETSZŐLEGESEN ZÁRÓJELEZHETŐ. (+/-) (A KONVERGENCIA NEM VÁLTOZIK) HA ABS KONV

- VIZSGÁLAT ELŐTT NYUGODTAN:
  - KIVONHATUNK SZÁMOT
  - OSZTHATUNK/SZOROZHATUNK SZÁMMAL
  - KIVONHATUNK KONVERGENS TAGOT (SPEC...)
  - OSZTHATUNK (NEM A SOROZSZEBÜ) KONVERGENSNEK ISMERT TAGGAL.

- +NÉG: INTEGRÁL KRITÉRIUM (+TAGÚ)

$a_n \triangleq f_{(x)}$

$\int_{x_0}^{+\infty} f_{(x)}\,dx = ?$ $\to$ HA $< \infty \Rightarrow$ KONVERGENS

- CAUCHY SZORZAT (MIRE JÓ??...)

$a_n \otimes b_n = c_n$

c_n: OLYAN TAGOK ÖSSZEGE, hinek mindegyike 1 a tag és 1 b tag szorzata, ahol az a és a b indexeik összege az ő sorsnyodik tagja C sorozatnak

$c_n = a_p \cdot b_q + \ldots$ $\quad p+q = n = j+k \ldots$

$+ a_j b_k + \ldots$

FÜGGVÉNYEK

- EXPLICIT ALAK $f_{(x)} = \ldots$ $\quad f_{(x)} = \sqrt{1-x^2}$
- IMPLICIT ALAK $\varphi(x,y)$ $\quad y^3 + x^2 + 1 = 0$
- $[x]$ egészrész $\quad \{x\}$ – törtrész
- DIRICHLET FÜGGV: 1 ha x RAC, 0 ha IRRAC
- INVERZ f: HA $f_{(x)} = y \to f^{-1}_{(y)} = x \overset{\text{CSERE}}{\Longleftrightarrow} f^{-1}_{(x)} = y$
- PÁROS, HA $f_{(x)} = f_{(-x)}$

PÁRATLAN, HA: $f_{(x)} = -f_{(-x)}$

PERIODIKUS, HA $f_{(x)} = f_{(x + n\cdot p)}$

- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $\quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

- NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax}$ $\quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- 1 OLDALI HATÁRÉRTÉK:

Függvényt helyettesíteni oszlop, ami ozon az oldalon alapon, ahol az eredeti, és ahhoz vesszük a HATÁRÉRTÉKET

PL: ABSZ. ÉRTÉK, EL eltüntethető/helyettesíthető előjellel adott tartományon.

• FOLYTONOSSÁG:

A) PONTBAN: $\lim_{x\to x_0} f_x = f_{x_0}$ VAGY: (BAL ÉS JOBB) Ha a 2 OLDALI HATÁRÉRTÉK = és ∃.

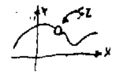
ELEMI FÜGGVÉNYEK folytonosak az értelmezési tartományukban.

(pl $\frac{1}{x}$ -0-ban nem, de az nem eleme ÉT.-nak)

B) SZAKADÁS

ITT A FÜGGVÉNY NEM FOLYTONOS

1. MEGSZÜNTETHETŐ (ÉRTÉKMEGADÁSSAL)



HA A HATÁRÉRTÉKET ADJUK MEG ÉRTÉKKÉNT ABBAN A PONTBAN

2. LÉNYEGES SZ. (RITKA) Ha ott nincs határértéke. UGRÁS

3. ELSŐFAJÚ: HA itt ∃ bal és jobb HAT. ÉRT. MEGSZÜNTETHETŐ / UGRÁS (=/NEM)

4. MÁSODFAJÚ: EGYIK OLDALI NEM LÉTEZIK. VAGY ∞ (UGRÁS)

C) INTERVALLUMBAN FOLYT.

- Ha minden pontjában az (ZÁRT INTERVALLUM: A VÉGPONTOKBAN IS)
- 2 felvett f. érték között minden értéket felvesznek (BOLZANO)
- MINDEN ilyen függvény KORLÁTOS IS (WEIERSTRASS)
- EGYENLETESEN FOLYTONOS, Ha x véges (kis) megváltozásához véges (kis) y változás tartozik. (sehol sem végtelen a meredekség)

DERIVÁLT

• 1 PONTBAN: meredekség

$$tg\alpha = \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h} = f'_{(x)} \text{ (PONTBAN)}$$

DIFF. HATÓ: $f_x \in D_{(a,b)}$ HA ∃ létezik + FOLYTONOS

• DIFF. SZÁMÍTÁS: SZABÁLYOK

$(c\, f_{(x)})' = c\, f'_x \qquad (f_x \pm g_x)' = f'_x \pm g'_x$

$(f_x \cdot g_x)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f_x}{g_x}\right)' = \frac{f'_x g_x - f_x g'_x}{g^2}$

$\left(\frac{1}{f_x}\right)' = \frac{-f'_x}{f_x^2} \qquad f_{g_{(x)}}' = f'_{(g_{(x)})} \cdot g'_x$

(pl $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$)

INVERZ FÜGGV: (TÜKR. $y=x$-re)

$$\left(f^{-1}_{(x)}\right)' = \frac{1}{f'_{(f^{-1}_{(x)})}}$$

BEHELYETTESÍTENI / BEHELYEZNI

(pl: $f_x^{-1} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $f_x = x^2$, $f'_x = 2x$, $(f_x^{-1})' = \frac{1}{2\cdot(\sqrt{x})}$)

• ALAPFÜGGVÉNYEK: $e^{-x} \to -e^{-x}$

$x^n \to n x^{n-1} \qquad e^x \to e^x \qquad \ln x \to 1/x$

$1/x \to -1/x^2 \qquad \sin x \to \cos x \qquad \cos x \to -\sin x$

$tg x \to \frac{1}{\cos^2 x} \qquad ctg x \to \frac{-1}{\sin^2 x} \qquad a^x \to a^x \ln a$

$\log_a x \to \frac{1}{x \ln a}$

$(a^b)' = \underbrace{a^b \ln a \cdot b'}_{a^x \text{ ALAK}} + \underbrace{b \cdot a^{b-1} \cdot a'}_{x^n \text{ ALAK}}$

$\arcsin x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x \to \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad arctg x \to \frac{1}{1+x^2} \qquad a^b = e^{b \ln a}$

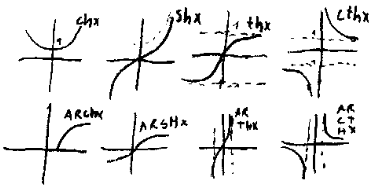
$arcctg x \to \frac{-1}{1+x^2} \qquad \frac{1}{ax+b} \to -\frac{1}{(ax+b)^2}$

$sh x \to ch x \qquad ch x \to sh x \qquad th x \to 1/ch^2 x$

$cth x \to -\frac{1}{sh^2 x}$

$arsh x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad arch x \to \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$arth x \to \frac{1}{1-x^2} \qquad arcth x \to \frac{1}{1-x^2}$



• DIFFERENCIÁLHATÓSÁG:

1 PONTBAN: BAL OLDALI DERIV. = JOBB OLDALI DIFF. FÜGGVÉNY OTT FOLYTONOS + AZ ERREDETI FÜGGV. IS FOLYTONOS.

(∃ ÉRINTŐ)

$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_x}{h}$

• KÖZÉPÉRTÉK TÉTELEK:

ROLLE:

ha $f_a = f_b \Rightarrow \exists c,\ a < c < b$, hogy $f'_c = 0$

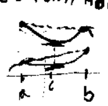
LAGRANGE

ha $\frac{f_b - f_a}{b-a} = \mu$ $\exists c,\ a < c < b$, hogy $f'_{(c)} = \mu$

CAUCHY:

Ha van f_x, $g_{(x)}$ a, b pontok.

∃ c PONT, HOGY: $\frac{f'_{(c)}}{g'_{(c)}} = \frac{f_b - f_a}{g_b - g_a}$



• TAYLOR POLINOM

Ha f(x) helyettesíthető x_0 környezetében: (GÖRBÜLET, KONVEXITÁS, ...)

$$T_{n(x)} = f_{(x_0)} + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x-x_0) + \frac{f''_{x_0}}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$$

Ez n-ed fokú

HIBA:

$$R_{n(x)} = f_{(x)} - T_{n(x)} = \frac{f^{(n+1)}_{(x_0)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

n-szer DIFF-ható kell legyen!

($R_n \to 0$ ha $n \to \infty$)

• TELJES FÜGGVÉNY VIZSGÁLAT:

- ZH. Y METSZÉK
- D - ÉT, R - ÉK. (SZÉLSŐ ÉRTÉKből)
- MONOTONITÁS $f' \gtrless 0$?
- KONVEXITÁS

 $f'' > 0$ KONVEX $\quad f'' < 0$ KONKÁV

- INFLEXIÓS PONT

 $f'' = 0$ + előjelet vált. KONVEX-KONKÁV-váltás (ELŐTTE/UTÁNA MILYEN?)

- SZÉLSŐÉRTÉK:

 LOK MAX: $f' = 0,\ f'' < 0$ $\qquad$ LOK MIN: $f' = 0 \quad f'' > 0$

- lim $\pm\infty$-ben, PÓLUSHELYEKNÉL.

 GLOB. SZÉLSŐÉRTÉK (LEGNAGYOBB stb...)

- ASSZIMPTÓTA: $\pm\infty$-ben. (PONTBAN: FÜGGŐLEG.)

 $ax + b$ -re

 $a = \lim_{x\to\infty} f'_{(x)} \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f_x - a \cdot x)$

GÖRBE PARAMÉTERES EGYENLETE:

KÖR: IMPLICIT: NEM ZÁRT GÖRBE

$x^2 + y^2 = R^2$

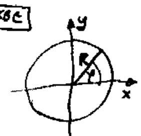
EXPLICIT:

$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

PARAMÉTERES:

$x = R\cos\varphi$ $\quad \varphi$ - PARAMÉTER

$y = R\sin\varphi$

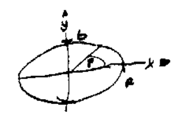


ELLIPSZIS:

IMP: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

PAR: $x = a\cos\varphi$

$y = b\sin\varphi$

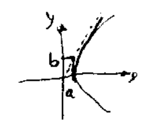


HIPERBOLA:

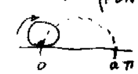
IMP: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

PAR: $x = a\, ch t$

$y = b\, sh t$



CIKLOIS: (PONT PÁLYÁJA)



PAR: $x = a(t - \sin t)$

$y = a(1 - \cos t)$

ÁTALAKÍTÁS:

• EXP → PAR.

A görbét 1 segédváltozós függvényekkel írjuk le (ilyenkor csak az új változó, és 1 régi szerepel 1 egyenletben (pl x, t, ...))

pl szög

SPECIÁLIS ESET: $x = t$

EKKOR $y = f_{(t)}$ és $x = t$

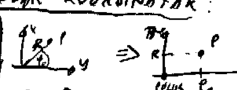
• PAR. → EXP.

Ha $x = x_{(t)}$ és $y = y_{(t)}$

Ebből $t = t_{(x)}$ ($x_{(t)}$ INVERZE)

$y = y_t = y_{(t_x)}$ - BEHELYETTESÍTEM, $y_{(t)}$-BA $x_{(t)}$ INVERZÉT.

POLÁR KOORDINÁTÁK:



(PERIÓDIKUS)

$r = R_{(\varphi)}$ - a görbe egyenlete

DERIVÁLÁS:

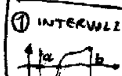
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}_{(\varphi)}}{\dot{x}_{(\varphi)}} = \frac{R'_{(\varphi)}\sin\varphi + R_{(\varphi)}\cos\varphi}{R'_{(\varphi)}\cos\varphi - R_{(\varphi)}\sin\varphi}$$

PARAMÉTERES EGYENLET DERIVÁLTJA:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\dot{y}_{(t)}}{\dot{x}_{(t)}}\right|_{t=t_0}$$

EGYENLET GYÖKEINEK KÖZELÍTŐ MÓDSZ.

① INTERVALLUM FELEZÉSE HA $f_b > 0$ $f_a < 0$



CSAK HA FOLYTONOS

- intervallum melyik felében van a c?:

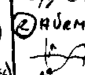
A közepén $f_{(\frac{a+b}{2})} > 0$?

Ha > 0 akkor alsó felében

Ha < 0 akkor felső felében van.

Így tovább egy darabig. HIBA $= \pm\, a^x - b^x$ (ÚJ HATÁROK)

② HÚRMÓDSZER:



- $\overline{AB}$ egyenes HOL METSZI AZ X tengelyt?
- ott $f_{(x)} >$ vagy < 0 → JOBBRA VAN. (x_0) → BALRA VAN

helyettesíteni kell:

$\sin t = \frac{2ax+b}{\sqrt{D}}$

$\operatorname{sh} t = \frac{2ax+b}{\sqrt{D}}$

az előzőekben leírva.

HA SEMMIRE SEM HASONLÍTÓ TÖRT VAN: $\frac{\alpha}{\beta}$

→ AKKOR A SZÁMLÁLÓT ÁT KELL ALAKÍTANI:

$\alpha = A\cdot\beta + \gamma\cdot\beta$

így $\frac{\alpha}{\beta} = A + \gamma$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS

adott

$\int f_{(x)}\,dx$ $\left[\begin{array}{l} x = f(t) \\ g(x) = t \text{ a helyettesítés} \end{array}\right.$ t-re $f_{(x)} = c \circ g_{(x)}$

$g_{(x)}$ BÁRMILYEN KIFEJEZÉS LEHET

felírjuk: mindkét oldalt (az egyikből a másikat az egyik a helyettesítés, a másik a visszahelyettesítés)

kell $dx = (\varphi_{(t)})'$ elvégezni:

...

$dx = \alpha \cdot dt$ α-KIFEJEZÉS

$\int f_{(x)}\,dx = \int f_{(\varphi_{(t)})}\cdot\alpha\cdot dt$

ezt megoldani, majd visszahely.

PÉLDÁK:

- $\int R(x^n, \sqrt{1+ax})\,dx \to ax = \operatorname{sh}^2 t$, $x = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{a}$
  $\to \int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$
  $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
  Ha a racionálisban van $\sin x, \cos x$
- $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \to t = e^x$ $\operatorname{sh} x = \frac{t-1/t}{2}$
  $dx = \frac{1}{t}dt$ $\operatorname{ch} x = \frac{t+1/t}{2}$
- $\operatorname{ch} x = \frac{1}{1+t^2}$ $\operatorname{sh} x = \frac{t^2}{1+t^2}$?
  $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2}$
- $\int (ax+b)^n \to ax+b = t$
  $\to = \frac{1}{a}\int t^n\,dt$

ANOL X-VAN: dX, AHOL $f(x)$: $f(x)\cdot dt$

- $\int R(e^x) \to e^x = t$ $x = \ln t$ $dx = \frac{1}{t}dt$
- $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ $t = \sqrt[n]{ax+b}$
  x kifejezni, de a négyzetgyök van egyszerűsítést
- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ → x-et kif.
  nagyon bonyolult, majd egyszerűsítés
- $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) \to R\left(x, \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$,
  $\sin t = \frac{x}{a}$

HATÁROZOTT INTEGRÁL:

$\int_a^b f_{(x)}\,dx = F_{(b)} - F_{(a)} = F\Big|_a^b$

(NEWTON-LEIBNIZ)

ESETENKÉNT DARABOKRA KELL OSZTANI A FÜGGVÉNYT ha $\pm\infty$

$\int_a^b f_{(x)} = -\int_b^a f_{(x)}$

IMPROPRIUS INTEGRÁL: →KONVERGENS →DIVERGENS

Határozott integrál, aminek 1ik végpontja → VÉGTELEN VAN, VAGY OTT $F_x = \pm\infty$

Ha mindkét vége ilyen: valahol szétszedni kell határtól és külön vizsgálni. ~~VÉGTELEN~~ VAGY VÉGTELEN

$\int_{x_0}^{\infty} f_x\,dx = F_\infty - F_{x_0}$,

$F_\infty = ? = \lim_{x\to\infty} F$

Ha $\int_{-\infty}^{\infty} f_x\,dx \Rightarrow = \int_{-\infty}^{x_0} f_x\,dx + \int_{x_0}^{\infty} f_x\,dx$

Ha $f_{(x)}$ x_0-ban $=\infty$:

$\int_{x_0}^{x_{00}} f_{(x)} = F_{(x_{00})} - \lim_{x\to x_0} F_{(x)}$

1 OLDALI HATÁRÉRTÉK!

ÍVHOSSZ:

$l = \int_a^b \sqrt{1+(F')^2}$

TERF: (GÖRBÉT MEGFORGATJUK X KÖRÜL)

$V = \pi\int_A^B f_{(x)}^2\,dx$

FELSZÍN

$A = 2\pi\int_a^b |f_x|\cdot\sqrt{1+(f_x')^2}$

2 GÖRBE ÁLTAL LEZÁRT SÍKRÉSZ:

$T = T_1 - T_2 = F\Big|_a^b - G\Big|_a^b$

- $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \to R(x, \sqrt{x^2+A})$
  $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
  ebből egy olyan alakítható négyzetté: $(a+b)^2+A$ .....
  $\frac{a+b}{A^2} = \sin t$

DIFFERENCIÁL EGYENLETEK

$y' = f_{(x)} + C$ $(y' = f_{(x)})$ konkrét

- RENDSZÁM / RENDŰSÉG: hányadik a legmagasabb derivált.
- KÖZÖNSÉGES: 1 változós
- HA több változó van, és 1 egyenlet: akkor csak az 1ik a változó, a többi szám.
- fajták: • EXPLICIT $y' = f_{(x,y)}$
  • IMPLICIT $F_{(x,y,y')} = 0$

- MEGOLDÁS:
  • általános: nincs benne a kezdeti feltétel, ~~...~~ (rögzített pont, függőleges eltolás)
  • PARTIKULÁRIS: BENNE VAN MÁR
- kezdeti feltétel (érték) (C)
  $y_{(x_0)} = y_0$ (RÖGZÍTETT PONT)
  EZT ELŐÍRJÁK (DE HONNAN?)
  Ha $y' = ax + b$ →
  $0 = ax_0 + b$ megoldása x_0-ra;

- MEGOLDÁS:

• EGYSZERŰ FELADAT:

$y' = f_{(x)}$ $f_{(x)}$-ET $\int$-NI kell.

$y_{(x)}$ FÜGGVÉNYT KAPJUK

$y_{(x)} = \int f_{(x)} + C$ C a kezdeti ért.

• SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ: (2 változós)

$y' = P_{(x)} Q_{(y)}$ ALAKRA HOZHATÓ algebrai átalakítással.

$P_{(x)}$ és $Q_{(y)}$ PRIMITÍV FÜGGVÉNYEIT felírjuk, majd a felírt:

$\int P_{(x)}\,dx = \int Q_{(y)}\,dy$ egyenletből átalakítással.

$F_{(x)} + G_{(y)} = C_1 + C_2$

y-t kifejezzük:

$y = h_{(x)} + B$

kezdeti feltétel megadásával B is kiszámolható.

• ELSŐRENDŰ LINEÁRIS DIFF EGYENLET

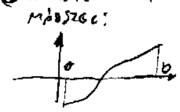
$y' = ay + b$

Megoldása a) HOMOGÉN (SZABAD ÖSSZETEVŐ)
b) INHOMOGÉN PARTIKULÁRIS $(x_{\epsilon} + x_g)$

$y_{(x)} = e^{-ax}$ + KEZDETI FELTÉTEL

$0 = ay_0 + b \to y_0$

③ NEWTON RAPHSON (ÉRINTŐ) MÓDSZER:



- először $f'_{(a)}=?$ ÉRINTŐ IRÁNYTANG.
- érintő egyenlete?
- érintő hol metszi x tengelyt? (x_0)
- ott f_x? (ELÉG KÖZEL VAN-E 0-HOZ?)
- a megkapott x_0 pontban újra az egész.
- addig, amíg elég pontos nem lesz. (az új pontokban érintő, az hol metszi x tengelyt. ott újra érintő...)

FÜGGVÉNYÉRTÉK MEGHATÁROZÁS

HORNER féle elrendezés.

$f_{(x)}=P_{n(x)} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

EBBŐL:

$(((\dots(a_n)x+a_{n-1})x+a_{n-2})x\dots)+a_0$

KELL.

...

KÉPLET-ÁTALAKÍTÁSOK:

$\sin^2x+\cos^2x=1$ $tgx\cdot ctgx=1$

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}=(tgx)'$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac12\sin2\alpha$

$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$ $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$

$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$ch^2x-sh^2x=1$

$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ $\cos^2\frac x2=\frac{1+\cos x}{2}$

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

SZABÁLYOK: $\int f_x = F_x$

$\int (f_{(x)}\pm g_{(x)}) = F_{(x)}\pm G_{(x)}$ $\int c f_{(x)} = c\int f_{(x)}$

$\int f_{(ax+b)} = \frac{F_{(ax+b)}}{a}$ ax+b-vel (egyszerűbb) változóként kezeljük.

$\int\frac{f'_{(x)}}{f_{(x)}}=\ln|f_{(x)}|$ pl. elsőfokú lin. kifejezések esetén, feltétel szám -15.

$\int f'_{(x)}\cdot f^n_{(x)}=\frac{f^{n+1}_{(x)}}{n+1}$ pl: $\int\cos x\sin^3x=\frac{\sin^4x}{4}$

ALAPINTEGRÁLOK: $f_{(x)}\to F_{(x)}+C$

$x^n\to\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\frac1{\cos^2x}\to tgx$ $\frac{1}{1-x^2}$ ARTHX ha |x|<1, ARCTHX ha |x|>1

$a\to ax$ $\frac{1}{\sin^2x}\to -ctgx$ $tgx\to -\ln|\cos x|$

$1/x\to\ln|x|$ $shx\to chx$ $tg^2x\to tgx-x$

$e^x\to e^x$ $chx\to shx$ $\ln x\to x\ln x - x$

$a^x\to\frac{a^x}{\ln a}$ $\frac{1}{ch^2x}\to thx$

$e^{-x}\to -e^{-x}$ $\frac{1}{sh^2x}\to -cthx$

$\sin x\to-\cos x$

$\cos x\to\sin x$ $\frac{1}{1+x^2}\to arctgx$

FELSZABÁS: $\int\frac{f'_{(x)}}{f^n_{(x)}}=\int f'_{(x)}\cdot f^{-n}_{(x)}$ n lehet (−) is

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS: KELL: f, és g'

$\int f'_{(x)}g_{(x)}=f_{(x)}g_{(x)}-\int f_{(x)}g'_{(x)}$

FAJTÁK:

$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{\sin bx}{b}-\int a e^{ax}\cdot\frac{\sin bx}{b}$

TOVÁBB: $=e^{ax}\frac{\sin bx}{b}-\frac ab\left(e^{ax}\frac{-\cos bx}{b}-\int a e^{ax}\cdot\frac{-\cos bx}{b}\right)$

a szorzótényezővel elhelyezett rész $-\frac ab$-szer a bal oldal. - MINDKÉT OLDALBÓL KIVONJUK EZT. A BAL OLDALON $(1+\frac{a}{b})$ szorzó marad. EZZEL ELOSZTJUK A JOBB OLDALT. KÉSZ.

• $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ → HASONLÓAN (2X PARC. INT.)

• $\int e^{x}P_{n(x)}dx=?$ A POLINOMOT egyben kezeljük. ($f'_{(x)}$, $g_{(x)}$) 2X PARC. INT.

Maradékban is az e^{ax} lesz az f'. TÖBBSZÖR PARC. INT. így a polinom végül számokká redukálódik. Sima szorzó marad $a\cdot\int e^{bx}$ + a számok egyszerűbb, amiket kell integrálni.

• $\int\sin ax\cdot P_{n(x)}$ (f', g) TÖBBSZÖR PARC, míg a POLINOM számmá redukálódik.

• $\int\cos ax\cdot P_{nx}$ HASONLÓAN

• $\int\ln \to =\int1\cdot\ln x$ EZT PARCIÁLISAN

• $\int P_{nx}\cdot \arccos x$ g-BŐL TÖRT LESZ.

(f'; g: arc sin x, arc tg x, arc ctg x, ar sh x, ar ch x, ar th x, ar cth x)

MARAD ... $\int P_{nx}\frac{Q_{nx}}{R_{nx}}$ EZT RAC. TÖRTFÜGGVÉNY SZERINT

arcsin/cos ar sh/ch - nél $\sqrt{\ }$ lesz.

• $\int\arcsin x=\int1\cdot\arcsin x$

$\int\arccos x$ f' g

$\int arctg x$ INT. DERIV: TÖRT

$\int arcctg x$ x

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY $\int\frac{P_{nx}}{Q_{nx}}$

Jól kell bontani elemi törtek összegére.

• A számlálónak kevesebb fokúnak kell lennie mint a nevezőnek. HA NEM ilyen, akkor fel kell bontani:

$A+\frac{R_{n(x)}}{Q_{m(x)}}$ $A=\lim_{x\to\infty}\frac{P_{nx}}{Q_{nx}}$

$\frac{R_{nx}}{Q_{nx}}=\frac{P_{nx}}{Q_{nx}}-A$

• A FELBONTÁS:

$\frac{P_{nx}}{Q_{nx}}=\frac{A}{(x-P_1)}+\frac{B}{(x-P_2)}+\frac{C}{(x-P_3)}$

x_1, x_2 ... EGYENLET MEGOLDÁSSAL.

TEHÁT

$P_{nx}=A(x-P_2)(x-P_3)+B(x-P_1)(x-P_3)+C(x-P_1)(x-P_2)$

FELBONTANI. AMIT KAPUNK: $ax^2+bx+c = dx^2+ex+f$,

ahol d, e, f A, B, C - k-ból, és a pólusokból illetve egyszerű képletek

$a=d$, $b=e$, $c=f$ felírható

a b c adott számok: 3 egyenletet kapunk. → EBBŐL A,B,C

Így már felírható a képlet:

$\frac{A}{x-P_1}+\frac{B}{x-P_2}+\frac{C}{x-P_3}$

Ezeket külön integrálni.

$\int\frac{A}{x-P_1}=A\int\frac{1}{x-P_1}$ Mivel $\int\frac{f'}{f}$ szerint $=A\ln|x-P_1|+C$

• HA TÖBBSZÖRÖS PÓLUSOK VANNAK:

$\frac{P_{n(x)}}{(x-P_1)(x-P_2)^2}=\frac{A}{x-P_1}+\frac{B}{x-P_2}+\frac{C}{(x-P_2)^2}$

alakot kell felírni.

itt $P_{n(x)}=A(x-P_2)^2+B(x-P_1)(x-P_2)+C(x-P_1)$

mert a közös nevező: $(x-P_1)(x-P_2)^2$

(TOVÁBB: FELBONTÁS, a=d, b=e... majd egyenletrendszer)

• ELEMI TÖRTEK $\int$-JA:

$\int\frac{A}{x-P}dx=A\ln|x-P|+c$

$\int\frac{A}{(x-P)^n}dx=-\frac{A}{(n-1)(x-P)^{n-1}}+c$ ITT IS KELL

$\int\frac{Ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ HA NINCS VALÓS GYÖKE A NEVEZŐNEK, AKKOR ILYEN TAGJA IS LESZ A FELBONTÁSNAK.

- Ez felbontható lesz $\int\frac{Ax}{(\dots)^n}+\int\frac{b}{(\dots)^n}$

...

RAC TÖRTEKRE VISSZAVEZETHETŐ $\int$-ok:

• $\int R(\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x})dx=\int R(t^{\frac kn},t^{\frac km})\frac{1}{\frac1k}t^{k-1}dt$

k: n és m legkisebb KÖZÖS TÖBBSZÖRÖSE

$x=t^k$ helyettesítéssel

IGY SIMA $\frac{P_{nt}}{Q_{nt}}$-et kapunk (mert k>m,n)

• $\int R(\sin x,\cos x)$ helyettesítani: $t=tg\frac x2$

CSAK HA A TÖRT NEVEZŐJÉBEN VAN A SIN, COS, (MERT AKKOR A $1+t^2$-es részt kiegyszerűsíti)

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

• $\int R(e^x)dx$ $t=e^x$ $x=\ln t$ $dx=\frac1t dt$ helyettesítéssel.

MARAD $\int R_{(t)}\frac1t$ ez már $\frac{P_{nt}}{Q_{nt}}$

• $\int R(shx, chx)dx$ HELYETTESÍTENI:

$t=e^x$ (na mindenesetre)

$dx=\frac1t dt$ $shx=\frac{t-1/t}{2}$ $chx=\frac{t+1/t}{2}$

SZÁMLÁLÓ+NEVEZŐ minden tagját megszorozzuk t-vel, így 1/t-k eltűnnek. MARAD $\frac{P_{n(t)}}{Q_{n(t)}}$

• $\int R(\sqrt{P_{nx}})dx$

VEKTORTEREK

VEKTOROK — HALMAZOK

(HALMAZ: AMINEK ELEMEIRE MEGADOTT TULAJDONSÁG IGAZ, AZ ELEMEK: A KIS BETŰK)

$(a, b, c, \ldots)$

MŰVELETEK:

- ÖSSZEADÁS
- KONSTANSSAL SZORZÁS

v vektor V-vektortér

V- VEKTORTÉR, (V-halmaz) HA AZ ELEMEIRE A MŰVELETEK EREDMÉNYEI BENT MARADNAK A VEKTORTÉRBEN (HALMAZBAN) (TULAJD. MEGMARAD)

MŰVELETEK TULAJD.:

(+) KOMMUTATIVITÁS

$\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$

ASSZ:

$(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$

0-VEKTOR VAN: $(\bar{o})$

$\bar{o}+\bar{u}=\bar{u}$

ADDITÍV INVERZ VAN:

$\bar{u}\to-\bar{u}$

$-\bar{u}+\bar{u}=\bar{o}$

(·λ) ASSZ

$c_1 c_2 \bar{u}=(c_1 c_2)\bar{u}=\ldots$

DISZTR

$c(\bar{u}+\bar{v})=c\bar{u}+c\bar{v}$

$\exists\, 1$

$1\cdot\bar{u}=\bar{u}$

T) CSAK 1 ADDITÍV INVERZ VAN.

(INDIREKT)

$\exists\, \bar{u}_1\, \bar{u}_2 : \bar{u} \to \bar{u}_1, \bar{u}_2$

$\left.\begin{array}{l}\bar{u}+\bar{u}_1=0\\ \bar{u}+\bar{u}_2=0\end{array}\right\}$ TUDJUK

$(\bar{u}+\bar{u}_1)+\bar{u}_2=\bar{o}+\bar{u}_2=\bar{u}_2$

$(\bar{u}_2+\bar{u})+\bar{u}_1=\bar{u}_1=\bar{o}+\bar{u}_1$

MINDKÉT EGY. AZ ASSZOC. MIATT:

$\bar{u}+\bar{u}_1+\bar{u}_2=\bar{u}_2$

$\bar{u}+\bar{u}_1+\bar{u}_2=\bar{u}_1$

BAL OLD. = ⇒ JOBB OLD. IS

T)

$c\cdot\bar{o}=\bar{o}$

$0\cdot\bar{u}=\bar{o}$

$0\cdot\bar{u}=\bar{o}=\bar{u}+(-\bar{u})$

$\bar{o}=0\bar{u}+(-0\cdot\bar{u})$

$(0+0)\bar{u}+(-0\bar{u})$

$(0\bar{u}+0\bar{u})+(-0\bar{u})$

$0\bar{u}+(0\bar{u}+(-0\bar{u}))$

$0\bar{u}+\bar{o}=0\bar{u}$

$0(\bar{u}+-\bar{u})=\bar{o}$

T) $\bar{u}+\bar{u}=2\bar{u}$

$1\cdot\bar{u}+1\cdot\bar{u}=2\bar{u}$

$(1+1)\bar{u}=2\bar{u}$

$2\cdot\bar{u}=2\bar{u}$

ALTÉR

V - nek W ALTERE, (részhalmaz, a vektoraiból, néhány vektor az eredetiből)

HA W IS VEKTORTÉR. (teljesül rá: ⊕, ⊙)

2 ELEM LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA IS [illegible] vektortér

LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ

$c_1\bar{v}_1+c_2\bar{v}_2+\cdots c_n\bar{v}_n=\bar{w}$

LIN. FÜGGETLENSÉG:

VEKTOROK LIN. FÜGGETLENEK, HA A (NEM TRIVIÁLIS: $0\cdot v_1+0\cdot v_2$) LINEÁRIS KOMBINÁCIÓIK KÖZÜL EGYIK SEM $\bar{o}$

TEHÁT

$\forall\, c_1, c_2 \ldots c_n$:

$c_1\bar{v}_1+c_2\bar{v}_2\cdots c_n\bar{v}_n\neq\bar{o}$

EGYÉBKÉNT: LIN. ÖSSZEFÜGGŐEK

FÜGGETLENEK?

$c_1 v_1+c_2 v_2+\ldots c_n v_n=\bar{o}$

$c_1 z_1+c_2 z_2 \cdots c_n z_n=\bar{o}$

EGYENLETRENDSZER.

ANNYI EGYENLET, AHÁNY VEKTOR.

vektorok számokkal adottak: $c_1 \ldots c_n$ ISMERETLEN

- MINDIG CSAK ANNYI VEKTORRA, AHÁNY DIMENZIÓS A TÉR

T) HA V-BEN VAN $\bar{o}$ VEKTOR: V elemei nem LIN. FÜGGETLENEK

B) $1\cdot v_j+0\cdot v_k+0\, v_m=0$

HA $v_j=\bar{o}$ TEHÁT $=0$, és ez nem triviális LIN.K. ezért; NEM LIN FÜGGETLENEK

T) HA VAN Z = VEKTOR: AKKOR NEM L. FÜGGETLENEK

B) $c_1=1 \quad c_2=-1 \quad 0 \quad v_1=v_2$

$1\cdot v_1+-1\cdot v_2+0\cdot v_3\cdots=0$

T) HA $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_2$ NEM FÜGGETLEN, ÉS HOZZÁCSAPOM $\bar{w}$-T: EZ SEM FÜGGETLEN.

B) PL: $c_1\bar{v}_1+\ldots c_k\bar{v}_2+0\cdot\bar{w}=\bar{o}$ MARAD. VOLT

T) $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_i$ LIN FÜGGETLEN. $\forall\, v_i$ ELHAGYÁSÁVAL AZ MARAD

B) INDIREKTEN...

T) $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_k$ ÖSSZEFÜGGŐEK, HA $v_i \in \{\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_k\}$ -ra igaz:

$v_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} c_j\bar{v}_j$ (v_i = LIN KOMB. A TÖBBINEK)

B) $c_1 v_1+\cdots c_k v_k=\bar{o}$ (FÜGGŐEK)

$c_2 v_2+\cdots c_k v_k=-c_1 v_1$

$v_1=-\frac{c_2}{c_1}v_2+-\frac{c_3}{c_1}v_3+\ldots-\frac{c_k}{c_1}v_k$

TEHÁT v_1 LIN KOMB: $v_2 \ldots v_k$

GENERÁTOR VEKTORRENDSZER V-BEN: $\{v_1 \ldots v_k\}$

V tér GENERÁTORA, HA $\forall\, v_j \in V$ -re igaz: (bármely v_j)

v_j = LIN KOMB $(v_1 \ldots v_k)$

BÁZIS

1 VEKTORRENDSZER, HA Ő

- GENERÁTOR ÉS (AZ Ő LINK. → V BÁRMELY EL.)
- LIN FÜGGETLEN.

Tehát vele elő lehet állítani V bármely elemét egyértelműen

T) GENERÁTORBÓL MINDIG KIVÁLASZTHATÓ 1 BÁZIS

B)

- V generátor, de van benne 1 LIN FÜGGŐ: $v_1=c_2 v_2+\ldots c_k v_k$
- v_1 - et elhagyjuk: GENERÁTOR MARAD
- ADDIG SELEJTEZÜNK, AMÍG VAN MIT. A MARADÉK LIN. F. ÉS GENERÁTOR → BÁZIS

T) HA n VEKTORBÓL ÁLLÓ BÁZIS VAN, AKKOR $m>n$ vektor NEM LIN. FÜGGETLEN

B) INDIREKT:

T) HA VAN n ELEMŰ BÁZIS, AKKOR MINDEN MÁS BÁZIS IS n ELEMŰ

ITT n A TÉR DIMENZIÓJA $n=\dim V$

n-EDFOKÚ POLINOM $n+1$ DIMENZIÓS TÉR ELEME

T) n DIMENZIÓS TÉRBEN n DARAB VEKTOR BÁZIS, HA

- GENERÁTOR
- (VAGY) FÜGGETLEN

B)

T) n DIMENZIÓS TÉRBEN k $(k<n)$ darab vektort mindig ki lehet egészíteni úgy, hogy BÁZIS LEGYEN.

$v_1 \ldots v_k$ -hoz keresünk olyan vektort, ami nem lineáris kombinációja ezeknek. EZT $n-k$-szor.

ORTOGONÁLIS RENDSZER: Minden vektor ⊥ a többire

ORTHONORMÁLIS R.: ORTOGONÁLIS + csak 1 egys. VEKTOROK

$\langle f, g\rangle=\int_0^{2\pi} f_x g_x\, dx$ SKALÁR SZORZAT

$=|\bar{v}_1||\bar{v}_2|\cos\alpha$

tehát ha ⊥ akkor $=0$

HA VAN 1 $\bar{v}_1$ $\bar{v}_n$ ORTHONORMÁLIS BÁZIS:

$\forall\, \bar{w}$ felírható: $\bar{w}=c_1\bar{v}_1+\ldots c_n v_n$

ILYENKOR $c_i=\langle w, v_i\rangle$

ÉS $|\bar{w}|=\sqrt{\sum c_i^2}$

AHOGY ORTOGONÁLISNÁL: $|\bar{w}|\ \sqrt{\sum(|\bar{v}_i| c_i)^2}$

$=\sqrt{\sum |w|^2}$

MÁTRIXOK

- m SOR, n OSZLOP, $m\times n$

FŐÁTLÓ

ELEM: $a_{i,j}$ j-OSZLOP, i-SOR

MELLÉKÁTLÓ

- HA $m=n$: NÉGYZETES MÁTRIX
- Ha csak a főátlóban vannak elemek, a többi elem $=0$: DIAGONÁL MÁTRIX
- HA DIAGONÁL, ÉS A ≠0 ELEMEK $=1$ AKKOR EGYSÉGMÁTRIX
- TRANSZPONÁLT MÁTRIX AZ EREDETI SORAIBÓL LESZNEK AZ ÚJ OSZLOPAI $(m\times n \to n\times m)$

A  A^* ELSŐ SOR → ELSŐ OSZL.

- SZIMMETRIKUS MÁTRIX: $A=A^*$ (ÉS PERSZE $m=n$)

ITT $a_{i,j}=a_{j,i}$ és a FŐÁTLÓRA SZIMMETRIKUS A

MŰVELETEK:

(±) ÖSSZEADÁS

$A \pm B = C$ ← azonos méretűek!

$C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

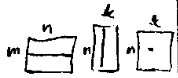
(·λ) SZÁMMAL SZORZÁS

$\lambda A = B$

$\lambda a_{ij} = b_{ij}$

(⊙) MÁTRIX-SZORZÁS

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$



A-NAK ANY OSZLOPA LEGYEN, MINT A B-SORAINAK A SZÁMA. $n=n$!

(VONALMENTI ELEMSZÁM =)

$\underset{sor}{\bar{a}_{i\cdot}} \cdot \underset{oszlop}{\bar{b}_{\cdot l}} \to C_{il}$

SOR, OSZLOP ELEMI

SKALÁR SZORZAT: (JELÖLÉSSEL)

$C_{ij} = \langle \bar{a}_i, \bar{b}_l \rangle$ (NEM KOMMUTATÍV)

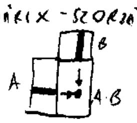
- LEHET $A \cdot B = 0$ ha $A \neq 0 \neq B$
- NÉGYZETES MÁTRIX FELBONTHATÓ 1 SZIMMETRIKUS, ÉS A NEM SZIMMETRIKUS MÁTRIXOS SZEGÉRE

$A = S + T$

$S = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad T = \frac{1}{2}(A - A^*)$

(KOMPLEXNÉL A^* KELLETT / A^* KONJUGÁLT KELL!)

- MÁTRIX-SZORZÁSHOZ:



- INVERZ MÁTRIX:

A INVERZE A^{-1}, HA $A \cdot A^{-1} = E$ (ÉS $A^{-1} \cdot A = E$)

$A^{-1} = \frac{(\mathrm{adj} A)^T}{|A|}$ ← ADJUNGÁLTJA A-NAK; $|A|$ ← det A

- ADJUNGÁLT MÁTRIX

$\mathrm{adj} A = B$

ENNEK ELEMEI

b_{ij} - az a_{ij}-hez tartozó aldeterminánsa A-nak

2x2-esnél

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ \frac{b}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix}$

$\lambda = \det A$

- A $(n\times n)$ INVERTÁLHATÓ, HA

HA VAN OLYAN $B_{(n\times n)}$ MÁTRIX, HOGY

$A \cdot B = B \cdot A = E \qquad (A^{-1} = B)$

- A-NAK CSAK 1 INVERZE VAN.

BIZ.:

TFH $\exists B_1 \neq B$, AMI SZINTÉN $B_1 = A^{-1}$

$A \cdot B_1 = E$

$B(A B_1) = B E = B$

$\underbrace{(B A)}_{E} B_1 = B$

$B_1 = B$ — ellentmondás = !

- $(A B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \neq A^{-1} B^{-1}$
- HATVÁNY: $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m}$

$A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$

- A MÁTRIX RANGJA $(m\times n)$

rang A = A SOR és OSZLOPVEKTORAI HÁNY DIMENZIÓBAN VANNAK. (HÁNY DIMENZIÓ: hány lineárisan független lehet kifejezni belőlük)

$\mathrm{rang} A \leq m$, $\leq n$ $\qquad (\mathrm{rang}\, \underline{0} = 0)$

- VÉGIGMEGYÜNK A SOROKON. ELŐSZÖR feltesszük, hogy $\mathrm{rang} A = m$.
- ha aminek sort vizsgáljuk, az nem lineárisan független a többitől, (akkor már 1-gyel kevesebb a rangja, mint az e sor vizsgálata előtt) akkor $\mathrm{rang} A_i = \mathrm{rang} A_{i-1}$
- És nézzük a következő sort (TEHÁT CIKLUS)

- DIADIKUS felbontás

A - mátrix → VEKTOROK SZORZATÁNAK AZ ÖSSZEGE

- VESSZÜK A MÁTRIX i. SORÁT $(\bar{v})$ és j. OSZLOPÁT $(\bar{w})$ és ezeket megszorozzuk fordítva: $\bar{w} \cdot \bar{v}$
- KIVONJUK: $A - \bar{w} \cdot \bar{v} = A'$
- HA $A' = \underline{0}$ AKKOR KÉSZ, HA NEM, AKKOR VESZÜNK MÁS SORT, OSZLOPOT, ÉS ÚJRA A'-BEN AZ i SOR, ÉS A J OSZLOP ELEMEI MIND 0-K.
- AMIKET KAPUNK: $A = \sum_{i=1}^{\mathrm{rang} A} \bar{w}_i \cdot \bar{v}_i$

$(\bar{w} \cdot \bar{v}$ - IS MÁTRIX)

$\bar{w}_i \bar{v}_i$ - EZ 1 DIÁD

- MÁTRIX REGULÁRIS, HA $\det A \neq 0$ tehát invertálható

DETERMINÁNSOK: 1 szám

MINDEN NÉGYZETES MÁTRIXNAK VAN ILYENJE

1x1 MÁTRIX: $\det A = A$

2x2: $\det A =$ FŐÁTLÓBELIEK SZORZATA − A MELLÉKÁTLÓ ELEMEINEK

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \to ad - cb$

nxn

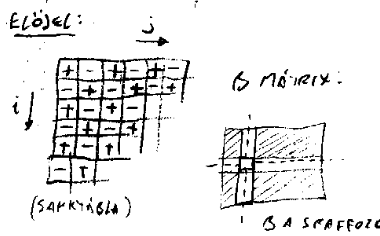
1 SOR VAGY OSZLOP SZERINT KIFEJTJÜK.

$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det B_{ij}$

B_{ij} az a mátrix, amit az aktuális elem sorának és oszlopának a letakarásával nyerünk.

- az $a_{ij} \cdot k$: 1 SOR (VAGY OSZLOP) ELEMEI SORBAN

ELŐJEL:



(SAKKTÁBLA)

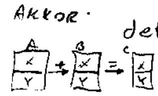
B MÁTRIX: B A SRAFFOZOTT RÉSZ

OLYAN SORT CÉLSZERŰ (OSZL.) VÁLASZTANI, AHOL SOK A NULLA

- DIAGONÁLIS MÁTRIXRA: a főátlóbeli elemek szorzata = $\det A$

$\det A = \prod_{i=j=1}^{n} a_{ij}$

- HA FELCSERÉLJÜK 2 SORÁT A-NAK, AKKOR AZ ELŐJEL ELLENTÉTESRE VÁLTOZIK.
- HA VAN CSUPA 0 SOR, VAGY OSZLOP: $\det A = 0$
- HA VAN 2 AZONOS SOR, VAGY OSZLOP: $\det A = 0$
- HA VAN 3 MÁTRIX, AMIK CSAK 1 BIZONYOS SORBAN TÉRNEK EL, és ott $\bar{v}_a + \bar{v}_b = \bar{v}_c$ (vektor) AKKOR: $\det A + \det B = \det C$



- HA 1 SOR ELEMEIT λ-VAL MEGSZOROZZUK, AKKOR $(A \to A')$ $\det A' = \lambda \det A$
- HA AZ ÖSSZES ELEMET BESZORZOM λ-VAL, AKKOR $(A \to A')$ $\det A' = \lambda^n \det A$

- HA 1 MÁTRIX 1 SORÁT X SZOROSAN HOZZÁADJUK 1 MÁSIK SORÁHOZ, AKKOR
$\det A = \det A'$
→ NEM VÁLTOZIK A DETERMIN.

Ezzel egyszerűsíthető a mátrix: sok 0-át lehet belecsempészni. Kevesebb számolással megvan a det A

- $e^{\underline{A}} = e^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$

$\sin \underline{A} = \sin \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin a & \sin b \\ \sin c & \sin d \end{pmatrix}$

- $|A| = |A^*|$ $\quad |AB| = |A| \cdot |B|$

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

→ (ELSŐFOKÚ)

$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$
$a_3x_1 + a_4x_2 = b_2$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \underline{A}$

EZ UGYANAZ — EGYÜTT HATÓMÁTRIX

$\underline{A}\, \underline{x} = \underline{b}$

- A MEGOLDÁS X-RE EGYÉRTELMŰ HA A OSZLOPOK LIN. FÜGGETLENEK
- HOMOGÉN EGYENLETRENDSZER
$A\bar{x} = \bar{0}$
  - HA $\bar{x}$ megoldás, akkor $k \cdot \bar{x}$ is megoldás.
  - HA $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ MEGOLDÁSOK:
  → AKKOR $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ IS MEGOLDÁSOK
  - MEGOLDÁSOK HALMAZA ALTERE R^n-NEK (n-DIM TÉRNEK)
  - $\bar{x} = \bar{0}$ A TRIVIÁLIS MEGOLDÁS
- H.E.R. PARTIKULÁRIS MEGOLDÁSA:
$A x_0 = b$
- VEKTORTÉR ELEMEI VEKTOROK n-DIMENZIÓSAK
- AZ EGYENLETRENDSZERBEN AZ $\underline{A}$ MÁTRIX (nem feltétlen $n \times n$) VEKTORTÉRTRANSZFORMÁCIÓT VÉGEZ
$m \times n$-es: $R^n \to R^m$ $\quad x_0 \to b$
→ A LINEÁRIS OPERÁTOR HA x_0 ISMERT, ÉS b-NEM!
- MAGTÉR $(\ker A)$ A MÁTRIXÉ
$A\bar{x} = 0$ megoldásainak a tere
(HOMOGÉN EGYENLETRENDSZER)

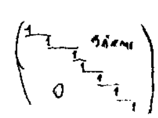
- KÉPTÉR $(\operatorname{Im} A)$
A-OSZLOPAINAK A LINEÁRIS KOMBINÁCIÓI. LEKÉPEZÉS EREDMÉNYE/ DIMENZIÓJA:
$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rang} A$
- A-ISMERETLEN ($\dim X = n$)
$n = \dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A$
$n = \dim H + \operatorname{rang} A$
(ahol H: a HOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK A TERE)

- $A\bar{x} = \bar{b}$ MEGOLDÁSA:

1.) NÉGYZETES $\underline{A}$ MÁTRIXNÁL:

a) BONYOLULTABB
- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ -alakra hozzuk $\underline{A}$-t
(csak a főátlóban van $\neq 0$ elem)
- EHHEZ KIBŐVÍTETT MÁTRIXOT KÉPZÜNK: $(A \,\vdots\, \bar{b})$
- 1 SORT ... SZÁMMAL SZOROZVA HOZZÁADJUK 1 MÁSIK SORHOZ. vagy FELCSERÉLJÜK SOROKAT (A-SOKAT IS B-SOKAT IS)
- ÍGY KIALAKUL AZ A-RÉSZEN A KÍVÁNT ALAK
- MEGOLDÁS:
n DARAB 1 VÁLTOZÓS 1ENLET

b) EGYSZERŰBB:
- CSAK $\left(\begin{array}{cc|c} a & \text{bármi} & \bar{b} \\ 0 & d & \end{array}\right)$ - ALAKRA HOZZUK
- ALSÓ SOR: 1 ISMERETLENES EGYENLET
$e x_n = b_n$
- AZ EREDMÉNYT BEHELYETTESÍTJÜK AZ X vektorba, és: MEGOLDJUK AZ ALSÓ 2 SORRA AZ 1 ISMERETLENES 1ENLETET.
- ÉS ÍGY TOVÁBB FELFELÉ, c): $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

2.) $m \times n$-es A MÁTRIX
- $(A \,\vdots\, \bar{b})$ -t képezzük.
-  - ALAKRA HOZZUK: $\boxed{A} \cdot \boxed{x} = \boxed{b}$
- ELSŐ OSZLOP 1. ELEM LEGYEN 1 A TÖBBI LEGYEN 0.
- ↘ ILYEN IRÁNYBA MOZGUNK ($1i$ $1j$) OTT BEÁLLÍTUNK 1-ET. HA NEM LEHET (MINDEN ELEM=0) AKKOR NEM. ÉS LÉP JOBBRA 1ET DE ALATTA MINDENKÉPP CSAK 0-LEHET.
- ÍGY ADDIG, AMÍG AZ ALJÁRA NEM ÉRÜNK

- EZUTÁN AZ 1b) NÉL LEÍRT MÓDON IGYEKSZÜNK MEGOLDANI
- KEVESEBB EGYENLET, MINT VÁLTOZÓ: A FELESLEG PARAMÉTER LESZ. (MARAD)
- HA VAN CSUPA 0-SOR: AKKOR NINCS MEGOLDÁS

VAN OLYAN MŰVELET IS, HOGY 1 SORT 1SZERŰEN MEGSZOROZUNK 1 SZÁMMAL. EZ IS KELL!

3.) $m \times n$-es $\underline{A}$ is CRAMER SZABÁLY
(csak reguláris A-nál $\det A \neq 0$)
A-NAK n-OSZLOPA VAN
LESZ n db ÚJ MÁTRIX $A_1 \ldots A_n$:
A_i: A-MÁTRIX i. SORÁT LECSERÉLEM b-re.

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

LINEÁRIS OPERÁTOROK

- AZONOS VEKTORTÉRBEN MARADVA ÁTTÉRÉS ÚJ BÁZISRA: (BÁZISCSERE)
$\underline{A}\,\bar{x}_A = \underline{B}\,\bar{x}_B$ (BEVEZETJÜK BÁZIST IS ÁTVISZI A MÁSIKBA)
x_A - x koordinátái A BÁZISBA
x_B - " - B BÁZISBA
- x_A-ról x_B-RE ÁTTÉRÉS:
$x_B = \underline{B}^{-1}\underline{A}\,\bar{x}_A$ $\qquad \underline{B}^{-1}\underline{A} = \underline{M}$
M-AZ ÁTTÉRÉSI MÁTRIX
- 1 VEKTORBÓL ÁT LEHET TRANSZFORMÁLNI A MÁSIKRA
$\underline{A}\,\bar{x} = \bar{y}$ AHOL $\bar{y}$ - A KÉP ÉS X - A TÁRGYVEKTOR
Erre teljesül: $A x_1 = y_1$, $A x_2 = y_2$ akkor
$A(a x_1 + b x_2) = a y_1 + b y_2$
EZÉRT LINEÁRIS A TRAFÓ
- A TRAFÓ REGULÁRIS (NEM SZINGULÁRIS), HA $x_1 \neq x_2$-re $A x_1 = y_1$, $A x_2 = y_2$-re igaz, hogy $y_1 \neq y_2$
- TRAFÓ = OPERÁTOR = MÁTRIX REGULÁRIS, HA A MÁTRIX IS REGULÁRIS ($\det A \neq 0$)
- MAGTÉR: $(\ker A)$
KÉPTÉR: $(\operatorname{Im} A)$

- MŰVELETEK OPERÁTOROKKAL
  - CER (c-szám) T-operátor: $(cT)\bar{u} \to c(T\bar{u})$
  - $(T_1 \pm T_2)\bar{u} \to T_1\bar{u} \pm T_2\bar{u}$
  - $T_1 : U \to V$ (lineár)
    $T_2 : V \to W$
    akkor
    $(T_2 \cdot T_1)\bar{u} = T_2(T_1\bar{u}) \in W$
    SZORZAT OPERÁTOR (T_1T_2 - NINCS, CSAK HA $T_1, T_2 : U \to U$)
  - $T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1$
    $T_3(T_1 + T_2) = T_3T_1 + T_3T_2$
- REGULÁRIS OPERÁTOR: $\ker T = \{\bar{0}\}$ KÖLCSÖNÖSEN 1 ÉRTELMŰ
- DIMENZIÓ-TÉTEL.
  $\dim U = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$
  ha $T : U \to U$
- MŰVELETEK HATÁSA A REGULARITÁSRA:
  - T-reg $\Rightarrow$ $c \cdot T$ is reg.
  - T_2, T_1 reg $\Rightarrow$ $T_1 + T_2$ ÁLTALÁBAN NEM REG.
  - T_1, T_2 reg $\Rightarrow$ $T_2 \cdot T_1$ IS REG
    MERT: $U \xrightarrow{T_1} V \xrightarrow{T_2} W$, $U \xrightarrow{T_2 \cdot T_1} W$ egyszerre jutunk 1IK ÚT REG. → MÁSIK IS.
- INVERZOPERÁTOR
  $T : U \to V$ $T^{-1} : V \to U$
- Ha T reguláris akkor van inverze (T^{-1} is reguláris lesz)
- I - IDENTIKUS OPERÁTOR
  MINDEN VEKTORT HELYBEN HAGY
  $I : U \to U$ $I \cdot \bar{u} = \bar{u}$
  ($\underline{E}$ - EGYSÉGMÁTRIX VALÓSÍTJA MEG)

- TF
  n DIMENZIÓBÓL m DIMENZIÓBA TRAFÓ
  $T : U_n \to V_m$ ($n \to m$)
  U BÁZISVEKTORAIRA:
  $T\bar{u}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji}\bar{v}_i$ TRAFÓ MÁTRIXA ELEMEI $T : A = [a_{ij}]$
  n darab $\bar{u}$-VEKTOR m darab $\bar{v}$-vel felírva.
  Mivel A-nak oszlopi vannak, ahány oszlopa $\bar{u}$-nak, annyi kell legyen, így A: ? × n-es
  OSZLOPOK: 1 $\bar{u}$-t m darab $\bar{v}$-vel lehet előállítani, és $\bar{v}$-ben a kif. m elemből áll: A: m SORBÓL ÁLL
  TEHÁT
  $T : U_n \to V_m$ ($n \to m$ DIM)
  $A : m \times n$

- HA $\bar{u} \in U$ (BÁZISVEKTOROK)
  $\bar{u} = \sum^{n} c_j \bar{u}_j$
  $T \cdot \bar{u} = \sum_i^{m} b_i \bar{v}_i$
  AKKOR:
  $A\underline{c} = \underline{b}$
- FORGATÁS: (φ)
  $T : U \to U$
  MÁTRIX: AZ U BÁZISÁT IS φ-VEL FORGASSUK! UGYANAZ A BÁZIS A 2 TÉRBEN
  2DIMENZIÓBAN: ($R^2 \to R^2$)
  $$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
- ORTHOGONÁL BÁZIS TRAFÓ:
  ORTHONORMÁLT BÁZISRÓL ORTHONORMÁLTRA TÉRÜNK ÁT.
- DERIVÁLÁS (POLINOMOK)
  - $D : P_1 \to P_2$ $\dim P_1 - 1 = \dim P_2$
    n DIM m DIM
    A: n OSZLOP m SOR ($m \times n$)
  - 3DIM → 2DIM
    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ NÖVEKVŐ
  - A POLINOMNÁL A BÁZIS: $a + bx + cx^2$ ... alakkal
    $1 \quad x \quad x^2$ EBBEN A SORRENDBEN
    $(a\ b\ c)$ - T MIBE VISZ ÁT?
    $a + bx + cx^2 \to b + 2cx$

- BÁZISVÁLASZTÁS, HOGY A egyszerű legyen (DIAGONÁLIS) ($n \times n$-esnél)
- SAJÁTÉRTÉK(EK) $\lambda_1 \dots \lambda_n$
  $|A - \lambda E| = 0$ -NAK A MEGOLDÁSAI
- λ_i SAJÁTÉRTÉKE T-NEK, HA LÉTEZIK $\bar{u}$ VEKTOR, HOGY
  $T\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i$
  ILYENKOR $\bar{u}_i$ - SAJÁTVEKTORA T-NEK (MINDEN λ_i-HEZ $\bar{u}_i$)

EZ A SAJÁTVEKTOR R^n eleme
EZ EGY TÉTEL.
BIZ: kellene de nincs!!

- AZ ÖSSZES BÁZISVEKTOR SAJÁTVEKTOR IS
- TRAFÓKOR
  $T \cdot U = c_j v_j$
  $$A : \begin{pmatrix} & c_1 & \\ & \vdots & \\ \dots & c_j & \dots \\ & \vdots & \\ & c_m & \end{pmatrix}$$
- HA A: n×n-es, AKKOR felírható ÍGY:
  $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ CSERÉLJÜK ERRE.
- A MÁTRIX λ_i-je, S_i-je = T λ_i-je, S_i-je
- λ_i NEM FÜGG A BÁZISTÓL
- T) λ sajátértéke T-nek, ha $T - \lambda I$ nem reguláris.
  $(A - \lambda E)$
  BIZ: NEM REG: $\ker A \neq 0$ (MÁTRIX)
  $\ker(T - \lambda I) \neq 0$
  $\Leftrightarrow (T - \lambda I)\bar{u} = \bar{0}$
  $T\bar{u} - \lambda I\bar{u} = \bar{0}$
  $T\bar{u} - \lambda\bar{u} = 0$
  $T\bar{u} = \lambda\bar{u}$ → tehát λ a sajátérték
- $\det(T - \lambda I) = 0$
  EBBŐL (λ_i-NEK) A MÁTRIXNAK A KARAKTERISZTIKUS POLINOMJA (n-ED RENDŰ)
- SAJÁTVEKTOR SZÁMÍTÁSA
  - MINDEN SAJÁT VEKTORRA 1 EGYENLETRENDSZER
  - HA A-BAN SOK A 0 - AKKOR PARAMÉTERES LESZ → NEM KONKRÉT SZÁMOK.
  - KISZ:
    $AS_1 = \lambda_1 S_1$ VAGY AMI UGYANEZ:
    $(A - \lambda_1 E)S_1 = \bar{0}$ MEGOLDÁSAI.
  - HA PARAMÉTERES: 1 ÁLTALÁNOS MEGOLDÁST KAPUNK, EBBE A PARAMÉTER behelyettesíthető. Általában 1-et.
  - HA NEM: PARTIKULÁRIS MEGOLDÁS
- T) ADOTT $\lambda_1 \dots \lambda_k \Rightarrow \bar{u}_1 \dots \bar{u}_k$
  EZEK ($\bar{u}_1 \dots \bar{u}_k$) LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGENEK

FÜGGVÉNYSOROZAT

FÜGGVÉNYSOROZAT

- MEGADÁS (függvény 3D-ben: x, y, n)
  - $f_n(x) = \dots$ x-től és n-től is függ

  vagy rekurzívan:
  - $\begin{cases} f_0(x) = a, \ f_1 = b \\ f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x) \end{cases}$
  - $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (minden x-re 1 sorozat)
- D értelmezési tartomány: összes f D-jének metszete (ahol az összes értelmezve van)
- $f_n(x)$ x_0-pontban 1 számsorozat:
  - ha ez konvergens, akkor az egész f. sorozat is konvergens
- K-tartományban $f_n(x)$ konvergens minden $x_0 \in K$-ra: K - a konvergenciatartomány
- minden x_0-hoz létezik $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A_0$ - szám

  Ezek az A számok minden x-hez így új függvény: határfüggvény $f(x)$

  $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

  - Ha nem lehet egyenlettel megadni előre: (intervallumban) $f(x) = \begin{cases} a, \text{ ha } \dots x \dots \\ b, \text{ ha } \dots x \dots \end{cases}$
- MŰVELETEK
  - $c f_n(x) \to c f(x)$ K marad
  - $f_n(x) + g_n(x) \to f(x) + g(x)$
  - szorzás, osztás is

  $$K_e = K_f \cap K_g$$

T) függvénysorozat felülről korlátos, ha $\exists M$, hogy $\forall x \in D \Rightarrow f_n(x) \le M$

T) Mon. növ. felülről korlátos f. sorozat konvergens (D-ben)

- határértékeknél vizsgálni kell a speciális helyeket: $x = 0$, intervallum széle, hely, ahol számláló $= 0$, nevező $= 0$...
- EGYENLETES KONVERGENCIA: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez D-ben ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$)

HA: bizonyos küszöbindextől felfelé is $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ (ε - kis szám)

- ahol nem hirtelen cuppan bele $f_n(x)$ a határfüggvénybe. fokozatosan simul bele.
- N független x-től akkor $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$
- csak olyan intervallumon, ahol $f(x)$ - folytonos (persze $f_n(x)$ - is)
- tartományon nem egy. ko. ha van olyan pontja, ahol nem. (ilyen pontokat kell keresni.) (tartomány pontja)

  (pl. $n \cdot x$ 0-ban: 0, máshol $\pm\infty$)

T) ha $f(x)$ folytonos 1 zárt intervallumban, akkor egyenletesen is folytonos

T) Ha $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez, akkor: $f(x)$ folytonos. ($f(x)$ nem folytonos $\to$ $f_n(x)$ nem egyenletesen konvergál)

T) ha van: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

akkor: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

FC

FÜGGVÉNYSOROK

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

- függvénysor konvergens x_0-ban, ha $\sum_{k=0} f_k(x_0)$ konvergens
- így lesz 1 konvergenciatartomány (K)

ez tartományon belül van $S(x)$ - összegfüggvény:

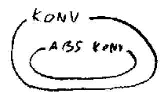
$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

(minden x-re 1 sor)

- hatványsor: $S_n(x) = \sum x^n$ ($\sum q^n$)

  $S(x) = \frac{1}{1-x}$

  ($S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, de mivel ha konvergens: $q^{n+1} \to 0$)
- sor egyenletesen konvergens 1 tartományban, ha $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$
- ha így, akkor $f_k(x) \to 0$
- ha $\sum f_k(x)$ egyenletesen konvergens K-ban akkor: $f_k(x) \rightrightarrows 0$ $x \in D, K$
- $\sum f_k(x)$ abs konv. D-ben, ha: $\sum |f_k(x)|$ konv. D-ben



- MAJORÁNS TÉTEL

  ha minden x-re, (D-ben), k-ra: $|f_k(x)| \le M_k$, és $\sum M_k$ konvergens: akkor: $\sum f_k(x)$ is konvergens (D-ben egyenletesen, és abszolút is!)

- INTERVALLUMOK: $[a, b)$ a - benne van, b - nem

HATVÁNYSOROK

- x-hatványait tartalmazó függvénysorok

$\sum_{n=0} a_n x^n$ a_n-ek a együtthatók

- általános alak: $\sum_{n=0} a_n (x - x_0)^n$ (nem csak 0 körül)

- HA x_0 - HELYEN KONVERGENS, ÉS $|x_1|<|x_0|$
AKKOR x_1 helyen is az
(DIVERG: fordítva, ezt A RELÁCIÓ JEL ELLENTÉTES)
- HA $x=0$ helyen konvergens, a HATVÁNYSOR, (ole nem minden x-re) akkor MINDEN $|x|<R$ esetén KONVERGENS.
• ITT R a ~~konvergenciasugár~~ KONVERGENCIASUGÁR
• A $(-R,R)$ INTERVALLUM A KONVERGENCIA INTERVALLUM (R - szélessége)

ELŐZŐHÖZ

- ha $\sum f_k(x)$ egyenletesen konvergens (I-ben), és $f_k(x)$-ek folytonosak: $S(x)$ - IS FOLYTONOS
~~HA $\sum f_k$ EGYENLETESEN KONVERG. AKKOR S FOLYT.~~
- HA $f_k(x)$ ek folytonosak, $\sum f_k(x)$ -ek egyenl konverg AKKOR: S_x - is folytonos
- LEHET OLYAN, HOGY $S(x)$ FOLYTONOS, DE NEM EGY. KONV.
- HA TAGONKÉNT DERIVÁLOM A SORT (az $f_k(x)$ - EKET) akkor az összeg $= S'(x)$
$$\sum f_k'(x) = S'(x) \quad (\sum f_k(x) = S(x))$$
• HA AZ INTERVALLUM 1 PONTJÁBAN KONVERGENS, (I: AHOL DIFF.HATÓAK AZ $f_k(x)$-ek) AKKOR AZ EGÉSZ I-BEN EGYENLETESEN IS KONVERGENS!

HATVÁNYSOR KONVERGENCIASUGARA:
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$
HA A SOR $c_k x^k$

HATVÁNYSORBA FEJTÉS = TAYLOR SORBA FEJTÉS

SOKADIK DERIVÁLT (0-BAN)

$f^{(n)} = ?$ $= \frac{1}{1-q}$ alakra hozni
EKKOR:
$$f = \sum c_k q^k$$
EZT ILYEN ALAKRA:
$$f = \sum a_k \cdot x^{b\cdot k+1}$$
$$b\cdot k+1 = m$$
akkor a_k -t átírni a_m' -re.
$$f^{(m)} = m! \cdot a_m'$$

pl:
$$f^{(2002)} = \left(\frac{x}{1+2x^3}\right)^{(2002)}(0) = ?$$
$$f = x\cdot\frac{1}{1-(-2x^3)} = \sum x\cdot(-2x^3)^k$$
$$= \sum(-2)^k \cdot x^{3k+1}$$
$$3k+1 = m \Rightarrow k = 667$$
tehát
$$f = \sum(-2)^{667} x^m$$
$$(-2)^{667} = \frac{f^{(2002)}}{2002!}$$
INNEN:
$$(-2)^{667}\cdot 2002! = f^{(2002)}$$

HATVÁNYSOR x_0-BAN

$f_n(x)$ -be be x helyére $(x-x_0)$-t tenni, majd a $\frac{1}{1-q}$ alakra hozni.
$$f_n(x) = \sum a q^k = \sum b_k x^k$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)' = -\frac{1}{(ax+b)^2}\cdot a$$

HATVÁNYSORNÁL HA $\boxed{\text{SOROSSZEG} \; \text{NEVEZETES}}$ NINCS X, akkor azon a q, azt helyettesítik x-szel:

pl: $\sum n\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n = \sum n \cdot x^n$

$\sum n x^{-n} = \sum n\left(\frac{1}{x}\right)^n$

$$x^n \xrightarrow{d} nx^{n-1} = nx^n\cdot\frac{1}{x}$$
$$= nx^n\cdot 10$$
$$S\frac{1}{2} = \frac{1}{10}x^n \xleftarrow{S} nx^n$$

$$\frac{1}{10}x^n = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$\frac{1}{10}\cdot\frac{-1}{(1-x)^2} \;\Big|\; \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{10})^2}$$

VEKTORTRAFÓ, BÁZISTRAFÓ

$U \to V$ $\quad A\cdot \bar{U}_i = \bar{V}_i$
$$\bar{V}_1 = c_{11}\bar{U}_1 + c_{12}\bar{U}_2 + c_{13}\bar{U}_3$$
$$\bar{V}_2 = c_{21}\bar{U}_1 + c_{22}\bar{U}_2 + c_{23}\bar{U}_3$$
$$\bar{V}_3 = c_{31}\bar{U}_1 + c_{32}\bar{U}_2 + c_{33}\bar{U}_3$$
akkor
$$A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$
EZ A BÁZIST ÁTVISZI AZ ÚJ BÁZISBA.

FOURIER - SOROK

periodikus függvény felbontható SZINUSZOK és KOSZINUSZOK összegére.

$$f(x) = T_{n(x)} = \quad \text{(F - FOURIER SORA, ha } n=\infty)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

- n-ed rendű TRIGONOMETRIKUS POLINOM.
- ha $n = \infty$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \dots$ akkor trigonometrikus SOR
- ω lehet $=1$ akkor kevesebb
- MEGENGEDETT FÜGGVÉNY: monoton minden kis részintervallumra
  - $\exists$ FOURIER-SORA
- a feladatokban f $[0 - 2\pi]$ periódusú szakaszon. $T = 2\pi$ (szakasz)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \qquad \text{VAGY } a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad \text{VAGY } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

- $T_{n(x)}$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez
- Ha $f(x)$-ben (abszolút) érték jel van, akkor az integrálást ÚJ HATÁROKKAL kell végezni TÖBB DARABBAN!
  határok: AHOL $f(x)$ előjelet változtat 1-1 jel nélkül.
  - $f(x)$-et integráljuk.
    ez ahol $\ominus$ lesz, ott az is pozitív legyen; ezért az ilyen részt ki kell vonni, (MÍNUSZ ból MÍNUSZ) nem hozzáadni

$$\int f = \int f - \int f \quad (\text{HA } \ominus \text{ LENNE EZ})$$

- EGYÜTTHATÓK: $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$

- páratlan függvényre $b_k = 0$ (SINUSZ elhagyva)
- ha ugrás van $f(x)$-ben, akkor $T_{n(x)}$ nem konvergál ott egyenletesen.
-
$$\lim_{n\to\infty} f(x) - T_{n(x)} = 0$$

- TÉTEL: (BESSEL)

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_{(x)}^2\, dx$$

PARSEVAL: $= \text{-} = \text{jel van}$

- Ha adott $f(x)$ és $g(x)$, és $a_{0g} = 0$, $f(x) = \int g(x)\, dx$ akkor a FOURIER együtthatók között:

$$a_{k_f} = -\frac{b_{kg}}{k} \qquad b_{k_f} = \frac{a_{kg}}{k}$$

- Ha adott $f(x)$ $\exists f''(x)$ $(f(x) \in D)$ és $f'(x)$ folytonos, akkor $f(x)$ $\nexists$ FOURIER-SORA EGYENLETESEN KONVERGENS.

- $f(x) = \int g(x)$ és $g(x)$ MEGENGEDETT ($\exists$ $g(x)$ FOURIER sora) akkor $f(x)$ FOURIER SORA EGYENLETESEN KONVERGENS

- MOMENTUM TÉTEL:
  $a_k = b_k = 0$ CSAK, HA $f(x) = 0$

KOMPLEX ALAKOK

- $e^{i(kx)} = (e^{ix})^k = \cos kx + i \sin kx$
  (lehet elégít $\sum$-két kapni)
  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

- $$\cos kx = \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2}$$

$$\sin kx = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j}$$

- $$T_{n(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$= \sum c_k e^{-jkx}, \quad c_k = \frac{a_k + j b_k}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{jkx} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{jkx}$$

ÁLTALÁNOSÍTOTT FOURIER EGYÜTTHATÓ

- $$\frac{1}{T} \int_0^T f_{(x)}^2\, dx = \sum^{\infty} |c_k|^2$$

VAGY $f(x)$ és $g(x)$-re $(T_f = T_g)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, \overline{g(x)} = \sum^{\infty} c_{k_f} \cdot \overline{c_{k_g}}$$

- FÜGGVÉNYSOROZAT $[a, b]$ intervallumon ORTHOGONÁLIS, HA:

$$\int_a^b f_k(x) \cdot f_L(x)\, dx = 0$$

(K., L. -ELEMEK, $K \ne L$)

ÉS

$$\int_a^b |f_k(x)|^2\, dx > 0$$

(ABSZ. ÉRT.: MERT HA KOMPLEX AKKOR KELL. $z^2 = |z|^2$ LEHET, z-KOMPLEX)

- $$f(x) = \sum_k^{\infty} c_k \cdot f_k(x)$$ (ált. függvénysorozat: FOURIER SOR)

$$c_k = \int_a^b f(x)\, f_k(x)\, dx$$

(általánosított FOURIER EGYÜTTHATÓ)

- $\sin ix = i\, \mathrm{sh}\, x$
  $\cos ix = \mathrm{ch}\, x$

- $F_{n(x)}$ - 1 TRIGONOMETRIKUS POLINOM
  T_n - 1 érték halmaza.

$S_{n(x)}$ = n-EDIK FORMULA ÖSSZEG

$T_{n(x)}$ - FOURIER SOR $(n = \infty)$

$$\cos kx \cos Lx = -\frac{1}{2} \cos(k+L)x - \cos(k-L)x$$

- TRIGONOMETRIKUS SOR FOURIER SORA EGY $f(x)$-NEK, HA = vele. (előállítja)

- FOURIER SOR VEGYTÓ ÍGY:
  a) $f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$
  b) $f(x) = \sum_{0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ CSAK ITT $b_0 = 0$

- Ha $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$

AKKOR

$a_k = \frac{2\cdot m}{T}\int_0^{m\cdot T} f(x)\,dx$

m-többszöröse esetén.

- Ha $f(x)$ PÁRATLAN:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 2\int_0^T f(x)\,dx$$

- $\frac{\sum_{k=0}^{n} S_k(x)}{n+1} \rightarrow f(x)$ HA $f(x)$ PERIÓDIK

FÜGGVÉNYSOROZAT

- HATVÁNYSORBA -FEJTÉS

$f(x)$-et $a\cdot\frac{1}{1-q(x)}$ alakra $\left(q_{x\text{-FÜGG}}\right)$ hozzuk. ekkor:

$$f(x) = a\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q(x)^k$$

- BONYOLULTABB ESET:
  - $f(x)$-BŐL KIFEJEZNI $a\frac{1}{1-q}$-t ahol lehet: $a(x)$
  - ÁTÍRJUK: $f(x) = a(x)\cdot\sum q(x)^k$
  - BESZOROZUNK: $f(x) = \sum a(x)\, q(x)^k$

(LÉNYEG: LEGYEN BENNE k-PARAMÉTER, $a(x)$ NEM FÜGGÖTT (de tőle, mint vihelliük be)

- MÁS ESET:

$\frac{1}{ax^2+bx+c} \rightarrow \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} \rightarrow \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$

ez 2 külön aq^k de ezek behúzhatók 1 Σ-ba

- $e^x = \frac{e^0}{k!}x^k = \frac{x^k}{k!}$ (TAYLOR)

- $ch^n x = \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}$

$sh^n x = \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}$

$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

$\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

x helyett $(x-x_0)$:

ÁTÍRNI: $f(x) \rightarrow f(x-x_0+x_0) = f((x-x_0)+x_0)$

$ch^2x - sh^2x = 1$

$sh\,2x = 2\,sh x\, ch x$

$ch\,2x = ch^2x + sh^2x$

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

BINOMIÁLIS SOR: (ÖSSZEGE)

$$\sum \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a$$

$\binom{a}{n} = \frac{a!}{(a-n)!\,n!}$ $\left(\begin{array}{l}\text{SOR } (1-\infty)\\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\\ \text{ELEM } (0 \dots n)\end{array}\right)$

VAGY VISSZAFELÉ: $(1+x)^a = \dots$ BIN. SORRAL

NEVEZETES TAYLOR SOROK:

- $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum x^k$, $|x|<1$
- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum(-1)^k x^k$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

NUMERIKUS SOROK:

$\sum \frac{1}{1-q} = q^k$

TAYLOR:

$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$

e^{ax} TAYLOR SORBA: x_0-BAN

$e^{ax} = e^{a(x-x_0)+ax_0}$

$= e^{ax_0}\sum \frac{a^k}{k!}(x-x_0)^k$

$\cos ax = \sum_0^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot a^{2k}$

$\ln(1+x) = \sum(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ha $f(x)$ nehezen = fejthető:

$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow \sum a \rightarrow \int\sum a\,dx = f(x)$

f' - TAYLOR SORA

[illegible]:
- DERIVÁLJUK
- HATV. SORBA
- INTEGRÁLJUK, KÉSZ

$f^{(n)}_{(x_0)} = ?$

$f(x) = \sum a_k$

$a_n = \frac{f^{(n)}_{(x_0)}}{n!}(x-x_0)$

EGYENLETBŐL KILEHET FEJEZNI.

TAYLOR SOR:

$\sum \text{SZÁM}\cdot(x-x_0)^k$

- SIMA HATVÁNYSORBA $f(x)$-et
- AZ n-edik KONSTANS ugyanaz, mint a TAYLOR sor ..-nos indexű konstansa.

HA VÁLTAKOZÓ!

HIBA: MARADÉKTAG: $H < |T_{n+1} - T_n|$

$(T_n$-nél$)$ $n+1$-EDIK TAG

$sh x = \sum_1^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ TAYLOR SOR

$ch x = \sum_0^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k!}$

TAYLOR SORFEJTÉSI MÓDSZER $(x_0=0)$

$\frac{1}{a(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. $a(x)$ = POLINOM

$1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots)\, a(x)$

POLINOM = POLINOM

- A POLINOMOK SZORZÓI $(a_1, a_2 \dots)$ egyenlőek a 2 oldalon
- A SZORZÁST el kell végezni. Lesznek benne ilyenek:

$(a_p+a_q)x + (a_l+a_v+a_r)x^2 \dots$

ez ilyen tagot → ha nullák: egyenlet, egyenletrendszer.

Először a_0-t számoljuk, azzal lehet a_1-et.

pl:

$1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots)(1+x+x^2)$

$1 = a_0 + a_0x + a_0x^2 + a_1x + a_1x^2 + a_1x^3 \dots$

$1 = a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 \dots$

ebből 0, ebből 0

MÁS: PARCIÁLIS TÖRTEKRE BONTÁS...

$f(x) \rightarrow \sum a_k x^k$

$f(ax) \rightarrow \sum a_k (ax)^k$

$f[a(x-x_0)] \rightarrow \sum a_k [a(x-x_0)]^k$

CANTOR-METSZET-TÉTEL:

Ha $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$
ezek zártak, nem üresek
AKKOR $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq 0$
(metszet nem üres: van olyan elem, ami mindegyikben)

BOREL-LEFEDÉSI TÉTEL.

- VAN 1 K KOMPAKT HALMAZUNK (PONTHALMAZ)

ZÁRT, KORLÁTOS HALMAZ: KOMPAKT HALMAZ

- A_j NYÍLT HALMAZOKKAL:

$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ (VÉGES LEFEDÉS, MERT VÉGES NEM $\bigcup^{\infty}$)

FÜGGVÉNY GRAFIKONJA:

$z = f(\bar{x})$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$
PONTHALMAZ

- m darab FÜGGETLEN, 1 db FÜGGŐ változó
- Ha $m=2$: $(\bar{x}, f(x)) \in R^3$

$(\bar{x}, f(x)) \in R^{m+1}$

1-GYEL NAGYOBB DIMENZIÓBAN VAN A FÜGGVÉNYGÖRBE.

- PONT KOORDINÁTÁI: $z = f(x,y)$ $P(x,y,z)$
- $x=0$-nál (y tengely-metszet) $z = f(y)$

ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY: D_f

- UGYANÚGY, MINT EDDIG:

tört nevezője $\neq 0$
$\sqrt{\ }$ alatt + vagy csak.

2 VÁLTOZÓSNÁL 1 SÍKIDOM (-OK)

HATÁRÉRTÉK:

(PONTBAN) $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$

MEGKÖZELÍTÉSI-IRÁNY-FÜGGŐ.

(TÉTELESEN:)

$\lim_{\bar{x} \to a} f(\bar{x}) = A$ ha $\forall \varepsilon$-hoz $\exists \delta$ hogy: $\forall \bar{x}_0$ (ami $x_0 \in B^0(\bar{a}, \delta) \cap D_f$)

$|f(\bar{x}_0) - A| \le \varepsilon$

- BIZTOS NEM LÉTEZIK A HATÁRÉRTÉK, HA MÁS IRÁNYOKBÓL MEGKÖZELÍTVE MÁS EREDMÉNYT KAPUNK.

MEGKÖZELÍTÉS:

GÖRBE MENTÉN. A GÖRBE EGYENLETÉT BEHELYETTESÍTJÜK $f(\bar{x})$-BE: (pl: $y = 2x$, $f(x,y) = f(x, 2x)$)

ha $y = kx$ akkor az összes lehetséges egyenes.

- a határérték: $A_x = \lim f(x, kx)$
- más megközelítés is lehet. (bármilyen görbe)

$\boxed{x^2y^2 < (x^2+y^2)^2}$

- $f(\bar{x})$ FOLYTONOS x_0-BAN: $\lim_{\bar{x} \to x_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$ (és persze $\exists$ lim)
- $f(x)$ FOLYTONOS D-halmazon: (TARTOMÁNY: INTERVALLUM) $\forall x_0 \in D$-re

POLINOM-FÜGGVÉNYEK

- FOKSZÁM:
  - VÁLTOZÓNKÉNT
  - TAGONKÉNT A HATVÁNYKITEVŐKET ÖSSZEADJUK
- EZEK FOLYTONOSAK R^m-en
- MŰVELETEK: $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g } FOLYTONOS (HA $g \neq 0$)
- LINEÁRIS POLINOM
  $x \in R$: $f(x) = ax + b$
  $x \in R^m$: $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + b$

- Ha $f(x)$ folytonos D-n akkor $\exists$ sup $f(x)$, inf $f(x)$ (M, m)
- Ha $f(x)$ folytonos D kompakt halmazon: $\sup f(x) = \max f(x)$ (x_0-ban)
- ? $f(x)$ függvényt $f(\bar{x}_n)$ PONTSOROZATTAL közelítjük:

$\lim_{n \to \infty} M - \frac{1}{n} < M = \sup f(x)$

UGYANAZ AZ M-HEZ $\exists x_n$, hogy $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

HOL FOLYTONOS $f(x)$?

- polinomok folytonosak
- hányados is az, ha NEVEZŐ $\neq 0$
- ha a tartomány 1 pontjában nem az, akkor az egészben nem

EGYENLETES FOLYTONOSSÁG:

$f(x)$ EGY.F. D-ben: HA:
$\forall \varepsilon$-hoz $\exists \delta$ hogy ha $|x_1 - x_2| < \delta$ akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

TEHÁT: Ha x_1-től mutat végig, kis környezetében r_1 sétálunk x_2-be ($x_1 \xrightarrow{r_1} x_2$)
AKKOR $f(x_1) \xrightarrow{r_2} f(x_2)$
r_2 is végig, kis környezetben lesz

T) Ha $f(\bar{x}) \in C(D)$ ÉS D KOMPAKT
AKKOR $f(x)$ EGYENLETESEN IS FOLYTONOS.

BOLZANO: m változós

($f(x)$ közbülső értékeket is felvesz csak halmazon)
D kompakt, és összefüggő halmazon:
$\forall C$-hez $(m < C < M)$ ← FÜGGŐ VÁLTOZÓRA
létezik x_0, hogy $f(x_0) = C$
C PONT M és m között van.

VAN-E HATÁRÉRTÉK? -MÁSKÉPP

- ÁTÍRNI $f(x)$-ET POLÁR KOORDINÁTÁKRA
  $z = f(x,y) \to f(r, \varphi) = z$
  $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$
- Ha $\lim_{r \to 0} f(r, \varphi) = ?$ $((x,y) \to (0,0))$
  - ez nem függ φ-től, akkor ugyanaz a határérték minden megközelítésre.
  - Ha függ: milyen φ-re ad más eredményt?
  - Ha csak φ-től függ: akkor bármely φ-re ugyanaz, ?

DERIVÁLT

1 VÁLTOZÓ:

$F_{(x_0)} = f'(x_0) + b$ a érintő egyenlete

2 VÁLTOZÓ:

ÉRINTŐSÍK: (PONTBAN

$z = ax + by + c$

DIFF HATÓ, HA: $f_{(x,y)}$ és $f(x_0,y_0)$ KÖZTI TÁVOLSÁG

$$\frac{\mathcal{E}(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$$

PARCIÁLIS DERIVÁLTAK

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

- x,z - síkkal párhuzamos síkban a derivált görbéje
- y-ra hasonlóan
- PONTBAN ÉRTELMES
- DIFFHATÓ $f(x)$ $(x_0 y_0)$-BAN, HA: PARC DIFFHATÓ ÉS AZOK FOLYTONOSAK. (EKKOR BIZTOS) (ha nem folytonosak, attól még lehet)
- ÉRINTŐSÍK:

$z = ax + by + c$

$$z = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + c$$

- AMI SZERINT ÉPPEN NEM PARC. DERIVÁLUNK, AZ KONSTANSKÉNT VISELKEDIK

MAGASABB RENDŰ PARC. DERIV.:

- AKÁR TÖBB VÁLTOZÓ SZERINTI AKÁR TÖBBSZÖR, vagy 1 szerre 1 változószerint. SORREND MINDEGY!
- MEGADÁS:

FELÜL: ÖSSZESEN HÁNYSZOR

ALUL: MI SZERINT HÁNYSZOR

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

LÁNCSZABÁLY:

(ÖSSZETETT FÜGGVÉNY)

- HA $x = x(t)$ $y = y(t)$

AKKOR: $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

- HA $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

IRÁNYMENTI DERIVÁLTAK:

- ADOTT $(x_0 y_0)$ PONT, ÉS $\bar{U}$ vektor az xy síkban.
- vesszük az így kapható síkot, és az $f(x)$ felületnek a síkra eső metszékének (ami 1 változós görbe) az érintőjét vesszük (meredekségét)

$= D_{\bar{U}} f(x_0,y_0)$

(A METSZŐSÍK MERŐLEGES AZ XY SÍKRA)

$f(x_0+tU_1, y_0+tU_2) = \cancel{g(t)}$

$g_{(t)}' = ?$ $\quad g'_{(0)} = ?$ HA A PONTBAN KELL

$$D_{\bar{U}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0 y_0} U_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0 y_0} U_2$$

$= \langle \text{grad } f, \bar{U} \rangle$

(SKALÁR SZORZAT)

GRADIENS: (x,y SÍKBAN)

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

vektor minden pontra: vektormező (vektorfüggvény)

$$|\text{grad} f(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

MERRE A LEGMEREDEKEBB, MERRE MAXIMÁLIS $D_{\bar{U}}$

Ha $D_{\bar{U}} f = \max$, tehát grad $f(x,y)$ vektorirányban $(\bar{U})$ deriválunk, akkor $x_0 y_0$-BAN erre a legmeredekebb az $f(x,y)$ ($\bar{U}$ = grad f iránya)

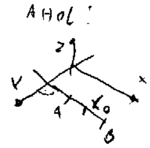
grad(f) AZ AZ IRÁNY, AMERRE A LEGMEREDEKEBB A FÜGGVÉNY (PONTBAN)

LAGRANGE

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0} = g_b - g_a$$

(1 VÁLTOZÓRA: $[a,b]$-ban van c, hogy $f'(c) = f(b) - f(a)$ HA folytonos f.)

AHOL:



x_0 az A, O egyenesen van. (A,O KÖZÖTT)

$\exists$ x_0 hogy igaz a képlet

ROLLE!

Ha $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \to$ vízszintes sík.

Ha csak $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ akkor legalább y irányban.

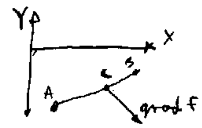
ÖSSZEFÜGGŐ TARTOMÁNYRA!

MONOTONITÁS:

- NINCS. (MERT NINCS „NAGYOBB” PONT)
- ESETLEG IRÁNY MENTÉN ...

$$\left(f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \mathcal{E} \right)$$

MONOTONITÁS:



ha grad f A-felé hajlik, akkor A-felé növekszik $f(x,y)$ az AB egyenes mentén.

Ha $\langle \text{grad } f, \overline{B-A} \rangle = 0$ akkor grad $f \perp \overline{BA}$-ra, így AB irányban nem emelkedik (abban a metszetben VÍZSZINTES ÉRINTŐ)

ROLLE:

Ha $f_{(a)} = f_{(b)}$ akkor van olyan C pont az AB egyenesen, hogy $\langle \text{grad } f_{(c)}, \overline{B-A} \rangle = 0$ tehát vízszintes, (a metszetben ... vízszintes)

IMPLICIT FÜGGVÉNYEK

$f(x,y,z) = 0$

nem tudjuk kifejezni z-t. (esetleg rögzített x,y-ra)

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ VISZONT KÖNNYEN MEGHATÁROZHATÓAK!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \text{ha } \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \text{ha } \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ meghatározás:

$f(x,y,z) = 0$ — Miután a függvény deriv. CSAK ITT $f() = 0$ ÉS NEM $f() = z$ DE ATTÓL MÉG JÓ

cz marad $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 0$

TOTÁLIS DERIVÁLT SZÁMA PONT

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

HA TOTÁL DIFFHATÓ, AKKOR OTT PARCIÁLISAN IS DIFFHATÓ, BÁRMELY VÁLTOZÓRA

- TOT. DIFF. HATÓ (x_0,y_0)-BAN, HA:

$$0=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0y_0}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0y_0}(y-y_0)\right]\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

- HA (0,0)-BAN vizsgálódunk, és nehéz a függvény, akkor ÁT LEHET ÍRNI POLÁR KOORDINÁTÁKRA, és $r \to 0$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ ezt bele a képletbe.

Ha ez minden φ-re ugyanaz a szám, és az 0 akkor TOT. DIFF.
Ha nem függ r-től az átalakított HATÁRÉRTÉK-KÉPLET, akkor ~~bármilyen~~ φ-re csak 0-nak kell kijöjjön!

TOT. DIFF. HA $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$ ÉS FOLYTONOSAK

SZÉLSŐÉRTÉK

K - KOMPAKT HALMAZON (INT K - KÖZEPE, ∂K - K HATÁRA)

M - MAX m - MIN EZT:

- ELŐSZÖR LOKÁLISOKAT:

HOL?
- AHOL $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ és $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ } EGYENLETRENDSZER (LEHETNEK NEM IGAZI GYÖKÖK)

(0,0)-t IS ÁTALÁNOS KERESNI!

- HATÁRGÖRBÉKEN
1 változós FÜGGVÉNYT ÁLLÍTUNK ELŐ (a határt annyi darabra, ahánnyal egyszerű egyenlettel kapunk egyenest...)
GÖRBE EGYENLETÉT BELE AZ $f(x,y)$-BA
$y=g(x) \Rightarrow f(x,g(x))=h(x)$ ↗M ↘m
- AHOL
$\nexists \frac{\partial f}{\partial x}$ VAGY $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}$

- EZEKEN A HELYEKEN $z=f(x,y)$
- EZEK KÖZÜL A LEGNAGYOBB, ILL. A LEGKISEBB

A HATÁRGÖRBÉKEN: (1 VÁLTOZÓS FÜGGV.)
- OTT AHOL $h'(x)=0$ és $h''(x)\neq 0$
- A VÉGPONTOKON (ÉRTÉK: $h(x)$)
- AHOL $\nexists h'(x)$

- TEHÁT HELYEKET KERESÜNK (x,y)
- KILŐJÜK AZOKAT (AMIK NINCSENEK BENNE K-BAN)
- AMI MARAD, OTT $f(x,y)=z$
- EZEK KÖZÜL MAX, min.

- VAN AMIKOR A HATÁRGÖRBÉKET POLÁRRAL LEHET CSAK VIZSGÁLNI: HA KÖR (ELLIPSZIS) A TARTOMÁNY

EKKOR:
a körön valahol lesz a szélsőérték. MILYEN φ-re?
- $f(x,y)$ → POLÁRRA
- r-be R-et behelyettesíteni.
- EGYENLET
$z=h(\varphi)$ ENNEK A SZÉLSŐÉRTÉKEIT: φ, r
- kiszámolni (x,y)-ra

(tanulság φ-t számolnak: sok SIN, COS lesz, ezért érdemes helyettesíteni: $t=\sin\varphi$, $t=\cos\varphi$...)

FÜGGVÉNY DISZKRIMINÁNSA:

$$D=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$$

(x_0,y_0)-BAN!

- HA $D>0$ VAN SZÉLSŐÉRTÉK
EZEN BELÜL: (HA $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ AKKOR MINIMUM, EGYÉBKÉNT MAX)
- HA: $D<0$ NINCS → AKKOR NYEREGPONT
- $D=0$ NO DATA

FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK

$z=f(x,y)$

DE $\varphi(x,y)=0$ PLUSZ FELTÉTEL VAN.

- Ez a plusz feltétel 1 görbe
- E görbe vetülete az $f(x,y)$ felületre 1 görbe 3D-BEN. Ennek keressük a szélsőértékeit.
- KIVITELEZÉS:

$z=f(x,y)$, $\Phi(x,y)=0 \Rightarrow y=g(x)$

Ezt a g-t f-be BELE:

$z=f(x,g(x))=h(x)$

ENNEK MILYEN X-NÉL VAN

SZÉLSŐÉRTÉKE? → x_1
y_1? $\Phi(x_1,y_1)=0 \to y_1$
MEGVAN A PONT A SÍKBAN (x_1,y_1)
$z=f(x_1,y_1)$ A KERESETT SZÉLSŐÉRTÉK

- HA y NEM FEJEZHETŐ KI:
AKKOR:
- $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad}\varphi$
$(\operatorname{grad}(f-\lambda\varphi)=0)$
EZ MILYEN (x,y)-OKRA?
(LAGRANGE MULTIPLIKÁTOR MÓDSZER)
- ÉS PERSZE A KISZÁMOLT (x,y)-ra $\varphi(x,y)=0$ legyen

$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{y}\right)$ (?)

- EGYENLETRENDSZER LESZ:
$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad}\varphi$
$\Phi(x,y)=0$
$\mu(x)=y$
$\Phi(x,\mu(x))=0$
EZ MILYEN X-EKRE IGAZ?
AZOKBÓL y, így (x,y) HELYEK

SIMA SZÉLSŐÉRTÉK:
- OTT, AHOL $f'=0$ $f''>0$ MIN $f''<0$ MAX
- HA EZEK MIND 0-ÁK: OTT, AHOL $f'''=0$: $f^{(4)}>0$ MIN $f^{(4)}<0$ MAX

INTEGRÁLÁS

2 VÁLTOZÓ SZERINT:

$$I=\int_{\text{SZÁM}}^{\text{SZÁM}}\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

- először x szerint, (IT) majd y szerint.
- a behelyettesítést (HATÁR) minden egyes integrálás után.
- $g(y)$, $h(y)$ lehet szám is.
- A HATÁRRAL csak a behelyettesítéskor kell foglalkozni
- A SORREND MEGFORDÍTHATÓ! AKKOR JÓ, HA AZ egyik int. nehezebb: válasszuk a MÁSIKAT
- AZ ELSŐ UTÁN 1 VÁLTOZÓS FÜGGVÉNY MARAD. AZT MÁR SZÁMTÓL SZÁMIG LEHET INT.

SZÉLSŐÉRTÉKHEZ MÉG:

• 2 VÁLTOZÓNÁL f'' 1 MÁTRIX: ANNAK KELL VENNI A (λ) SAJÁTÉRTÉKÉT. ÉS AZT hasonlítani 0-hoz.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = f''$$

ENNEK A SAJÁTÉRTÉKEIT.

HA MINDKETTŐ: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ LOK MIN

• A PONT, AHOL VIZSGÁLJUK

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{EGYENLETRENDSZER GYÖKEINÉL}$$

• HA FELÍRTUK A MÁTRIXOT, felírjuk a λ-hoz szükséges (HURWITZ?) POLINOMOT, MAJD A VIZSGÁLT PONT KOORDINÁTÁIT BEHELYETTESÍTJÜK AZOKBA.

• NEM MINDIG KELL f''-t kiszámolni, elég $f(x,y)$-t ott ahol $f'=0$

n VÁLTOZÓS FÜGGV. INTEGRÁLJA

$$I = \int_{\Omega} \dots \int f(\bar{x})\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

VAGY

$$I = \int_{\Omega} f \quad dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

(n-ES INTEGRÁL)

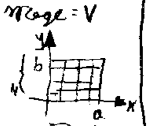
• Ω-tartományon INTEGRÁLUNK.

$I = V$ a kirajzolódott oszlopszerű cucc térfogata. (FELÜLET ALATTI TÉRFOGAT)

• KÖZELÍTŐ ÖSSZEG:

Ω-t KIS NÉGYZETEKRE OSZTJUK. AZOKRA négyzetes oszlopok, amik érintik $f(x,y)$-t. AZOK térfogatának összege $= V$

$$I = \sum_{i=1}^{N^2} f_{c_i} \frac{a \cdot b}{N^2}$$



c_i az i-edik négyzet közepe.

• MŰVELETEK

$$\iint_{\Omega} f \pm g = \iint_{\Omega} f \pm \iint_{\Omega} g$$

$$\iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f = \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \quad \text{HA } \Omega_1 \cap \Omega_2 = 0$$

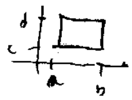
KORLÁTOSSÁG:

HA $m < f(x,y) < M$ AKKOR:

$$m\, T_{\Omega} \le \iint_{\Omega} f \le M \cdot T_{\Omega}$$

KISZÁMÍTÁS

• Ha TÉGLALAP



$$I = \int_c^d \int_a^b f \; dx\, dy$$

fordítva is lehet.

• HA SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ

TEHÁT: $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$

és Ω téglalap

AKKOR

$$\int_{\Omega} f(x,y) = \int_a^b g(x)\, dx \cdot \int_c^d h(y)\, dy$$

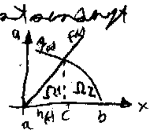
• HA A TARTOMÁNY NORMÁLIS:

lefedhető szakaszokkal:

Mindig 1 szakasz, sosem szakad meg.

és a görbék egyenletei ismertek.

Ha 1 lefedőszakasz nem 1 görbe a szakasz vége, akkor a tartományt felosztjuk



Az első integrálás arra az irányba amerre ilyen a függvény.

$$\iint_{\Omega_1} f = \int_a^b \int_0^{f(x)} f \; dy\, dx$$

← az alsó 0 mert $y=0$ egyenes az alsó görbe.

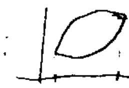
$$\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy = F(x, f(x)) - F(x, g(x))$$

HA NEM NORMÁLIS, AKKOR DARABOLUNK, MÍG NORMÁLISOKAT NEM KAPUNK.

AKKOR JÓ, HA ALUL IS, A FELÜL IS 1 GÖRBE VAN CSAK.

A 2 HATÁRGÖRBE METSZHETI EGYMÁST A VÉGPONTOKON, VAGY LEHET TENGELYRE MERŐLEGES EGYENES SZAKASZ KÖZTÜK.

Ha: $\int_{f_x}^{g_x} f\, dy$:



AZ EGYIK GÖRBÉTŐL GÖRBÉIG, A MÁSIK SZÁMTÓL SZÁMIG

• HA A TARTOMÁNY KÖR, VAGY ELLIPSZIS, AKKOR POLÁRRA KELL ÁTTÉRNI: (POLÁRBAN TÉGLALAP LESZ)

a) KÖR:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

így:

$$\iint_{\Omega} f(x,y) = \iint_{\Omega'} f(r,\varphi) \det J \; dr\, d\varphi$$

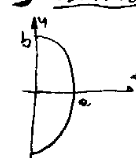
↑ JAKOBI MÁTRIX.

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r$$

ekkor r-szerint $0 \dots R$ ig, φ-szerint $0 \dots 2\pi$ ig kell integrálni.

$$\iint_{\Omega} f(x,y) = \iint_{\Omega'} f(r,\varphi) \cdot r \; dr\, d\varphi$$

b) ELLIPSZIS:



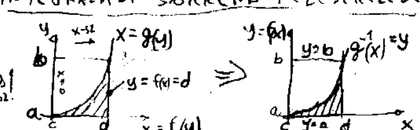
$x = a\, r \cos\varphi$

$y = b\, r \sin\varphi$

$\det J = a b r$

$$\iint_{\Omega} f(x,y) = \iint_{\Omega'} f(r,\varphi)\, abr \; dr\, d\varphi$$

INTEGRÁLÁSI SORREND FELCSERÉLÉSE:



$$V = \int_a^b \int_{g(y)}^{d} f \; dx\, dy \Rightarrow V = \int_c^d \int_{a}^{g(x)} f \; dy\, dx$$

INTEGRÁL-TRANSZFORMÁCIÓK

2 VÁLTOZÓ: TARTOMÁNY EGYSZERŰSÍTÉS

$$\iint_{\Omega} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \iint_{\Omega'} f(\bar{g}(\bar{y})) \det J \; d\bar{y}$$

$\bar{x}$ változóról $\bar{y}$-ra térünk át

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

n változó → n függv.

$\bar{x} = \underline{\underline{T}} \cdot \bar{y}$

$\bar{x} = \bar{g}(\bar{y})$

VÁLTOZATOK:

1. POLÁR KOORDINÁTÁK (leírtam már)

2. BÁRMI MÁS:
2 GÖRBEPÁR KÖZÖTT
Az 1 görbepárba tartozó görbék egyenletei 1 paraméterben térnek el
- A görbepár a paraméter nélkül az egyik új változó. értéke a PARAMÉTER.
- A másik változó a másik görbepár értéke szintén a paraméter.
- A görbepár egyenletét IMPLICIT ALAKBAN kell keresni
- Az új változókból ki kell fejezni x, y-t. Majd behelyettesíteni $f(x,y)$-ba

$$\int_{\Omega} f(x,y) = \int_{\Omega_1} f(u,v) \det J \, du\, dv$$

- AZ „IMPLICITBE ALAKÍTÁS":

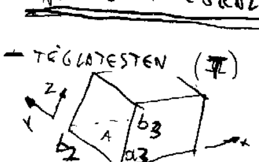
$a = \varphi(x,y)$ — $a \neq 0$ általában egyik görbe
$b = \Phi(x,y)$ — másik görbe
$u = \phi(x,y)$

így a, és b között változik az u értéke (a paraméter a, és b voltak)

- AZ $u = m(x,y)$ és $v = p(x,y)$-BÓL $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$:
1) m-ből y-t kifejez, beleh-ba. ebből x kifejezés az g
2) p-ből x-et [illegible] bele g-be $\Rightarrow y = h(u,v)$

HÁRMAS INTEGRÁLOK

— TÉGLATESTEN (T)



A – alap terület.

$$I = \iiint_T f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_A f(x,y,z)\, dx\,dy \right) dz = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Sorrend felcserélhető, ha tégla (vagy akár)

— NORMÁLIS TARTOMÁNYON:

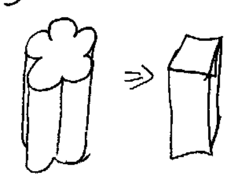
$$I = \int_{z_1}^{z_2} \int_{h(z)}^{k(z)} \int_{f(y,z)}^{g(y,z)} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

egyik határfelülettől a másikig. felület adott.
egyik görbétől a másikig

fokozatosan csökken a változók száma.

KOORDINÁTATRANSZFORMÁCIÓK

1.) HENGERKOORDINÁTÁK

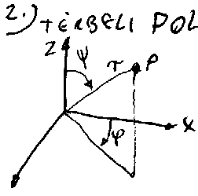


$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = t$

(x,y)-ra polárkoordinátára

$\det J = r$

2.) TÉRBELI POLÁR:



$(x,y,z) \to (r,\psi,\varphi)$

$x = r\sin\psi\cos\varphi$
$y = r\sin\psi\sin\varphi$
$z = r\cos\psi$

$r > 0$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ $\quad 0 \le \psi \le \pi$

GÖMB → TÉGLATEST

$\det J = r^2 \sin\psi$ (pszi)

$\boxed{f(y) = 1 = x}$

HA y = VALAMI: AZ $f(x)$
HA x = VALAMI: AZ $g(y)$

$\int$: (x szerint $f(y)$-tól $g(y)$-ig
y szerint számtól számig 2 y érték)
VAGY
(y szerint $f^{-1}(x)$ -tól $g^{-1}(x)$-ig
x szerint számtól számig 2 x érték)

EGYSÉGGÖMB (0 KÖRÜL)
$x^2+y^2+z^2=1=R^2$
(EGYSÉGKÖR: $x^2+y^2=R^2$)

SÍKKAL PÁRHUZAMOS SÍK
HOL ÉRINT?

- sík egyenletéből
$\frac{\partial f}{\partial x} = áll = ? = a$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = áll = ? = b$
- TESTBŐL:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = a \\ \frac{\partial f}{\partial y} = b \end{array}\right\} \text{egyenletrendszer}$$

- HA f IMPLICIT, AKKOR:

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ kell!

- MEGOLDÁS PONTOK, VAGY Z EGYENES (GÖRBE MENTÉN) VETÜLETI EGYENES!
(2 vetületi görbéből 1 3D görbét kell csinálni. ADOTT x-re y, és z érték lesz z függvény:
$z = f(x)$
$y = g(x)$
- ezt bele az eredeti függv. felület egyenletébe, így az 1 1 változós egyenlet. Megoldani x-re. akkor y, z itt érinti a sík.

INTEGRÁLÁSI TARTOMÁNY FELÍRÁS

$y < f(x)$
$y > g(x)$
(VAGY $x \le h(y)$ ...)

ALAKRA HOZNI
MAJD AZ Z GÖRBE:
$y = f(x)$
$y = g(x)$
a reláció adja meg, hogy melyik oldalt kell figyelni

(Ha $y^2 = f(x)$ VAN, AKKOR $y = \pm\sqrt{f(x)}$!)

- HELYVEKTOR:

$\underline{r} = x\underline{i} + y\cdot\underline{j} + z\cdot\underline{k}$

- VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNY

$\underline{r}(t)$ valós számon a vektor TEKGÖRBE

$\underline{r} = x(t)\,\underline{i} + y(t)\cdot\underline{j} + z(t)\cdot\underline{k}$

(így is felírható)

$x(t), y(t), z(t)$ bármilyen $f(t)$ függvények.

GRAFIKON

t végigfut 1 intervallumon, addig r 1 térgörbén fut végig.

(t paraméteres $\underline{r}(t)$ függvény)

- HATÁRVEKTOR

$\lim_{t\to t_0} \underline{r}(t) = r_0$ t_0-nál r, hoz tart

- folytonosság

t_0-ban folytonos

ha $\lim_{t\to t_0} \underline{r}(t) = r(t_0)$

(HAT. ÉRT. = FÜGGV. ÉRT.)

- DIF. HATÓSÁG:

$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$

- ÉRINTŐVEKTOR

$\dot{r}(t_0)$ a $r(t)$ érintőv. t_0-ban

- ÍVHOSSZ (S)

$$S = \int_a^b |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt$$

$$= \sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2}$$

- 2 VÁLTOZÓSAN $\underline{r}(u,v)$ FELÜLET

$= x(u,v)\,\underline{i} + y(u,v)\,\underline{j} + z(u,v)\,\underline{k}$

- PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \dot{\underline{r}}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\underline{k}$$

- REGULÁRIS PONT

P_0 reg. p.-ja a felületnek ($\underline{r}(u,v)$)

ha:

$$\underline{n}(u_0,v_0) = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{u_0 v_0} \times \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{u_0 v_0}$$

NORMÁLVEKTOR

- FELSZÍN: (felületdarabé)

$$A_{(T)} = \iint_T \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$$

- VEKTOR-VEKTOR FÜGGVÉNY $\underline{v}(\underline{r})$

VEKTORMEZŐ. MINDEN (3D) vektorhoz hozzárendel 1 másik vektort.

$\underline{r} = r(x,y,z)$

$\underline{v}(\underline{r}) = v_1(x,y,z)\,\underline{i} + v_2(x,y,z)\,\underline{j} + v_3(x,y,z)\,\underline{k}$

3 FÜGGVÉNY ÖSSZEGE (·i,j,k)

- DIVERGENCIA: (FÜGGVÉNY)

$$\mathrm{DIV}\,\underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

- ROTÁCIÓ: (VEKTORMEZŐ)

$$\mathrm{ROT}\,\underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

örvény van (zárt vonalak) ha $\mathrm{rot}\,v \neq 0$

- GRADIENS! (VEKTORMEZŐ)

$$\mathrm{GRAD}\,\underline{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

~~VEKTOR-SKALÁR~~

SKALÁR-VEKTOR FÜGGVÉNYNEK!!!

- LAPLACE

$$\Delta = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,v = 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,v = 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,v = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,v - \Delta$

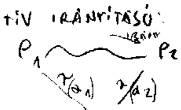
$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,v = \Delta$

HA $\mathrm{DIV}\,\underline{V} = 0$ AKKOR

$\underline{W} = \mathrm{rot}\,\underline{V}$ és $\mathrm{rot}\,\underline{W} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{V}$

- GÖRBÉK

- POZITÍV IRÁNYÍTÁSÚ:



ha $\alpha_1 < \alpha_2 \to P_1$ megelőzi P_2-t

<HELYESSÉG>

- REKTIFIKÁLHATÓ GÖRBE

HA 2 PONTJA KÖZÖTTI távolságOK

$S_n = \sum |\underline{r}(\alpha_i) - \underline{r}(\alpha_{i-1})|$ BÓL:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ - ÍVHOSSZ.

- ÍVHOSSZ: GÖRBE MENTI INTEGRÁL

$$S = \int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

(koordináta erő hatására végzett munka) vonal mentén haladva.

$$= S = \int_\alpha^\beta \underline{v}(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta X(\;)\dot{x}(t) + Y(\;)\dot{y}(t) + Z(\;)\dot{z}(t)\, dt$$

- POTENCIÁL

$\Phi(\underline{r}) = ?$ $\underline{v}(r) = \mathrm{grad}(-\Phi)$

Φ a v-nek a potenciálja.

NEWTON-LEIBNIZ:

$$\int_a^b \underline{v}(r)\, d\underline{r} = \Phi_{(a)} - \Phi_{(b)}$$

akkor van Φ T tartományban, ha $\oint \underline{v}(\underline{r})\, dr = 0$

$\Phi = \int_{\widehat{AB}} \ldots$ $\widehat{AB}$ ív 1 hosz (zárt görbe)

$$-\Phi(\underline{r}) = \int_a^b \underline{E}(r)\, d\underline{r} \quad \underline{E}(r) = \frac{r}{|r|^3}$$

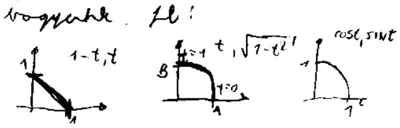
akármilyen görbe mentén

- a $\underline{r}(t)$ függvény:

$r(t) = (x(t), y(t))$

az x, y-ra t végig a t végigfut a-tól b-ig

úgy legyen az hogy a görbén végigmenjen fel!



- feladat

$\underline{v}(r) = (\;, \ldots, \ldots)$

$g(t) = (x(t), y(t), z(t))$

ezek FÜGGVÉNYT VAN OTT x, y, z - VAN

$x(t) = x$

t g-ben v-ben

A-ban $t=0$ B-ben $t=$ valami

$$S = \int_A^B v(r)\, dg = \int_A^B v(g(t))\, \dot{g}(t)\, dg$$

$$= \int \left(a(x(t), y(t), z(t)), b(x(t), y(t), z(t)), c(x(t), y(t), z(t))\right)(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\, dt$$

(Másképp:

$S = \int_a^b v(r(t))\, \dot{r}(t)\, dt$)

- FELÜLET

2 váltos függvény $f(u,v)$ hez rendelt vektorok. TOVÁBBRA IS vektormező

$$f(u,v) = a(u,v)\,\underline{i} + b(u,v)\,\underline{j} + c(u,v)\,\underline{k}$$

$$\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

a normálvektora a felületnek érintősíkra merőleges, kifelé mut.

$$\int_F \underline{v}(\underline{r})\, df$$

az adott felületen áthaladó folyadékmennyiség, ha $v(r)$ - sebesség

$$\cancel{\int_F v(r)\, df = \iint_D \left(a(x,y,z),\, b(x,y,z),\, c(x,y,z)\right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial}{\partial \partial v}, \frac{\partial}{\partial u v}\right) du\, dv}$$

~~JACOBI DETERMINÁNSOK~~

$$\int_F v(r)\, d\underline{f} = \iint_A v(r(x,y,z))\, \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= \iint \left[v(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \ldots \right] \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\, du\, dv$$

$$= \iint_A -X(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x} - Y(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y} + Z(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy$$

A tartomány xy síkban.

- GAUSS TÉTEL:

$$\iint_F \underline{v}(r)\, d\underline{A} = \iiint_V \operatorname{div} \underline{v}(r)\, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

(felület) (zárogat)

ha $\operatorname{div} v(r)$ folytonos.

- GREEN TÉTEL:

$$\iint_T \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int_L -g(x,y)\, dx + P(x,y)\, dy$$

- STOKES TÉTEL

F - felületnek L határgörbéje.

$$\int_L v(\underline{r})\, d\underline{r} = \iint_F \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r})\, df$$

- FELÜLET PARAMÉTEREZÉSE

FELÜLET SZÖVEGBŐL →

● HENGER:

henger: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$

KÚP:

$$r = \left(1 + \frac{z}{2}\cos\varphi,\ 1 - \frac{z}{2}\sin\varphi,\ z\right)$$

• abc ellipszoid

a=b=c GÖMB:

$$A = 4r^2\pi$$

$$r(\omega,\varphi) = (a \sin\omega \cos\varphi,\ b \sin\omega \sin\varphi,\ c \cos\omega)$$

$$A = \iint \left| \frac{\partial r}{\partial \omega} \times \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right| d\omega\, d\varphi$$

-
$$\int_F v(r)\, df = \int v(r(u,v))\, \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\, du\, dv$$

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

- $\mathbb{C}$ komplex számok $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- Z' torlódási pontja 1 halmaznak, ha Z' bármilyen kis környezetében a halmaznak végtelen sok eleme van

- Nyílt halmaz: minden pontja belső pont.

- SOROZATOK:

$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ KONVERGENS, HA (Z_n korlátos) ha $|z| < K$

$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z$ ha $|z - z_0| \to 0$

Külön a valós és a képzetes rész is konvergens kell legyen!

$x_n \to x \quad y_n \to y$

$Z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$

$z_n \to Z$ ha $r_n \to r$

$\varphi_n \to \varphi$ (FŐÉRTÉK)

$x_n \to x$

$y_n \to y$

$Z_n \to 0$ ha $r_n \to 0$ (φ_n tetszőleges)

- SOROK (csak ha $z_n \to 0$)

$\sum Z_n < K$ akkor KONVERGENS

$\sum |z_n| < K$ akkor ABS KONV.

- ELEMI FÜGGVÉNYEK:

$z^n \quad z^0 = 1$ ha $z \neq 0$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad \boxed{(e^z)' = e^z}$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad \boxed{e^{z+2\pi i} = e^z}$

$tg\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ DERIVÁLTAK MINT A VALÓSNÁL

$sh\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$ch\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

- határértékek:

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ha $|f(z_n)| \to \infty$

- egyenletesen folytonos $f(z)$ ha $|z_1 - z_2| < \varepsilon \overset{\exists}{\Rightarrow} |f(z_1) - f(z_2)| < \delta$

- DERIVÁLÁS:

$f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$

- $f(z)$ ∞-ben diff-ható, ha $f\left(\frac{1}{z}\right)$ diff-ható 0-ban.

- $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

f DIFF-HATÓ z_0-ban, ha U,V, $x_0 y_0$-ban

$\dfrac{d}{dz} f = f'(z) = \dfrac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x_0 y_0} + i\,\dfrac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x_0 y_0}$

és $\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}\right\}$ CAUCHY-RIEMANN EGYENLETRENDSZ.

ÚJRA

- KOMPLEX SOROZAT: TERMÉSZETES SZÁMOK → KOMPLEX határértéke komplex szám (∄) ha h adott környezete a sorozat ∞ elemét ($\infty - n = \infty$) tartalmazza.

- ha $\lim Z = h$ akkor $\lim \overline{Z} = \overline{h}$

- $\sum\limits_{n}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ ha $|z| < 1$

- $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

KANONIKUS FÜGGVÉNY-ALAK

átalakítás ilyenné:

- behelyettesítés: $z \to z = x + iy$
- szétválogatás valós és képzetes részre

visszaalakítás:

- magában x, y ne álljon, csak mindenhol $x + iy$
- $x + iy = z \quad x - iy = \overline{z}$

$x^2 + y^2 = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

- $f(z)$ folytonos z_0 helyen, ha:
  - értelmezve van ott f.
  - $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = z_0$ (∃)
  - vagy ha $\overline{f(z)}$ folytonos ott.
  - vagy ha $f(x)$, $f(y)$ külön az.

- $f'(z) = \lim \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$

~~$f(z)$ akkor diff-ható~~ $\frac{\partial f}{\partial z}$

- $f(z)$ akkor diffható $z_0(x_0 y_0)$-ban ha $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{-\partial V}{\partial x}$

- $f'(z) = \dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} - i\dfrac{\partial U}{\partial y}$

- ANALITIKUS $f(z)$ ha: (T-ben) T minden pontjában DIFF-ható.

- $g(x,y)$ (pl.: $U(x,y), V(x,y)$ $\;f(z) = U + iV$)

HARMONIKUS FÜGGVÉNY, ha $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$

- adott $\rho(x,y)$ függvény.

$f(z) = U + iV$ a ρ-nak KOMPLEX POTENCIÁLJA, ha

$\text{grad}\, U(x,y) = \rho(x,y) = -i\,\text{grad}\, V$

(akkor $\text{rot}\,\rho = \text{div}\,\rho = 0$)

$\rho(x,y) = \rho(z) = \overline{f'(z)}$

(ahol $f(z)$ a POTENCIÁLJA $\rho(x,y)$-nak)

- KOMPLEX FÜGGVÉNYEK: 1ik síkból LEKÉPEZNEK 1 másik síkba.

- $f(z) = Az + b$:

R sugarú kört átvisz $|a| \cdot R$ sugarú körbe.

z^2: a 0 kp-ú félkörökat 0 kp-ú körökbe viszi át.

$1/z$: az $(r, \varphi) \to \frac{1}{r}, \varphi$-be.

- leképezés ($f(z)$) szögtartó z_0-ban, ha a z_0-ban metsző egyenesek szöge(d), $f(z_0)$-ban is d.

kicsiben aránytartó, ha $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{l_1'}{l_2'}$

- KONFORMIS LEKÉPZÉS szögtartó, és kicsiben aránytartó.

— VONALINTEGRÁLÁS: $f(z) = U + iV$

• SEGÉDVEKTORMEZŐKKEL:

$\underline{R}(t) = U(x,y)\,\underline{i} - V(x,y)\,\underline{j}$

$\underline{I}(t) = V(x,y)\,\underline{i} + U(x,y)\,\underline{j}$

$$\int_G f(z)\,dz = \int_G \underline{R}(t)\,d\underline{r} + i \int_G \underline{I}(t)\,d\underline{r}$$

• paraméteresen:

$f(t) = Z(t) = x(t) + i\,y(t)$

(ekkor: $\dot{Z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$)

$$\int_G f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt$$

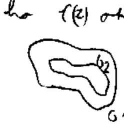
— függvény analitikus 1 PONTBAN, ha a pontban a környezetében is. (reguláris függv.)

— ha $f(z)$ analitikus, G zárt

$$\oint_G f(z)\,dz = 0$$

— analitikus függvény görbe menti integrálja csak a végpontoktól függ.

— ha $f(z)$ analitikus: (G_2 belül van G_1-en) akkor



$$\oint_{G_1} f(z)\,dz = \oint_{G_2} f(z)\,dz$$

— vagy $f(z)$ ANAL.

akkor:

$$\oint_{G_1} f(z)\,dz = \sum_i^n \oint_{G_i} f(z)\,dz$$

K. HATVÁNYSOROK

— $\sum_n^\infty c_n z^n$ K. HATVÁNYSOR

$\sum_n c_n (z-z_0)^n$ — " —

ha $\sum c_n (z-z_0)^n < K < \infty$ akkor z_0-ban konvergens a hatványsor

ekkor A KONVERGENCIATARTOMÁNY: $[z_0 - r, z_0 + r]$ intervallumon

nincs értelme → z_0 körüli r sugarú körben konvergens.

KONVERGENCIASUGÁR:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z)\big|_{z_0}}{n!}$$

— pl. $f(z) = \frac{1}{1-z}$

TAYLOR SORA $\sum z^n$

konvergens $|z| < 1$-re

— SORFEJTÉS

$f(z) \to c_n$ (n darab)

$f(z) = \sum c_n (z-z_0)^n$

ahol: $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

— ha $f(z)$ z_0-ban nem, de másutt ANALITIKUS, akkor z_0 IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELY.

• megszüntethető

• PÓLUS

— ha $f(z)$ analitikus z_0 körüli ~~környezetében~~, (körben)

akkor:

$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$

(LAURENT SOR) $\quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

G tetszőleges zárt görbe, ami z_0-t + irányban megkerüli

— izolált szinguláris hely megszüntethető, ha a LAURENT sornak csak + indexű elemei vannak.

• vagy akkor k-adrendű PÓLUS, ha minden a_{-k}-nál ⊝abb elem $= 0$.

• vagy LÉNYEGES SZING. HELY, ha minden $a_{(-k)} \neq 0$

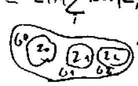
— z_0-hoz tartozó REZIDUUM:

$$\mathrm{Res}(z_0) = \mathrm{res}[f(z), z_0] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z)\,dz$$

— REZIDUUM TÉTEL:

$f(z)$ L görbén belül n db SZINGULÁRIS PONT kivételével mindenütt analitikus

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i^n \mathrm{Res}(z_i) = \sum_i^n \oint_G f(z)\,dz$$



— ha $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$

akkor $\mathrm{res}[f, z_0] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

DIFFEGYENLETEK

– DIFFEGYENLET:
amiben a FOLYAMATOT leíró ismeretlen függvény, és deriváltjai szerepelnek (MI?)

– Ha az ismeretlen függvénynek 1 változós, akkor KÖZÖNSÉGES diffegyenlet $\varphi(x)=?$ (ha nem akkor PARCIÁLIS)

– $y^* = \varphi^*(x,c)$ c – paraméteres görbesereg

$c = C(x,y)$

$y' = \varphi'(x,c) \to y' = \varphi'(x, C(x,y)) = \varphi'(x,y)$

$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(x,y)\big|_{y=y_0} dx$

– LINEÁRIS elsőrendű, ha $y' = f \circ g \circ h\,(x,y)$

f, g, h ismert függvény

– $y' = f(x,y)$

megoldása $y = \varphi(x)$ (teljesül $y' = f(x, \varphi(x))$)

– SZINGULÁRIS MEGOLDÁS:
$\varphi(x) = \varphi_0$ állandó, ha $y' = f(x, \varphi_0) = 0$

– 1 ellen megoldás: PARTIKULÁRIS
egyiknek sok VAN.

– $y' = f(x) \to \varphi(x) = \int_{x_0}^x f(x)\,dx + c$

– $y' = f(y)$

$\varphi(x): y = x \to \frac{d}{dx} f^{-1}(y) \xrightarrow{\int^x} \varphi^{-1}(x) \xrightarrow{ARC} y = \varphi(x)$

Ugyanez:
$\varphi(x) = ARC \int_0^x \frac{1}{f(y)}\,dy$

– P_0 PONT VONALELEM:
$P_0(x_0, y_0)$ és $f(x_0, y_0)$-lal együtt
a vonalelemek összessége: IRÁNYMEZŐ.

– $f(x,y) = C$ 1 PARAMÉTERES GÖRBESEREG
$f(x,y) = C_i$ – 1 GÖRBE (IZOKLINA)
ami minden izoklinát merőlegesen metsz:
ORTOGONÁLIS TRAJEKTÓRIA.
sok helyen metszheti, ezért ez is GÖRBESEREG.

– $y' = f(x,y)$ $\underbrace{y(x_0) = y_0}_{\text{kezdeti feltétel}}$

KEZDETÉRTÉK-FELADAT
(x_0, y_0 kezdeti értékek)

a DE. megoldásai függőlegesen eltolhatóak.
ha kezdeti feltétel van, akkor az a megoldás kell, ami átmegy a rögzített $P_0(x_0, y_0)$ ponton.
CSAK 1 ILYEN P_0 VAN

– SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DIFFEGYENLETEK: (SZEPARÁLHATÓ)

$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

MEGOLDÁS: ($x_0\, y_0$ KEZDETIÉRTÉK)

$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$

- INTEGRÁLUNK
- y-t kifejezzük
- $y = \varphi(x)$

– SZÉTVÁLASZTHATÓRA VISSZAVEZETHETŐ:

- $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel.

$u' = \frac{f(u) - u}{x}$

MEGOLDÁS:
$\varphi(x) = x\,\Psi(x)$ ahol
$\Psi(x)$ KEZDETI ÉRT.F. TELJES MEGOLDÁSA.

- $y' = f(Ax + By + C)$

$u = Ax + By + C$ helyettesítéssel

$u' = A + B\,f\,u$

$\varphi(x) = \frac{\Psi(x) - Ax - C}{B}$

- $y' = f\left(\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right)$

és $\det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} x = u + a_0 \\ y = v + b_0 \end{array}\right\}$ helyettesítés

$\dot{v} = f\left(\frac{A_1 u + B_1 v}{A_2 u + B_2 v}\right)$

– KEF teljes megoldása ?????

– DIFFEGYENLET-ÁTALAKÍTÁS
n-edfokú 1 db = n db 1. fokú.

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(n)} = f(t) \Rightarrow \dot{x}_i = x_{i+1}$

$\Downarrow$ (vagy) $\{i = 1 \ldots n-1\}$

$\dot{x} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}(t)$ $\dot{y}_n = f(t) - \sum a_i x_i$

MEGOLDÁS:
$x(t) = e^{\underline{A}t} \int^t e^{-\underline{A}t}\, b(t)\,dt$

– LINEÁRIS ELSŐRENDŰ

$y' + g(x)y = h(x)$
(vagy $y' = -g(x)y + h(x)$)

MEGOLDÁS:
$\varphi(x) = y = e^{\int g(x)} \cdot k$

$k = \int h(e^{\int g(x)})$

– az átalakítás:
$x_1 = y$, $x_2 = y' = \dot{x}_1$
így $\dot{x}_1 = x_2$
és $\dot{x}_2 = y'' =$ eredeti
y.-ba x_1-et helyettesíteni.

3. fejezet

Valószínűségszámítás

KOMBINATORIKA

- n-elem sorbarendezési lehetőségei $= n! =$ n elem permutációjának a száma
- n elemből k darabot kiválasztank, ennek lehetőségei: VARIÁCIÓK $= \frac{n!}{(n-k)!}$ (sorrend IS!)
- n elemből k ~~darab~~: KOMBINÁCIÓK: $= \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ (sorrend nem számít: azok elemhalmaz)

KÍSÉRLETEK, ESEMÉNYEK

- Kísérlet lehetséges kimenetelei közül 1 BIZONYOS következik be: ÁLLÍTÁS, ESEMÉNY (bekövetkezik vmi. / NEM)
- VAN KOMPLEMENTER ESEMÉNY IS
- 2 ESEMÉNY = HA EGYIDEJŰLEG IGAZAK/NEM
- IGAZAK A MŰVELETEK! $\cup$ VAGY, $\cap$ ÉS, $\cup\setminus\cap$ XOR ... KIZÁRÓ ESEMÉNY
- DEMORGAN ($\overline{A \& B} = \bar{A} + \bar{B}$)
- TÖBB ESEMÉNY PÁRONKÉNT KIZÁRÓ, HA közülük bármely 2 kizárja egymást
- lehet TÖBB esemény egyidejűleg egymást kizáró.
- lehetséges kimenetelek halmaza: ESEMÉNYTÉR

~~megfigyelés, mozzanat~~

- N db KÍSÉRLETBŐL N_A-szor lesz a kimenetel A:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

az A esemény VALÓSZÍNŰSÉGE (relatív gyakoriság)

- $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \& A_2)$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

- PÁRONKÉNT EGYMÁST KIZÁRÓ ESEMÉNYEKRE: $P(A) = \frac{1}{N}$ (n - lehetséges kimenetel)

Ha egyforma valószínűségűek.

- $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$
- FELTÉTEL NÉLKÜLI / FELTÉTELES VALÓSZÍN.

$P(A)$ $P(B|A)$

azok alapfeltevés

Ha B bekövetkezik, azon esetek hányad részében köv. be A

A-NAK B-re vonatkozó feltételes valószínűsége

$$P(B|A) = \frac{N_{A\&B}}{N_A} = \frac{N_{A\&B}}{N_A}$$

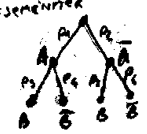
$$P(B|A) = \frac{P(A\&B)}{P(A)}$$

Ez a hányados szabály.

A szorzási szabály:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(A\&B)$$

- GRÁF szerint kirajzolva eseményeket



$P(B|A) = p_1 \cdot p_3$

$P(B) = p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_5$

- TELJES VALÓSZÍNŰSÉG:

$P(B) = P(A\&B) + P(\bar{A}\&B) + \dots$ ha lenne több B

- BAYES FORMULA (fordított irányú valószínűség)

Az A kimenetelű kísérletek közül hány (hányad rész) volt a B ágban?

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \& B)}{P(B)}$$

$\boxed{\text{ÖSSZEKAPCSOLT} \geq 1 \text{ ELEMEKRE}}$

- POINCARÉ - FORMULA

n elemből legalább 1 a helyén van.

$$P = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k}^{k} P(A_{i_1} \dots A_{i_k})$$

- M - STRATÉGIA:

m elem után kiválasztjuk az addigi legnagyobbat: n-ből

$P(\text{a legnagyobbat választom}) = -\frac{m}{n} \ln \frac{m}{n}$

- FÜGGŐSÉG

Ha $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ akkor A, B függetlenek. ilyen eseményekre:

$$P(A\&B) = P(A) \cdot P(B)$$

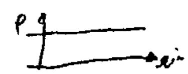
- TÖBB ESEMÉNY együttes bekövetkezésének a valószínűsége: $P(A_i) \cdot P(B_j) \cdot P(C_k) \dots$

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

FÜGGETLEN ESEMÉNYEK

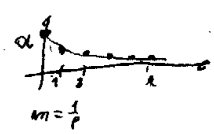
- ELOSZLÁSA

- EGYENLETES ELOSZLÁS:



(lehetséges értékek)

- GEOMETRIAI ELOSZLÁS:



$m = \frac{1}{p}$

$P(k) = a\, q^{k-1}$

$q = \frac{P(k+1)}{P(k)}$

- HIPERGEOMETRIKUS E.:

N db-ból K piros. n-szer húzunk.

$$P(k \text{ db piros}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

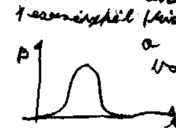
- BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

(n,p) paraméterű (visszatevéses)

(N db kísérlet hányszor lesz k-szoros)

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n-eseményből (kísérletből) k-szor lesz igaz az állítás 1 eseményből (kísérletből) p a kimenetel igaz voltának esélye.



ELTOLÁSA:

<u>Eloszlás MAXIMUMA</u> (BINOM.) (NEHEZEBB)

m – MÓDUSZ (legvalószínűbb érték)

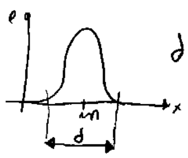
$\boxed{m = \sum x \, p(x)}$

$m =$ eredmények átlaga (kísérletek)

$m = \left[(n+1)\,p\right]$ ← egészrész.

1 kísérletnél p valószínűséggel hiszszük igaznak a kísérlet. n kísérletből legvalószínűbb, hogy m-szer.

$m = np$ ha n = SOK (>30)



$d = 4\sqrt{np(1-p)}$ ha a terület 99%-a bent van.

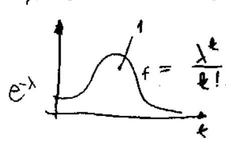
- m a legvalószínűbb érték.
- De ha 99% BIZTOSRA akarunk menni, akkor $m \pm \frac{d}{2}$ ~~intervall~~ intervallumon belül kell lenni. pl szükséges MENNYISÉGET KERESSÜK VALAMINEK akkor $x = m + \frac{d}{2}$

(ahol valószínűleg m elég, de $P(m) \ll 1$) de $P([m-d, m+d]) \lessapprox 1$

- POISSON-ELOSZLÁS (λ-PARAMÉTERŰ)

Sok nagyon kis valószínűségű eseményből hány következik be

$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} n \cdot p = \lambda = m$ – de INKÁBB: $m = [\lambda]$ ← egészrész



$f = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ← $[k]!$

$\lambda = \ln \frac{1}{p}$

- HA n ≥ SOK akkor $\lambda = np$

a BINOMIÁLIS és a POISSON eloszlás közelít. (Egyszer az egyik egyszerűbb, máskor a másik.)

FOLYTONOS ELOSZLÁSOK

$P(\alpha = x) = 0 \quad P(a < \alpha < b) = A$

- $F(x)$ az eloszlásfüggvény: adott x-hez tartozó $F(x)$ azt adja meg, hogy $[0, x]$ intervallumban levés (α) valószínűsége mennyi.

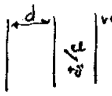
$f(x)$ sűrűségfüggvény: adott x körüli kis intervallumban milyen valószínűséggel lesz $\alpha \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$

$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)\,dx \quad \boxed{f(x_0) \neq P(x_0) = 0}$

- CSILLAGHULLÁS-példa.
adott T idő alatt n darab α – T
„ritkulás idő" POISSON eloszlás
$P(0 < \alpha < x) = ? \quad \lambda = m = T$
$P(0 < \alpha < x) = 1 - P(\ldots)$
$= 1 - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

- $P(a \leq \alpha < b) = F_b - F_a = \int_a^b f(x)\,dx$

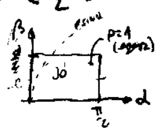
- BUFFON - TŰ - PROBLÉMA



RÁDOBÁLJUK A TŰKET.

P(TŰ METSZ VONALAT)?

Ehhez 2 dolog kell:
$0 < L < \frac{\pi}{2}$
$0 < \beta < \frac{d}{2}$ } egyenletes eloszlásúak legyenek

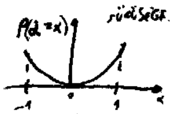


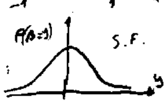
$\beta < \ell \sin \alpha$

$P_{METSZ} = \frac{1}{\pi}$

$P(A) = P\left(\alpha \in [\ldots], \beta \in [\ldots]\right) = \frac{T(A)}{T(\text{teljes})}$
tehát a területek aránya

- PÖRGETTYŰ:



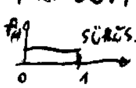


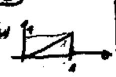
$P(-\infty, y) = \frac{\text{ívhossz}}{\text{kerület}} = F$

$= \frac{2 \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} y}{2\pi}$

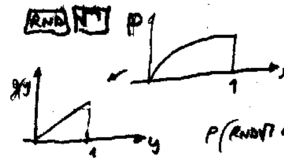
$g(y) = P(-\infty, y)' = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

- RANDOM $\boxed{RND}$ ← számológ.





- $\boxed{RND}\boxed{x^2}$



$P(RND^2 < y_0) = P(RND < \sqrt{y_0}) = y_0^2$

$f(x) = 2x$
$F(x) = x^2$

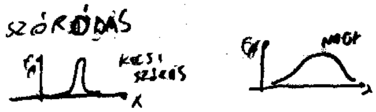
- C-MEDIÁN a sűrűségfüggvény középpontja. (2 egyenlő részre oszt)
ahol $F(c) = \frac{1}{2}$
(POISSON: $e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\ln 2}{\lambda}$)

Ha nem felező pont:
P/Q arányban oszt: p-kvantilis

- VÁRHATÓ ÉRTÉK m (eloszlásnak megf. ...)

$m = \frac{\Sigma \alpha}{N} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

- SZÓRÓDÁS



a) SZÓRÁSNÉGYZET σ^2 (VARIANCIA)

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$

$= \sum_{x=1} x^2 p(x) - m^2$ ← DISZKR.

$= 2.$ MOMENTUM $- m^2$

$(x-m)^2 f(x)$ -ből a 2. fokú tag.

b) SZÓRÁS σ

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (SŰRŰSÉGF. TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA)

- $0 \ldots \Theta$ egyenletes eloszlás.

$f(x) = \frac{1}{\Theta} \quad m = \frac{\Theta}{2} \quad \sigma^2 = \frac{\Theta^2}{12}$

$\sigma = \frac{\Theta}{\sqrt{12}}$

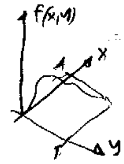
- BINOMIÁLIS ELOSZLÁSRA:

$\sigma^2 = np(1-p) = npq$

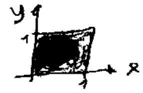
2. MOMENTUM $= \sum_x x^2 p(x)$

$\sigma^2 = \sum_x x^2 p(x) - n^2p^2$

- 2 változós (független) sűrűségfüggvénye: $f(x, y)$



síma 2 változós függvény.



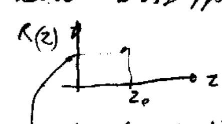
$P((\alpha, \beta) \subset T) = P(\alpha \in \Delta x)\, P(\beta \in \Delta y)$

- $\sqrt{RND1}, \sqrt{RND2}$
$f(x, y) = 4xy$
$P((x, y) \in A) = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy$

- ELOSZLÁSOK TRANSZFORMÁCIÓI
$f(x) \to g(y) \quad (\ldots, \sqrt{}, \frac{d}{dx} \ldots)$
$\ell(x)$ a deformációs függvény.
$g(y) = \ell(f(x))$
de úgy is felfogható, hogy az $x \to y$ transzformál
akkor $g(y) = f(\ell(x))$
eloszlásfüggvénye:
$G(y) = G(\ell(x))$
$g(y) = f(\ell^{-1}(y))\, \ell^{-1\prime}(y)$

Ha $y = F(x)$ a transzf., akkor egyenletes lesz az eloszlás
Ha adott egyenletes eloszlásunk van, de nekünk $F(x)$ $f(x)$ kell: $G(y) = y$ adott
$X = F^{-1}(y)$ az eloszlás
$\alpha = F^{-1}(\beta)$ a valváltozó
ilyen kell.
ennek az eloszlása ilyen lesz.

- $f(x, y)$ kétváltozós sűrűségfügg. annak az eloszlásfüggvénye:



z_0-hoz tartozó szintvonal alatti mélyen térfogat található.

$P(A) = R(z) = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy$

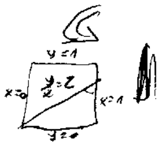
másképp: $= 1 - \iint_{\bar{A}} f(x, y)\,dx\,dy$

A-hányados: $\ell(x,y)=\frac{x}{y}$

a szintvonallal:

ill: $P\left(\frac{Y}{X}<Z\right)=?$

$y = X \cdot Z$

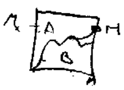


és $x=0,\ y=0$ függvények, amelyek adják a metszéspontokat

- SZINTVONALAK: z_0 szintre (ez 1 szintvonal)

$z_0 = f(x,y) \rightarrow y = \varphi(x, z_0)$

$R(z_0) = \int \int_{k(z_0,y)}^{1} f(x,y)\, dx\, dy \quad x = k(y, z_0)$



$f(B) > f(A)$ teljesül

hogy

$R(z)$ függvény legyen, z_0-t sem helyettesítjük be, hanem paraméterként hagyjuk.

$$R(z) = \int_0^1 \int_0^{g(x,z)} f \; dy\, dx$$

PERSZE HA B tartalmazott topol. $f(x,y)$ különösen a görbe elválasztja rendesen, nem oszlatosan.

- $f(x,y)$ integrálja: (MEGLÉVŐ NAGYOBB ZÁRTSÁG-LEGES PONT ALAPJÁN)

• ha $f(x,y) = g(x)\, h(y)$

~~és~~ és téglalap a tartomány

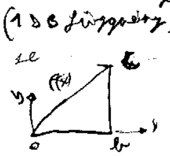
$$\iint f = \int_a^b g + \int_c^d h$$

• ha a tartomány

leírható a szakaszokkal:

sosem szakad meg a szakasz

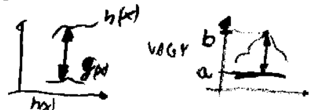
A tartomány olyan legyen, hogy tök mindegy melyik szerint lehessen integrálni (az is függ.) a másikban függvényektől fv.-ig (1 db függvény)



$$1 = \int_a^b \int_0^{f(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

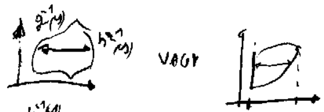
($g(x)$-től $h(x)$-ig y-szerint)

y szerint:



$\int_{g(x)}^{h(x)} f\, dy$ VAGY $\int_a^b f\, dy$

x szerint:



$\int_{\varphi^{-1}(y)}^{h^{-1}(y)} f\, dx$ VAGY $\int_a^b f\, dx$

HA A NYILAT (BAL OSZLOP) OLDALRA MOZGATJUK, NEM VÁLTOZIK GÖRBÉT A VÉGE!!

- FELTÉTELES ELOSZLÁS:

~~$P(x \in A)$~~

• 1 VÁLTOZÓS

$$P(x \in A \mid x \in B) = \frac{P(x \in A)}{P(x \in B)}$$

~~új sűrűségfüggvény~~

ha A részhalmaza B-nek vagy legalábbis van közös részük

így: $P(x \in A \mid x \in B) = \frac{P(x \in A \cap B)}{P(x \in B)}$

új sűrűségfüggv.

$f(x) = f(x \mid \text{feltétel}) =$

$f(x \mid x \in B) = \begin{cases} k \cdot f(x) & \text{ha } x \in B \\ 0 & \text{ha } x \notin B \end{cases}$

$k = \frac{1}{\int_B f}$

$$P(x < A \mid x \in B) = \frac{F_c - F_b}{F_d - F_b}$$

$$P(x \in B) = F_b - F_a$$

• 2 VÁLTOZÓS:

$f(x,y \mid x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]) = \begin{cases} c \cdot f & \text{HA } x \in D \\ 0 & \text{HA } x \notin D \end{cases}$

AHOL $\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_D f \; dx\, dy$

$$g(y \mid x = x_0) = \frac{h(x_0, y)}{f(x_0)}$$

VAGY:

$$P((x,y) \in D_1 \mid (x,y) \in D_2) = \frac{P((x,y) \in D_1 \cap D_2)}{P((x,y) \in D_2)} = \frac{\iint_{D_1 \cap D_2} f(x,y)}{\iint_{D_2} f(x,y)}$$

- STEINER TÉTEL

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 f(x)\, dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx$$

c-módja m-nél dől

- EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS

(λ-paraméterű) $\lambda = \frac{1}{m}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{egyébként} \end{cases}$

- TRANSZFORMÁCIÓ:

$f(x) \rightarrow g(x)$ adott $\ell(x)$ transzf.

$g(x) = f(\ell^{-1}(x))$

$\ell(x)$ így adott: pl. x^2 ...

~~$\ell(x)$~~

- CSILLAGÁSZAT:

~~P m adott (X adott~~

átlagosan ismeretlen $1 = m = \lambda_1$

Tehát $\frac{10}{2}$-s ... $\frac{1}{2}$

~~$P(\ldots)$~~ $m = \lambda \frac{?}{2}$

$P(\frac{10^9}{2}$ alatt $\geq 1)$

$= 1 - P(\frac{10^9}{2}$ alatt $<1)$

$= 1 - \frac{\lambda^0}{[k]!} e^{-\lambda}$ $k = 0$

PEREMELOSZLÁS (vetület e.)

sík → egyenes trafó.
vetítés x vagy y irányban
(a sűrűségfüggvényt.)

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

(peremsűrűségfüggvények)

- a tényleges integrálási határok: ahol a függvény adott, és értelmezve van.
- ha határozottan integrálunk y szerint, akkor y nem marad a függvényben.
- integrálási határ

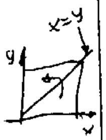
$f(x) = \int_{y_1=}^{y_2=} f\,dy$ és $f(y) = \int_{x_1=}^{x_2=} f\,dx$

$y_1 =$ valami: szám, vagy $f(x)$
x_1 ... $f(y)$

- feladat:

$x = \min(RND_1, RND_2)$
$y = MAX(RND_1, RND_2)$
akkor:

$f_1(x) = \int_{y=x}^{1} f\,dy$



$f(y) = \int_{x=y} f\,dx$

- FELTÉTELES ELOSZLÁS

$f_{2|1}(y|x) =$ valami

HÁNYADIK KOORDINÁTA
FELTÉTEL

az első oszt jelölés, a jobb oldal 1 függvény. Tehát $y = \dots$ ha $x =$ fix.

- HÁNYADOS SZABÁLY:

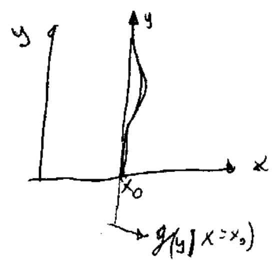
$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$

SZORZÁSI SZABÁLY:

$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_{2|1}(y|x)$

- $f_{2|1}(y|x)$ MÁSKÉPPEN:

$g(y|x=x_0)$ is írható, az azt jelenti, hogy



az volt a FELTÉTELES SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY.

feltételes ELOSZLÁS:

$P(y<y_0 \mid x=x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y|x=x_0)\,dy$

- a feltételes sűrűségfüggv.

$g(y|x=x_0) = \left.\frac{f(x,y)}{f_1(x)}\right|_{x=x_0}$ (HÁNYADOS SZABÁLY)

- $P(x<x_0, y<y_0) = P(x<x_0)\cdot P(y<y_0)$
- $f(x)$, $g(y)$ függetlenek, ha $h(x,y) = f(x)\,g(y)$ ha nem, nem.
- várható érték

$m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

ha transzformált $m(e(x))$:

$m = \int e(x) f(x)$

$\approx \frac{1}{N}\sum e(x)P(x)$

$m(\alpha+\beta) = m(\alpha) + m(\beta)$ (tetszőleges lineáris kombinációra igaz)

- SZÓRÁS (NÉGYZET):

$\sigma^2_{(\alpha+\beta)} = \sigma^2_{(\alpha)} + \sigma^2_{(\beta)} + \underbrace{2\,cov(\alpha,\beta)}_{\text{KOVARIANCIA}}$

$cov(\alpha,\beta) = m_{(\alpha,\beta)} - m(\alpha)\,m(\beta)$

- ha α, β függetlenek, akkor $cov(\alpha,\beta) = 0$
- KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ:

$R(\alpha,\beta) = \frac{cov(\alpha,\beta)}{\sigma(\alpha)\,\sigma(\beta)}$

$R \in [-1;1]$
2 változó közti kapcsolat milyen szoros.
$R=0$: nincs kapcsolat. (korrelálatlanok)

- REGRESSZIÓS GÖRBE:

adott x_0-hoz legvalószínűbb y az 1 görbe. $\ell(x)$

$\ell(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y|x=x_0)\,dy$

- lineáris regresszió: $\ell(x) = \alpha x + b = y$ ilyenkor $\ell(x)$, x adott, $\beta = ?$
- BINOMIÁLIS eloszlás STANDARDIZÁLÁSA: NORMÁLIS ELOSZLÁS

$y = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ + TRAFÓ

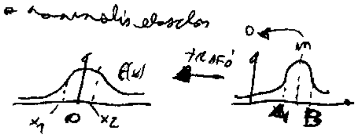
sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Phi(x) = F(x_0) = P(x<x_0) = \int f(x)$ $\boxed{\text{új jelölés } \Phi(x)}$

TÁBLÁZATBÓL ADHATÓ CSAK MEG.

$P(x_1<x<x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

a normális eloszlás



$P(x_1<x<x_2) = \Phi\left(\frac{B-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{A-np}{\sqrt{npq}}\right)$

(MOIVRE-LAPLACE TÉTEL)

$\sigma = 1$

– CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTEL:

Ha 1 eloszlásnak önmagával vett sokadik konvolúcióját vesszük (mérlegeljük a [illegible]) akkor STANDARD NORMÁLIS ELOSZLÁST KAPJUK.

– Ha $\sigma \neq 1$ -et és $m \neq 0$ -t alkalmazunk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

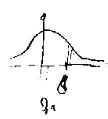
– MARKOV – EGYENLŐTLENSÉG:

$$P(x \geq \varepsilon) \leq \frac{m}{\varepsilon}$$

– CSEBISEV – EGYENLŐTLENSÉG:

$$P(|x-m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \longleftrightarrow P(|x-m| \geq \sigma) \leq 1$$

$$P(|x-m| \ngeq \sigma) = 1$$



– BERNOULLI – EGYENLŐTLENSÉG

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum x_i - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\hookrightarrow P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta$$

– KÜSZÖBINDEX (n_0)

ha $n > n_0$ akkor

az $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság ε pontossággal eléggé ($p = 1-\delta$) megközelíti a várható értéket.

$$n_0 = \frac{\sigma^2}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \delta} \qquad \varepsilon \approx 0{,}0\ldots$$

(n_A-szor következik be az esemény n kísérletből)

tehát BIZONTOS PONTOSSÁGOT (ε) BIZONTOS VALÓSZÍNŰSÉGGEL ($p = 1-\delta$) AKARJUK.

$$p, \delta \to n_0$$

4. fejezet

Számítástudomány alapjai

LESZÁMLÁLÁSOK n-ELEMNEK:

① ISMÉTLÉS NÉLKÜLI PERMUTÁCIÓJA: n elem sorbarendezései $n!$

② ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓ: n típus van, k_i mindegyikből, a k elem sorrendje mindegy, de az n típus sorrendje számít. $\frac{(\sum k_i)!}{\prod (k_i)!}$

③ ISMÉTLÉS NÉLKÜLI VARIÁCIÓ (n elem k-ad osztályú...) n elemből k-t kiválasztunk (1 et csak 1szer) ezeket hányféleképpen, és milyen sorrendekben. $\frac{n!}{(n-k)!}$

④ ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ (n elem k ad osztályú...) n elemből k-t, 1 et akár többször is, kiválasztunk, hányféleképpen választhatunk, milyen sorrendekben? n^k

⑤ ISMÉTLÉS NÉLKÜLI KOMBINÁCIÓ n elemből k-t, 1 et 1szer, sorrend nem érdekel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ (BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓ)

⑥ ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ n ből k-t, 1 et akár többször, sorrend nem érdekel $\binom{n-1+k}{k}$

- BINOMIÁLIS TÉTEL: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

GRÁF $G = (V, E)$ GRÁF = (CSÚCSHALMAZ, ÉLHALMAZ)

$e \in E$ $a, b \in V$ $e = \{a, b\}$ e él a, b közt.

- Az élek átvonala nem fontos csak a végpontok
- HUROKÉL: végpontja a 2 végp
- PÁRHUZAMOS ÉL: UGYANAZ A 2 PONT
- EGYSZERŰ GRÁFBAN NINCS H.É, P.É.
- ÉLEK LEHETNEK irányítottak is, súlyozottak is.

- 2 gráf = ha $G_1=(V_1,E_1)$ $G_2=(V_2,E_2)$ (IZOMORF $G_1 \cong G_2$) ha létezik olyan $V_1 \to V_2$ bijekció, hogy $e=(v_1,v_3) \to E_2(v_2,v_4)$ lesz. minden élre. Tehát $(a,b) \in E_1$ csak ha $(f(a), f(b)) \in E_2$; f az izomorfia.
- csúcs fokszáma: hány él megy bele (hurokél duplán) $d(v)$ $\sum d(v) = 2|E|$ $= n(n-1)$
  G fokszámsorozat: csúcsai fokszámai
- G egyszerű gráfhoz hiányzó élek és G pontjai: $\overline{G}$ (KOMPLEMENTER) G és $\overline{G}$ együtt: (pontokonként) teljes gráf n csúcs → $\binom{n}{2}$ él
- $|V| = v$ elemszám
- ha $e=(v,w)$ akkor v, w szomszédos pontok; szomszédos élek e_1, e_2 ha van közös pontjuk
- reguláris gráf minden pont foka k
- IZOMORFIA IGAZAK: reflexív, szimmetrikus $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_2 \cong G_1$, tranzitív: $G_1 \cong G_2$ $G_2 \cong G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3$
- RÉSZGRÁF: G' G-nek, ha G csúcsaiból, és éleiből kiválasztunk párat. $V' \in V$ $E' \in E$, és E' összes végpontjai is benne vannak
- FESZÍTETT RÉSZGRÁF G-ből (G') kiválasztunk pontokat, (V') és az összes olyan élet, aminek végpontjai V'-ben vannak.
- FESZÍTŐ RÉSZGRÁF összes eredeti pont, és bizonyos élek
- ha a részgráf feszítő és feszített is: $G' = G$.
- ÖSSZEFÜGGŐ GRÁF: bármely pontból bármely másikba el tudunk jutni

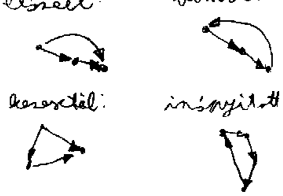
- élsorozat: egymáshoz kapcsolódó élek. 1 üt minden elemével ha van ismétlődés: van ÚT.
- zárt élsorozat, és közbülső pontok nem ismétlődnek.
- egyszerű gráf minden köre ≥ 3
- FÁK legegyszerűbb összefüggő gráfok. Nincs benne kör. Van bennük minimum 2db elsőfokú pont. n pontú fáknak n-1 éle van. 2 pont között 1 út van
- összefüggő gráfban lévő körből 1 élet elhagyva összefüggő marad.
- Minden öf gráfban van feszítőfa.
- ERDŐK: körmentes gráfok. 1 fa is erdő. (nem öf → több fa)
- k komponensű erdőnek n-k éle van
- Minimális súlyú feszítőfa meghatározása. súlyozott élű gráfban. (pl kommunikációs hálózat, ahol különböző költségű átviteli vonalak vannak) ilyen keresése:
  - súly szerint növekvő sorrendben rendezzük az éleket.
  - a fába sorban vesszük be az éleket. a legkisebbtől kezdve.
  - ha kört alkot akkor nem vesszük be.
  - amíg az összes élet meg nem néztük.
- MÁSKÉPP:
  - éleket sorbarendezni súly szerint
  - ugyanúgy sorban rajtuk. ellenőrzés: 2 olyan csúcsot köt össze, ami között még nincs él? Ha igen, bevesszük
- n számozott pontban n^{n-2} db fa van
- teljes gráf max $\binom{n}{2}$ él lehet benne
- SÍKBARAJZOLHATÓ GRÁF: síkba lerajzolható úgy, hogy az élek ne keresztezzék egymást.

van görbbe rajzolható
ha görbbe rajzolható, akkor síkbarajzolható is. (SZTEREOGRAFIKUS PROJEKCIÓ)

- TARTOMÁNYOK: (gráf 1 lerajzolásához tartozó) minimális körök által határolt rész(ek).
  Bármely tartományból képezhető végtelen tartomány
- EULER POLIÉDER TÉTEL: (összefüggő síkgráfokra)
  $n - e + t = 2$
  egyszerű síkgráfokra:
  $e \leq 3(n-2)$
  a legkisebb fokszám max 5 lehet (?!)
- TOPOLÓGIKUS IZOMORFIA
  ha élfelosztásokkal és összevonásokkal ~~izomor~~ izomorfokká tehetők.
- SÍKGRÁF DUÁLISA (konkrét lerajz.)
  G→G' G tartományaihoz a középéből lesz G' pontjai szomszédos tartományok → élek
  $n' = t \quad e' = e \quad t' = n$
- EULER-KÖR: (SÉTA)
  az összes élet lerajzoljuk 1 vonallal. (zárt)
  akkor lehet, ha minden csúcs foka páros, és összefüggő
  EULER-ÚT: nem feltétlenül zárt.
  akkor van, ha 2 kivételével minden csúcs foka páros, és izolált pontot leszámítva összefüggő
- HAMILTON-KÖR (zárt)
  összes csúcsot 1 vonallal érintem, de 1 pontban csak 1szer megyünk
  HAMILTON ÚT: H-KÖR, de nem kör
  Ha van H.K. → k csúcsot törölve max k komponensre esik.
- VÁGÁS: olyan minimális élhalmaz, amit elhagyva a gráf több komponensre esik szét
- GYENGE IZOMORFIA:
  nem izomorfak, de az élek között van 1-1 megfeleltetés, ami kört körbe visz át.
- G DUÁLISAI GYENGÉN izomorfak.

- Ha G, G' gyengén izomorfak, akkor a duálisaik is azok.
- ABSZTRAKT DUÁLIS: G→G'
  ha körből vágás, vágásból kör lesz.
- GYENGE IZOMORFIA:
  ha ilyen transzformációk vannak:
  elvágjuk pontban szétszedjük,
  1-1 ponttal összeragasztjuk
- Ha G, G' gyengén izomorfak, és ≥3 pontot (G) kell elhagyni, hogy több komponensre essen szét, akkor izomorfak is.

GRÁFBEJÁRÁSOK
szerkezet feldenítés. összefüggőség, ha éleit járjuk be (feszítő)
1. MÉLYSÉGI BEJÁRÁS
addig lépkedünk a pontokon, ha nem tudunk továbbmenni, (pl. atlmár jártunk) akkor visszalépünk. Akkor van vége, ha visszajutunk a kezdőpontba, és nem tudunk továbblépni
lépésszám: $c(v+2e)$
lépések fajtái:
előreél: visszaél:
keresztél: irányított kör.



- LEGHOSSZABB UTAK KERESÉSE
  forrásból a nyelőbe.
  (pl. párhuzamos munkafolyamatok a leghosszabb határozza meg a teljes gyártást.)
  PERT-MÓDSZER:
  • Emeletekre bontás
  • emeleten belül kell utakat keresni.
- EMELETEKRE BONTÁS:
  gráfot particionáljuk.
  1 partíció 1 emelet.
  Emeleten belül nincs él.
  Irányított élek csak a magasabb emeleten lévő pontokba mutatnak.

- forrás: csak kifelé mutató élek vannak
  befok = 0 kifok ≠ 0
  nyelő: fordítva.
- Ha van irányított kör benne, akkor nem bontható emeletekre

- $\Sigma d(v) = 2e = n(n-1)$
  tetszőleges gráfban.

- PRÜFER KÓD:
  számozott csúcsú gráfból. (FÁBÓL)
  a legkisebb indexű elsőfokú ponttal kezdjük
  • 1. csúcs: írni a szomszédja? leírjuk (a szomszédot) és azt kitöröljük a fából
  • 2. csúcs: ugyanígy.
  • a végén leírjuk az utolsó (n.) csúcsot.
  n-1 hosszú lesz.
  visszaalakítás:
  • leírjuk a p.kódot
  • sorba alá új számok kerülnek: →LÉPÉS / ok
  az aktuális elem alá írjuk a p.k.-ban (az aktuális elemben és a tőle jobbra lévő elemekben) nem szereplő legkisebb számot, amit még nem írtunk le.
  • így megkapjuk az összekötést. (számpárok)
  • a pontok nyilvánvaló 1..n

-----46.oldal-----

- SÍKBARAJZOLHATÓ GRÁFOKRA
$\chi(G) \le 4$
$\chi(G) \le 5$ még egyszerűen bizonyítható.

- m osztályú gráf:
2-osztályú PÁROS (2 részre)
m-oszt: (m részre oszt.)

- KERESÉS
min $\log_2 n$ összehasonlítás kell, hogy mindig megoldjuk a keresési feladatot.
- BESZÚRÁS
KERESÉS $+(n-1)$ db eltolás (legrosszabb eset)
- SORBARENDEZÉS:
~~[illegible]~~ MAX $n \log_2 n$ összehasonlítás
- ÖSSZEFÉSÜLÉSES RENDEZÉS
2 részre vágjuk az eredeti tömböt: k, és l hosszú. Összehasonlítjuk a 2 tömb legkisebb elemét, és azt tesszük az új tömbbe. ($n \log_2 n$ db összehas.)
- BUBORÉKRENDEZÉS:
cn^2 db ö.h.
szomszédokat hasonlítjuk, ha nem jó a sorrendje a 2 elemnek, megcseréljük. Ezt egyre kevesebb elemre, amíg 1-2 elem marad csak.

- SZOMSZÉDOSSÁGI LISTÁK
Minden ponthoz felsoroljuk a szomszédait. 1 közös tömbben tároljuk, és külön tömbben azt, hogy (MUTATÓ) honnan kezdjük a kiolvasást. Ez a 2 tömb a SZOMSZÉDOSSÁGI TÖMB
- IRÁNYÍTOTT GRÁFOKNÁL:
külön adjuk meg, a ponthoz a befutó és a kifutó éleket.

- LÁNCOLT SZ. LISTÁK:
2 db 2e hosszú és 1 db V hosszú
i. ELEM: ha szerepel az i. pont szomszédainak a kiolvasása

Nem értem.

- ELDÖNTÉSI PROBLÉMA → IGEN/NEM
- Az olyan -||- aminek a megoldási ideje felülről becsülhető: P-beli problémák
- NP-~~[illegible]~~ beli problémák: Ha igen a válasz, akkor be tudjuk bizonyítani, hogy IGEN
- $P \subset NP$
- NP nehéz probléma: Minden NP-beli probléma visszavezethető rá(juk).
Ha ez is eleme NP-nek: NP-teljes probléma

- SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE
Minden +szám:
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots$$
ahol p_i prímek, α_i + egészek. (Ez a kanonikus alak)
- 2 szám KONGRUENS, ha ugyanazzal a számmal osztva ugyanazt a maradékot adják.
Az ilyen számok halmaza: MARADÉKOSZTÁLY.
JELÖLÉS:
$a \equiv b \pmod{m}$
(csak ha $a-b$ is osztható m-mel)
- Műveletek megengedettek: $a+c \equiv b+d \pmod{m}$
- $d(a,b)$ legnagyobb közös osztó.
- Ha a mod(m) maradékosztályok mindegyikéből kiválasztunk: mod(m) TELJES MARADÉKRENDSZER
- $a^p \equiv a \mod(p)$

- LINEÁRIS KONGRUENCIÁK:
$ax \equiv b \mod(m)$
$x = ?$
csak akkor oldható meg, ha $d(a,m)$ osztója b-nek.

- H halmaz, akkor H^n a H halmaz elemeiből képzett n hosszú sorozatok (halmaza)
- $H^n \to H$ FÜGGVÉNY n VÁLTOZÓS művelet.
- Ha $a*b = b*a$ akkor ~~[illegible]~~ KOMMUTATÍV
Ha $(a*b)*c = a*(b*c)$ akkor ASSZOCIATÍV.
- Halmazt a rajta értelmezett művelettel FÉLCSOPORTNAK nevezzük ha a művelet ASSZOCIATÍV
- Halmazt műveletével együtt CSOPORTNAK NEVEZZÜK, HA * asszociatív, kommutatív, és $a \cdot a' = e$ ($\exists a'$ hogy..)
- Csoport elemszáma $|G|$ a G RENDJE
- $H \subset G$ RÉSZCSOPORT, HA: G csoport, és H is az. Van valódi és TRIVIÁLIS részcsop.
- k-t tartalmazó legkisebb részcsoport: k által GENERÁLT RÉSZCSOPORT.

- GRÁF MEGADÁSA:

SZOMSZÉDOSSÁGI MÁTRIX $A(G)$

(n×n) $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha i, j pont nem szomsz.} \\ k & \text{ha i, j között k él van} \\ l & \text{ha i=j l db hurokél} \end{cases}$

- ILLESZTKEDÉSI MÁTRIX $B(G)$

(n×e) $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha j. él nem ill. i. pont} \\ 1 & \text{ha j. élnek i. p. a kezdőp.} \\ -1 & \text{ha j. élnek i. p. a végp.} \end{cases}$

- HÁLÓZATI EGYENLETEK KÖRMÁTRIXSZAL TÁROLHATÓK. $C(G)$

$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha j. él nem eleme i. körnek} \\ 1 & \text{ha igen, és megegyező irányú} \\ -1 & \text{ha igen és ellenkező irányú} \end{cases}$

- SÍKBARAJZOLHATÓ GRÁFOK

$e \leq 3n-6$

fokszám ≤ 5

~~G síkbarajzolható~~

G síkbarajzolható akkor a kell izomorfak is ezek (gyengén i.)

PÁROSÍTÁSOK

- GRÁF PÁROS, HA pontjai 2 részre oszthatók úgy, G minden éleinek egyik végpontja A, másik B-ben van.
- Csak akkor páros 1 gráf, ha benne minden kör páros hosszúságú.
- A körök pontjai felváltva vannak A-ban és B-ben.
- A, B megadása: választunk 1 pontot. (Ez A első pontja) Minden szomszédját tegyük B-be, annak minden szomszédját A-ba. így tovább.

- PÁROSÍTÁS: M élhalmaz ha semelyik 2 élnek nincs közös pontja. (független élek)
- TELJES PÁROSÍTÁS: G minden pontját lefedi.
- $N(X)$ X ponthalmaz szomszédai
- Csak akkor van (A-t lefedő) párosítás, ha minden $X_0 \in A$ részhalmaznak max annyi eleme van, mint ahány szomszédja az elemeinek
$|N(X_0)| \geq |X_0|$
- JAVÍTÓ ÚT: élhalmazt lefedő párosításhoz új élet vehetünk hozzá.
- GRÁFBAN csak akkor van teljes párosítás, ha $|A|=|B|$ $|N(X)| \geq |X|$
- LEFOGÓ PONTHALMAZ G minden élének legalább egyik végét tartalmazza.
- LEFOGÓ ÉLHALMAZ: minden pontot lefog.
- FÜGGETLEN PONTHALMAZ: elemei közt nincsenek élek (pl páros gráf 2 iker)
- legalább annyi lefogó pont van, mint független él.
- legalább annyi lefogó él, mint független pont
- lefogó + független pontok $= n$
- lefogó + független élek $= n$
- $|\text{független élek}| \leq |\text{lefogó élek}|$
- Csak akkor van teljes párosítás, ha... akárhogy hagyunk el néhány pontot, a páratlan komponensek száma $\leq k$

- G 2-szeresen élösszefüggő, ha bármely élet elhagyva összefüggő marad.

HÁLÓZATI FOLYAMOK

- HÁLÓZAT: gráf, forrás, nyelő, élsúly (kapacitás)
- $f(e)$ kihasználtság (élek)
- m majdnem ugyanez ?
- $c(e)$ kapacitás
- teljesítés

$m(c)$

- Max értékű folyam meghatározása. kiszámolás m; minimális ... máshol!

akkor max, ha nincs javító s-ből t-be

- VÁGÁS ÉRTÉKE az s részből kiálló kapacitások összege. Csak a kifelé mutató élek.
- Max folyam értéke = max vágás értéke

GRÁFOK SZÍNEZÉSE

- G k-színnel színezhető, ha ki lehet színezni minden csúcsát úgy, hogy a szomszédok más színűek

$\chi(G) = k$ a G kromatikus száma.

- Az azonos színű pontok halmaza a színosztály.
- teljes részgráf: KLIKK

Max méretű klikk pontszáma: KLIKKSZÁM $\omega(G)$

- MAX FOKSZÁM: Δ

$\chi(G) \leq \Delta+1$ (MOHÓ ALGORITMUS)

- G PERFEKT, HA $\chi(G) = \omega(G)$ és minden feszített részgráfjára is igaz.

(ilyen gráfokra könnyű $\chi(G)$ kiszámítása)

- LEGHOSSZABB ÚT KERESÉSE 11
PERTH-MÓDSZER.
- GRÁF (csak 1 forrás, 1 nyelő van, nincs kör) szintekre bontása: (oszlopokra bontás)
Először a nyelőt helyezzük a jobb szélső oszlopba, és elhagyjuk a gráfból. Majd a maradék gráf nyelőit helyezzük egy következő oszlopba így a forrásig.
- balról jobbra haladva meghatározzuk minden tevékenység elkezdésének legkorábbi időpontját: Y jelű pontra:
$T = MAX(t_i + l(e_i), t_k + l(e_k) ...)$
ahol i, k ... az Y-ba mutató pontok, t_i, t_k az i, k. pontok legkorábbi (már meghatározott) kezdési időpontjai. A $l(e_i)$ az i pontból Y-ba mutató él súlya (hossza).
- Ezt ismételgetjük a nyelőig (a forrástól) a nyelő legkorábbi kezdése a leghosszabb út a forrástól a nyelőbe

- Mohó algoritmus: Mindig az aktuálisan legelőnyösebb lehetőséget választjuk.

- Ha G-ben minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$ akkor biztos létezik benne HAMILTON-kör. Ha G-ben van 1 olyan pont, amit elhagyva komponensekre esik szét, akkor nem létezik benne HAMILTON-kör.

Minden nem szomszédos pontpárra: Ha a fokszámaik összege $\geq n$ akkor a gráfban van HAMILTON-KÖR

- Max párosítás keresésére független éleket veszünk be. javító utakkal ...

- MAX FOLYAM KERESÉS
- először legyen minden él kihasználtsága = 0
- javító lépések javító utat [redacted] a max szabad kapacitással növeljük minden él kihasználtságát.
- addig, amíg lehet.
- visszaélek kihasználtságát inkább csökkenteni!
- segédgráfok: minden új állapotot lerajzolni. a segédgráfba csak a változásokat írom

5. fejezet

Fizika

KÉPLETEK: ~~KINEMATIKA~~

KINEMATIKA:

$v=\frac{ds}{dt}$ $a=\frac{dv}{dt}$ $s=\int v\,dt+s_0$ $v=\int a\,dt+v_0$

$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ $\beta=\frac{d\omega}{dt}$ $\varphi=\int\omega\,dt+\varphi_0$ $\omega=\int\beta\,dt+\omega_0$

$s=v_0t+\frac{a}{2}t^2$ $v=\sqrt{2as}$ $v=a\cdot t+v_0$

DOBÁS FELFELÉ $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

$h=v_0t-\frac{g}{2}t^2 \leftarrow t=\frac{v_0}{g}$ $h=\frac{v_0^2}{2g}$

REZGÉS:

$x=A\sin(\omega t+\varphi)$ $\omega=2\pi f$ $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$

$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$ $W=\frac{1}{2}DA^2$

$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$

LORENTZ TRAFÓ — RELATIVISZTIKUS

$x=\frac{x'+v_0t'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ $t=\frac{\frac{v_0}{c^2}x'+t'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ $I=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$

IDŐDILATÁCIÓ X HOSSZKONTRAKCIÓ $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$

$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ $\Delta X=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ $v=\frac{v'+v_0}{1+\frac{v'v_0}{c^2}}$

DINAMIKA

$F=\frac{dI}{dt}=m\frac{dv}{dt}=m\cdot a$ $I=mv$ $E_M=\frac{1}{2}mv^2$

$M=\frac{dN}{dt}=\Theta\beta=\Theta\frac{d\omega}{dt}$ $N=\Theta\omega$ $E_F=\frac{1}{2}\Theta\omega^2$

$\Theta=mr^2=\Theta_s+md^2$

$a_{cp}=-\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$ $F_{cp}=-m\omega^2 r$ $P=F\cdot v=\frac{dW}{dt}$

$F_S=\mu mg$ $W=\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$ $v_k=r\omega$

$W=\int_{r_1}^{r_2}F\,dr$ $E_H=\frac{1}{2}mv^2$

$F_{COR}=2m(\bar{v}\times\bar{\omega})=2mv\omega$

HENGER GURUL LEJTŐN:

lejtő alján v:

$v_{tkp}=\sqrt{2gh\frac{1}{1+\frac{\Theta}{mr^2}}}$

TERMODINAMIKA $\Delta E_b=Q+W$

hőtágulás $\frac{pV}{T}=áll.$ $pV=nRT$ $n=\frac{m}{M}$

$l=l_0(1+\alpha\Delta T)$ $pV=NkT$ $pV\cdot\frac{f}{2}=E_b$

$V=V_0(1+\beta\Delta T)$

$\beta=3\alpha$ ROBERT MAYER: $c_p-c_V=\frac{R}{M}$ KÖRFOLYAMAT: $\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$

$C=cm$ $Q=Lm$ $dS=\frac{dQ}{T}$ $C_Vm\Delta T=C_pm\Delta T-p\Delta V$

ÁLLAPOTVÁLTOZÁS:

IZOTERM

$pV=áll.$

$W=-nRT\ln\frac{V_2}{V_1}=$
$=nRT\ln\frac{p_1}{p_2}$

$\Delta E_b=0,\ Q=W$

$\Delta S=\frac{nRT\ln\frac{V_2}{V_1}}{T}=$

$\Delta S=nR\ln\frac{V_2}{V_1}$

$\Delta S=Nk\ln\frac{V_2}{V_1}$

IZOBÁR

$\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{\Delta T}{T_0}$

$W=p\cdot\Delta V=nR\Delta T=Nk\Delta T$

$\Delta E_b=C_Vm\Delta T=Q+W$

$Q=C_pm\Delta T$

$\Delta S=\frac{C_pm\Delta T}{T}$

$\Delta E_b=C_pm\Delta T-p\Delta V$

IDEÁLIS GÁZ!

IZOKÓR

$\frac{\Delta p}{p_0}=\frac{\Delta T}{T_0}$

$W=0$ $\Delta E_b=\frac{f}{2}V\Delta p$

$Q=\Delta E_b=C_V\cdot m\cdot\Delta T$

$\Delta S=\frac{C_Vm\Delta T}{T}$

REÁLIS GÁZRA $E_R=\frac{f}{2}\cdot E_i$

ADIABATIKUS $pV^{\frac{c_p}{c_V}}=áll.$

$W=\frac{C_VM}{R}(p_2V_2-p_1V_1)$

$\Delta E_b=C_Vm\Delta T$ $pV^{\frac{f+2}{f}}=áll.$

$\Delta E_b=W$ $Q=0$

$\Delta S=0$ $\Delta T=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{nR}$

POLITROP

$pV^n=áll.$

$n=1-\frac{1-\frac{c_p}{c_V}}{\alpha}$

$\alpha=\frac{W}{dE_b}$

KINETIKUS GÁZELMÉLET

$p=\frac{2Nmv_x}{A\cdot\Delta t}=\frac{Nmv^2}{3V}=\frac{2NE_k}{fV}$

$p=\frac{2NmU}{fA\Delta t}$

$pV=\frac{1}{3}Nmv^2=\frac{2}{f}NE_k$ $E_b=\frac{f}{2}NkT=\frac{f}{2}pV=\frac{f}{2}nRT$

SZABADENTALPIA: $G=U+pV-TS$ SZ.E.: $F=U-TS$

$C_V=\frac{f}{2}R$ (MOLÁR) $T=\frac{2E_k}{fk}=\frac{Q}{\Delta S}$ $S=k\ln Y$ $\Delta S=k\ln\frac{Y_1}{Y_2}=k\ln\frac{V_2}{V_1}\cdot N$

$v=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$ – MAXWELL legvalószínűbb sebesség

$\frac{d(a\times b)}{dt}=\frac{da}{dt}\times b+\frac{db}{dt}\times a$

$W_A=W_{E=0}\cdot e^{-\frac{E}{kT}}$ – BOLTZMANN

E-energiájú állapot valószínűsége.

NY $W_A=n$ – E energiával rendelkező részecskék száma N részecskéből

Nagy Ádám®

ELEKTROSZTATIKA

- NYUGVÓ TÖLTÉSEK
- ELEKTROMOS ÁLLAPOT JELLEMZŐJE
  EL. TÖLTÉS q [C]
- SZÉTVÁLASZTHATÓAK A TÖLTÉSEK
- SEMLEGES: ha más anyagfajtájú állapotú anyaggal nem lép kapcsolatba. Bennük a különböző töltések azonos mennyiségben vannak jelen.
- A FÉMTÁRGYAKBAN (belsejében) NINCS TÖLTÉS
- ELEKTROMOS MEGOSZTÁS: INFLUENCIA
  E tér megosztást hoz a fémtárgyakban.
- TÖLTÖTT TEST VONZZA A semleges testeket: MERT azokon E. megosztást okoz, így maga felé eső oldalát vonzza.
- TÖLTÉS ANYAGHOZ KÖTÖTT
- VAN ELEMI TÖLTÉS
  (MILLIKAN KÍSÉRLET: 2 vízszintes ~~[illegible]~~ fémlemez közé olajcseppeket porlasztott. Ezek mérete a viszkozitástól függ, így azonos. Ezeket el. feltöltik (UV) A ~~[illegible]~~ lemezekre feszültséget kapcsolnak, úgy, ~~[illegible]~~ hogy lebegjenek. Ekkor $\Sigma F=0$
  $F = q \cdot E = mg$ m-et a mikroszkóppal, E-t a U-ból meghatározzák q-ra mindig kvantált értéket kapott $\Rightarrow$ ELEMI TÖLTÉS)
- $q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C$
- TÖLTÉSRE HATÓ ERŐ $\boxed{F = E \cdot q}$
- TÖLTÉSEK ERŐHATÁSA EGYMÁSRA:
  (TORZIÓS INGÁVAL mérte COULOMB)

$$\bar{F}_{21} = k\,\frac{q_1 q_2}{|\bar{r}|^2} \cdot \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} \qquad k = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}$$

2-esre ható erő az 1-es felől.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

- ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG:
  E-TÉRBEN A TÉR MINDEN PONTJÁHOZ RENDELHETŐ 1 VEKTOR $\boxed{\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q}}$ $\left[\frac{N}{C}\right]$
  (F-a q-ra ható erő)

tehát $E = F$, ami a 1 egységnyi töltésre hat.

- PONTTÖLTÉS TERE:

$$\boxed{\bar{E} = k\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}}$$

- ÉRVÉNYES A SZUPERPOZÍCIÓ
- ERŐVONALAK SZÁMA:
  Zárt gömbön PONTSZERŰ TÖLTÉS KÖRÜL $= E$
  Az érintővel a tér irányába mutat.
  nem zárt (elektrosztatikában)
  $\oplus \rightarrow \ominus$

- fémekben csak a felületen vannak többlettöltések.
  - ezek taszítják egymást, ezért a lehető legtávolabb akarnak elhelyezkedni $\Rightarrow$ felületen
  - elektronhiány: az atomtörzsek hozzájárulása ...
- fémben $E = 0$
- felületi töltéssűrűség (ς_A) a csúcsokon nagyobb, itt E is nagyobb

$$\boxed{E = \frac{\varsigma_A}{\varepsilon_0}}$$

- fémet térbe helyezve az a teret deformálja (fókuszálja)
- E-TÉR FLUXUSA A - síkfelületre

$$\boxed{\Phi_E = E \cdot A} = E_{\perp} \cdot A$$

MERŐLEGES; felületre merőleges komponens.

tehát görbe felület esetén csak kicsi felületelemekre. Ilyenkor a térirány:
- NYITOTT felület: tetszőleges
- ZÁRT: kifelé $\oplus$

Előjeles, skalár mennyiség.

- PONTTÖLTÉS zárt felületre (GÖMB) vett fluxusa:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

- GAUSS-TÉTEL ez BÁRMELY felületre, (zárt) és bármilyen töltéseloszlásra IGAZ.
  A TÉTEL $\Phi \sim q$ $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q$
  (VÁKUUMBAN)
- SÍKKONDENZÁTOR:
  $E =$ a 2 lap tér összege.
  E összege $\boxed{E = 2 \cdot k \frac{Q}{r^2}}$
  (kívül $E = 0$) $E = \frac{\varsigma_A}{\varepsilon_0}$

JELÖLÉSEK: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$r = |\bar{r}|$ $\Delta x = x_2 - x_1 \neq x_1 - x_2$
$\mathbf{r} = \bar{r}$ $\frac{J}{C} = \frac{W_3}{C} = \frac{VA_3}{A_3} = V$

- E tér MUNKÁJA q töltésen

$$F = q E \qquad W = -q\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = q \cdot E \cdot s_{\parallel}$$

- U FESZÜLTSÉG (2. PONTBÓL 1-BE)

$$\boxed{U_{21} = \frac{W_{21}}{q} = U_2 - U_1} \qquad \boxed{W = q \cdot U}$$

[EGYSÉGNYI TÖLTÉSEN VÉGZETT MUNKA U_2 PONTBÓL U_1-BE JUTÁSHOZ

ELŐJELES SKALÁR $[V] = \frac{[J]}{[C]}$

$\boxed{U = Ed}$ d - E-vel párhuzamos! (összetevő)

- $\oint E\,dr = 0$ ELEKTROSZTATIKA
  TEHÁT KONZERVATÍV TÉR II TÖRVÉNYE
  (MAXWELL II ELEKTROSZTATIKAI VÁLTOZATA)
  PONTTÖLTÉS TERE IS KONZERVATÍV
  $\mathrm{rot}\,E(r) = 0 \Leftarrow$ NINCS BENNE ZÁRT GÖRBE, ÖRVÉNY.
  (ha lenne, akkor nem lenne KONZERV)
- POTENCIÁLIS ENERGIA

$$\boxed{E_{pot} = -\int_{GND}^{r} F\,dr}$$

$$\boxed{dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz}$$

- ELEKTROMOS POTENCIÁL:

$$\varphi_{(r)} = -\int_{GND}^{r} E\,dr = \frac{E_{pot}}{q} = \varphi_{(r)}$$

$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$ (KONZERV TÉR)

- TÖBB PONTTÖLTÉS NEHEZÍTI A POT:

$$\boxed{\varphi_{(r)} = k \sum \frac{q_i}{r_i}}$$

1 POTENCIÁLJA HA PONTTÖLTÉS, ÉS VÉGTELEN KÖZÖTT VAN:

$$\boxed{\varphi = k\,\frac{q}{r}}$$ r-távolság a töltés és a vizsgált pont között.

A FÉMGÖMB POTENCIÁLJA (felület)

$$\boxed{\varphi = k\,\frac{q}{R}}$$ R - a gömb sugara

- EKVIPOTENCIÁLIS FELÜLETEK
  AZON PONTOK halmaza a térben, amelyeknek az el. potenciálja $=$
  A térbe helyezett fémfelületek ilyenek.

- ELEKTROMOS DIPÓLUS
2 egymástól l távolságra lévő ellentétes előjelű töltésből álló rendszer (egyetlen töltéseloszlás is)
- ELEKTROMOS DIPÓLUSMOMENTUM
jellemzi

$$\boxed{\bar{P}_e = \bar{l} \cdot q}$$ l – vektor a 2 rész között

$[Cm]$

EGYENETLEN TÖLTÉSELOSZLÁSNÁL:

$$P_e = \int \varrho(r)\, r\, d^3 r \quad (\bar{r} = \bar{r}_1 \bar{l})$$

- POTENCIÁL (φ) A DIPÓLUS TERÉBEN: (P – pont)

$$\boxed{\varphi(P) = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r}\right)}$$

a dipólushoz közel, de távol:

$$\boxed{\varphi(r) = k \cdot \frac{\bar{P}_e \bar{r}}{|r|^3}}$$

itt r a dipólus közepétől mért távolság.

-

PONTTÖLTÉS	DIPÓLUS
$\varphi \sim r$	$\varphi \sim r^2$
$E \sim r^2$	$E \sim r^3$

- DIPÓLUS KÖRÜLI TÉRERŐSSÉG:

$$\boxed{E(r) = k\, \frac{P_e}{r^3}\left(3\frac{\bar{r}}{|r|}\cos\theta - \frac{\bar{P}_e}{|P_e|}\right)}$$

- TÉR-DIPÓL KÖLCSÖNHATÁS (KÜLSŐ)
pot. E_{pot}: az a munka, amivel a végtelenből ide mozgathatunk egységnyi töltést

$$\boxed{E_{pot} = -P_e E}$$ – távolról

FORGATÓ NYOMATÉK: $\boxed{M = q \cdot \bar{l} \times \bar{E}}$

$\boxed{M = P_e \times E}$ JOBBKÉZSZABÁLY!

- DIPÓL – DIPÓL:
nem homogén terek => erő + erőpár hat a dipólokra
Az erő a nagyobb E irányába mozdít

E-TÉR SZIGETELŐKBEN

- TÉRERŐSSÉG A KONDENZÁTORBAN:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}}$$

$$\boxed{U = E d = q \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}} \quad [F] = \frac{As}{Vm} = \frac{C}{V}$$

- GÖMB KAPACITÁS: feltételezhetően q, és U mérhető. $\boxed{C = \frac{q}{U}}$

- ha a gömb ~~[illegible]~~ közelebb van a földhöz, akkor kisebb a feszültsége, és nagyobb a kapacitása

- DIELEKTRIKUM:
- azt tesszük a kondenzátorba:
C nő, ~~E csökken dg~~
E csökken, ha q = áll. és C nő.
- DIELEKTROMOS POLARIZÁCIÓ (P)
tér hatására dipól-láncok alakulnak, ezek beállnak a tér irányába. (~~több ezek töltéseit kiegyenlítik, így nagyobb töltés kell~~)
A dipólusokkal „egyenértékű lamellás kir. töltések" így az nem mutathatunk legbarnabb.)
- Értelmezve van P_e-re

$\boxed{P_e = \varrho\, d\, A}$ vektor!

- $\boxed{P = \frac{P_{\text{DIPÓL}}}{V_{sz}}}$ 1 SÉGNYI TÉRFOGAT DIPÓLUSMOMENTUMA (DIEL. EKTR. POLARIZÁCIÓ VEKTOR)

- DIELEKTROMOS ELTOLÁS:

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P} \quad \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \qquad \boxed{D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E}$$

- $\boxed{P = \varepsilon_0 \chi_e E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E - \varepsilon_0 E$ $\boxed{P = \varepsilon_0 E(\varepsilon_r - 1)}$

χ_e elektromos szuszceptibilitás

$\varepsilon_r = \chi_e + 1$

- KONDENZÁTORBAN TÁROLT ENERGIA:

$$W = \int_0^q U(q')\, dq' = \boxed{\frac{1}{2} C U^2 = W}$$

$$E_{en} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 V$$

$$= \frac{1}{2} D E V$$

- TÉR
ELEKTROSZTATIKUS TÉR ENERGIASŰRŰSÉGE:

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2} D E}$$

ÁTSZÁMÍTÁSOK:

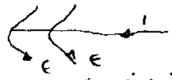
$$\frac{J}{m} = \frac{Ws}{m} = \frac{VAs}{m} = N \qquad \frac{V}{m} = \frac{VAs}{Asm} = \text{térer.}$$

$$J = VAs \qquad V = \frac{J}{C} = \frac{Ws}{C} = \frac{VAs}{As}$$

EGYENÁRAMOK

- vezetékben ha áram folyik, akkor az elektronos tér benne ≠ 0. E a vezetékre ha nem folyik áram: tér merőleges a vezetékre, és a belsejében = 0

tér és áram iránya között:



KÜLSŐ TÉR

- $\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$ [A]

- 1A az áram, ha 2 párhuzamos (végtelen) vezeték között ha azok 1 m-re vannak egymástól ⇒ $2 \cdot 10^{-7}$ N erő hat

- ELEKTROMOS ÁRAMSŰRŰSÉG:
$\bar{J}$ - VEKTOR
$\boxed{\bar{J} = \frac{dI}{dA} \bar{e}}$ e - áramlás iránya
$\left[\frac{A}{m^2}\right]$ mutató Igységvektor

1SÉG keresztmetszeten 1ség idő alatt átáramló töltés

- TÖLTÉSÁRAMLÁS:
á. úszó (drift) sebességgel (gyorsulás nélkül $F = q \cdot E \neq 0$, de $\Sigma F = 0$ → ellenállás)
pl 1A-nél $v_D \approx 10^{-4} \frac{m}{s}$

- KONTINUITÁSI EGYENLET
$\oint_A J \, dA = 0$ (azaz kirchoff)

- KIRCHOFF I - CSOMÓPONTI $\Sigma I = 0$
- KIRCHOFF II - HUROK $\Sigma U = 0$

GALVÁNELEMEK:

- 2 fémelektróda, amik között elektrolitba merülnek. Az elektrolit - elektróda határfelületen potenciál alakul ki: áram a 2 elektróda között folyhat ha a külső fém összeköttetésen folyhat

- feszültségek:
  - fém - elektrolit
  - elektrolit$_A$ - elektrolit$_B$
  - elektróda - kivezetés
  (ez a kontaktpotenciál)

- MÁSKÉPP:
  - TERMELETLENÜL: forrásfesz E_F
  - kapocsfeszültség: TERHELTEN

- R ellenállás $R = U \cdot I$ (OHMOS)
$[\Omega] = V \cdot A$ OHM TÖRVÉNY
$R = \rho \frac{l}{A}$ ρ fajlagos ~~elektr~~ [Ωm] ellenállás [Ωm]

- DIFFERENCIÁLIS OHM-TÖRVÉNY:
$\boxed{\bar{J} = \sigma \bar{E}}$ $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (fajlagos vezetés)
(ρ-homogenitás)
vagy inkább $\bar{E} = \bar{J} \cdot \sigma$ $\boxed{\bar{E} + \bar{E}_{külső} = \bar{J} \rho}$

- ρ (fajlagos R) hőmérséklet-függése:
$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha (T - T_0) = \boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \alpha \Delta T}$
$R = R_0 \left(1 + \alpha \Delta T + \underbrace{\beta \Delta T^2 + \ldots}_{\approx 0}\right)$

- áramkörben E iránya = a tech. áramiránnyal
- az elektronok potenciális energiája hővé alakul az a JOULE-HŐ

MUNKA:
$\boxed{W = U \cdot I \cdot t = P \cdot t = \int_0^t P \, dt}$
(ha váltóáram akkor P változik, és az integrál = azon belül van a dt-vel) $[P] = VA$

- TELJESÍTMÉNY
$\boxed{P = U \cdot I = R I^2 = \frac{U^2}{R}} = \frac{W}{t}$
$\frac{J}{s} = V \cdot A = [W]$

KONDENZÁTOR :>

$U_{(t)} = \frac{q(t)}{C}$

TÖLTŐDÉS:
$\boxed{I(t) = U_f \cdot \frac{C}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$ $\tau = R \cdot C$ IDŐÁLLANDÓ

FELTÖLTÉS MUNKÁJA:
$W = I^2 R + \frac{1}{C} \int_0^q \frac{q'}{} dq'$
$\boxed{W = \frac{q^2}{2C}}$

KISÜTÉS $I(t) = \frac{dq}{dt} = -C U_F e^{-\frac{t}{RC}} = I(t)$

MÁGNESESSÉG:

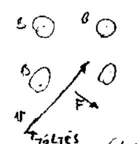
- ha áramjárta vezetővel közelítünk 1 mágneshez, akkor az mágnesessé válik, és vonzza a mágnest. Eltávolítás után nem marad mágneses. (PERMANENS MÁGNES)

- MÁGNES KÖRÜL MÁGNESES MEZŐ VAN. A MÁGNES DIPÓLUSOS É → D (FÖLD: D→É)
NINCSENEK SZÉTVÁLASZTHATÓ MÁGNESES TÖLTÉSEK → darabolással mindig DIPÓLUSOK

- ÁRAMMAL ÁTJÁRT VEZETŐNEK IS van mágneses tere B

TEKERCSNEK IS: (SZOLENOID) B — JOBBKÉZ (CSAVAR) SZABÁLY
(Hasonló a mágnesrúdhoz)

- B-TÉR ÖRVÉNYES; rot B ≠ 0
ÉS FORRÁSMENTES

- LORENTZ TÖRVÉNY:


A B tér a rá merőleges sebességű (kompatibilis) töltésre eltérítő erővel hat (körpályára kényszeríti)
$\boxed{\bar{F}_L = q \cdot \bar{v} \times \bar{B}}$ JOBBKÉZ SZ.
LORENTZ ERŐ

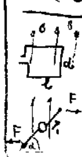
- $\bar{B}$ MÁGNESES INDUKCIÓVEKTOR térre jellemző, helytől függ
$[T] = \frac{N}{A s} \frac{s}{m} = \frac{Vs}{m^2}$

- ha E tér is van, akkor az erő:
$\boxed{\bar{F}_e = q\bar{E} + q\bar{v} \times \bar{B}}$

körpálya:
$\boxed{r = \frac{mv}{qB}}$ $\frac{q}{m}$ fajlagos töltés (ettől függ az r)

- ERŐHATÁS AZ ÁRAMMAL ÁTJÁRT VEZETŐRE:
$\boxed{F = BIl} = -\bar{e} \cdot v_{drift} \times \bar{B}$
$\boxed{\bar{F} = I \cdot \bar{l} \times \bar{B}}$ l hosszú vezeték B térben I-árammal

EZ: AMPÈRE-féle erőtörvény

VEZETŐ (ÁRAM) KERET:

Ez egyik oldalát kifelé a másikat befelé mozdítaná el.
Ez erőpár, NYOMATÉK VAN
$M = F_1 \cdot k + F_2 k = |F| \cdot d \cdot \sin\alpha = \bar{F} \cdot \bar{d}$

~~$M = d \cdot B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha$~~

$M = d \cdot B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha$

$\boxed{|M| = I \cdot A \cdot B \sin\alpha}$

- ELEKTROMÁGNESES (DIPÓLUS) MOMENTUM: (P_m)

$\boxed{\bar{M} = \bar{P}_m \times \bar{B}}$ JOBBKÉZ!

az sorrendet, vagy irányát... $\boxed{|M| = |P_m| \cdot |B| \cdot \sin\alpha}$

α a P_m és B között

$\boxed{P_m = I \cdot A}$ vezetőhurokra $[Am^2] = \frac{Nm}{T} = \frac{J}{T} = VAs\frac{m^2}{Vs}$

N MENETES TEKERCSRE:

$\boxed{P_m = I \cdot A \cdot N}$ (tehát $\sim N$)

- B mérése

$M = I \cdot A \cdot B \cdot \sin\alpha$-BÓL

MÉRJÜK, ADOTT

- P_m a B irányába akar beállni! VAGY: B_{KERET} iránya = $B_{KÜLSŐ}$ IRÁNYA

így $\boxed{E_{pot} = -\bar{P}_m \cdot \bar{B}}$

VÉGTELEN VEZETŐ MÁGNESES TERE

$\boxed{|B| = k\frac{I}{r}}$ $k = \frac{\mu_0}{2\pi}$ arányossági tényező

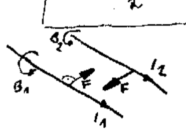
I az áram, r a vezetőtől lévő távolság, B síkjában

μ_0 - A VÁKUM PERMEABILITÁSA

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} = \frac{Vs}{Am}$

- 2 ÁRAMMAL ÁTJÁRT VEZETŐ (PÁRH.)

$\boxed{F = \frac{\cancel{k} I_1 I_2}{r} l \frac{\mu_0}{2\pi}}$



$\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c\right)$

$\boxed{F = k\frac{I_1 I_2 l}{r}}$

- B-FLUXUSA Φ [Wb] - WEBER

B - INDUKCIÓ $[T] = \frac{Vs}{m^2} = \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{A}{m}$

$\boxed{\Phi = B \cdot A}$ ahol B ⊥ ÖSSZETEVŐJE A VAGY B és A ⊥ ÖT. JE.

SZOLENOID-TOROID: $\boxed{\Phi = B \cdot A \cdot N}$

$[Vs]$ = WEBER

LÉGMAGOS (SZOLENOID) TEKERCS TERE

LÉGMAG. $\boxed{B = \mu_0 \frac{NI}{l}}$ VASMAG. $\boxed{B = \mu_0\mu_r \frac{NI}{l}}$

A tekercsen kívül $B = 0$-nak vesszük

μ_r - relatív permeabilitás

$\mu_r = (1 + \chi_m)$ ahol χ_m a MÁGNESES SZUSZCEPTIBILITÁS

χ = >1 PARAMÁGNESES
= <1 DIAMÁGNESES
= >>1 - FERROMÁGNESES

- $\boxed{B = \mu \cdot H}$

H - mágneses térerősség $\left[\frac{A}{m}\right]$

- LÉGRÉS A VEZETŐGYŰRŰBEN

$B_{zárt} > B_{légréses}$

$B_{vas} = B_{LEV} = B$ a légrésnél

$B_{légréses} = \frac{\mu_0\mu_r N I}{l_{vas} + \mu_r l_{LEV}}$

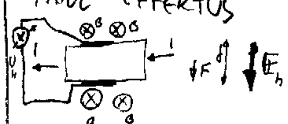
$\boxed{1/B = \frac{l_{vas}}{\mu_0 N I \mu_r} + \frac{l_{LEV}}{\mu_0 N I}}$

$B_{zárt} = \mu_0\mu_r \frac{NI}{l}$

$l = 2r\pi = l_{vas} + l_{LEV(EGŐ)}$

TEHÁT TOROIDBAN AZ INDUKCIÓ UGYANÚGY SZÁMOLHATÓ, MINT A SZOLENOIDBAN l mint itt is, ott is. SZOL: l, TOR: $2r\pi = l$

HALL - EFFEKTUS



$\bar{E}_h = -\bar{v} \times \bar{B} \Rightarrow$

$U_h = |\bar{E}_h| \cdot d = vBd$

INDUKCIÓ

- MÁGNESES TÉR VÁLTOZÁSA IS TUD ELEKTROMOS TERET LÉTREHOZNI (INDUKÁLNI)

- U_i függ a $\Delta\Phi$-től, tehát:

$\boxed{|U_i| = \frac{d\Phi}{dt}}$

MÁSKÉPP.

$\boxed{U_i = -\frac{dB}{dt} \cdot A \Big|_{A=áll} = -\frac{dA}{dt} B \Big|_{B=áll}}$

EZEK VEZETŐHUROKNÁL (1 MENETŰ TEKERCS)

- U_i előjele olyan, hogy gátolja az őt létrehozó hatást

TEHÁT az U_i által keltett I_i olyan B-teret kelt, ami ~~ellentétes irányú a külső B-térrel~~ kompenzálni igyekszik a külső tér változását. Tehát: (LENZ-TÖRV)

- HA $B_{KÜLSŐ}$ NŐ → B_K, $B_{TEK.}$ ELLENTÉTES
- HA B_K CSÖKKEN → B_K, $B_{TEK.}$ AZONOS IRÁNYÚ

Ha mágnes végéhez közelítünk, akkor a B_K nő.

ÚGY IS felfogható, hogy a mágnes és a tekercs együtt akar mozogni.

- AZ INDUKÁLT elektromos tér nem konzervatív, örvényes

$\boxed{rot E = \frac{\partial B}{\partial t}}$ - MAXWELL II

- TÖBB MENETŰ TEKERCSEK

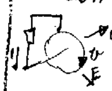
$\boxed{U_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB A \cdot N}{dt}}$

- vezeték mozog a B-térben (l-hosszú)

$\boxed{U_i = Blv}$ fluxusváltozásból is levezethető

- fém korong forog B-térben (B és a tengely 1 irányú)

EKKOR A TENGELY ÉS A KORONG PEREME KÖZÖTT U_i indukálódik



LORENTZ ERŐ HAT a koronggal forgó töltésekre

$\boxed{E = vB = r\omega B}$

- KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓ

HA 2 KÖZELI SZOLENOID KÖZÜL AZ EGYIKBEN VÁLTOZTATJUK AZ ÁRAMOT, ÉS EZZEL AZ INDUKCIÓT, AKKOR A MÁSIKBAN FESZ. INDUKÁLÓDIK

M - KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓS EGYÜTTHATÓ

$[H] = \frac{Vs}{A} = \Omega s$

$U_{i_2} = -M \cdot \frac{dI_1}{dt}$ $U_{i_1} = -M \cdot \frac{dI_2}{dt}$

$M = 1H$ ha $dI = 1A$ $d(1s) \Rightarrow U_i = 1V$

- HA SZOROSAN EGYMÁSRA VANNAK TEKERCSELVE VAGY KÖZÖS VASMAGON VANNAK

$U_{i_2} = -\mu_0\mu_r \frac{N_1 N_2 A}{l} \cdot \frac{dI_1}{dt}$

$M = \mu_0\mu_r N_2 N_1 \frac{A}{l}$

- HA I-t változtatjuk 1 tekercsben, akkor abban is megjelenik U_i. EZ AZ ÖNINDUKCIÓ

$U_i = L\frac{dI}{dt}$ L - INDUKTIVITÁS [H]

$L = \frac{\mu_0\mu_r N^2 A}{l}$ TOROIDBAN $l = 2r\pi$

- MÁGNESES MEZŐ ENERGIÁJA:
(= AZ A MUNKA, AMI LÉTREHOZZA)

$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = E_M$

TELJES MUNKA:

$W = I^2R\cdot\Delta t + \frac{1}{2}LI^2$

$E_M = \frac{1}{2\mu\mu_0}B^2V$ | tekercsben

- ENERGIASŰRŰSÉG:
térfogategységre jutó energia

$\varrho_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2$

- ENERGIATERJEDÉS AZ ÁRAMKÖRBEN (VEZETÉKBEN)

Energia csak akkor terjed, ha elektromos, és mágneses mező együtt van jelen.
Az energiát ezek hordozzák

AZ ÁRAMLÓ TELJESÍTMÉNY:

$P = \frac{EBA}{\mu_0}\sin\alpha$

ha $E \perp B$ akkor $\sin\alpha = 1$

(A felületen keresztül terjed az energia)

MINDEN PONTRA: (TÉR)
(ENERGIAÁRAM-SŰRŰSÉG)
A POYNTING-VEKTOR:

$|S| = \frac{P}{A} = \frac{EB}{\mu_0\mu}\sin\alpha$

VEKTORIÁLISAN:

$S = \frac{E\times B}{\mu_0}$ (JOBBRENDSZER)

(általában: $E\perp B$)

VEZETÉKBEN:

$S = \frac{P}{A} = \frac{I^2R}{A} = \frac{I^2R}{r^2\pi}$

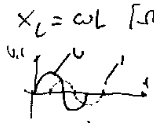
VEZETÉKBE BEJÖVŐ ENERGIA: (ANTENNA)

$S = \frac{E_0 B}{\mu_0} = \frac{UB}{\mu_0 l}$

REAKTANCIÁK:...

- TEKERCS $U = L\dot{I}_L$

$X_L = \omega L$ [Ω]

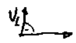


HA $U = U_0\sin\omega t$ AKKOR: $I = I_0\sin(\omega t - 90°)$ $= -I_0\cos\omega t$

- KONDI $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $I_C = C\dot{U}_C$

HA $U = U_0\sin\omega t$ AKKOR $I = I_0\sin(\omega t + 90°)$ $= I_0\cos\omega t$

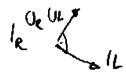
- SOROS RL $I_L = I_R$



$I_L = I_R$, $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

- PÁRHUZAMOS RL

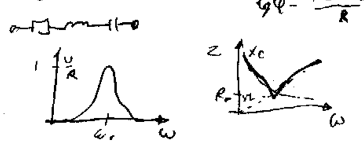
$U_L = U_R$



...

- SOROS RLC
(FESZÜLTSÉG REZONANCIA)

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$



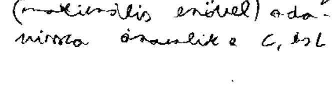
$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

van olyan ω ahol $X_L - X_C = 0$
AKKOR $Z = R$
Ekkor viszont külön a kondin és a tekercsen $I\cdot X_L = I\cdot X_C = U$ fesz. esik (sokkal nagyobb is lehet, mint U_R feszültség)
DE $U_{L(t)} + U_{C(t)} = 0$ mert 180° fáziseltérés van köztük.
$U_R = \sqrt{U^2 + (U_L - U_C)^2}$

- PÁRHUZAMOS RLC
(ÁRAMREZONANCIA)

$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$



$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

ω_0-n a kondin és a tekercsen külön nagyobb áram lehet, mint a főágban. az áram, és az energia ilyenkor (maximális erővel) oda-vissza áramlik a C és L között.

- TELJESÍTMÉNYEK:

Ha U, I nincs fázisban, akkor $P(t)$ + és − értékeket is felvehet.
A ⊕: sima leadás, a ⊖ az a hálózatba visszatáplált energia, a B felépülésekor, és C kisülésekor keletkezik.

MEDDŐ ÁRAM: $\varphi = \pm 90°$

$\int_0^T P(t) = 0$ ilyenkor (ODA-VISSZA)

HATÁSOS TELJ.: [W]

$P = UI\cos\varphi$ $W = UI\cos\varphi\cdot t$

$\cos\varphi$ – a teljesítménytényező

LÁTSZÓLAGOS TELJ.: [VA]

$S = UI$ (= P ha $\varphi = 0$)

MEDDŐ TELJ.: Q [VAr]

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

- REZGÉSEK (RLC)

Amikor Q_C lecsökken 0-ra, az áram nem szűnik meg, hanem az ellenkező irányban újra feltölti a kondit

$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}LI^2$ energia pulzál a 2 elem között.

Ha van R a C, L között, akkor csillapodik a rezgés, mert az energiából valamennyi mindig hővé alakul a R-en.
Ha $R = 0$: CSILLAPÍTATLAN HARMONIKUS
Ha kényszerítő energiaforrás nincs: akkor szabad elektromágneses a rezgés.
ω_0 - sajátfrekvencia

$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

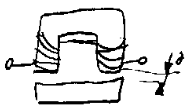
CSATOLT REZGŐKÖRÖK

2 rezgőkört egymás mellé, a 2 tekercsnek közös a fluxusa (vasmagja) akkor energiacsere mehet végbe. Ekkor csatolt rezgés van.
Rezonancia akkor van, ha $L_1C_1 = L_2C_1$ $\omega_{01} = \omega_{02}$

ELEKTROMÁGNES

Ha a tekercs belsejét ferromágneses anyaggal töltjük ki, akkor B, Φ nagyobb.

Elektromágnes: lágyvas + tekercs a felmágnesezéshez.



ÖSSZENYOMÓ ERŐ: F

$F=\frac{B^2A}{2\mu_0}$ NYOMÁS: $p=\frac{F}{A}=\frac{B^2}{2\mu_0}$

térrészek energiája:

- VASAS:

$$E=\frac{1}{2\mu_0\mu_r}B^2Ad$$

- RÉS:

$$E=\frac{1}{2\mu_0}B^2Ad$$

Az első nagyobb, a második keletkezik, úgy, hogy szétfeszítjük. $\Delta E=\frac{1}{2\mu_0}B^2Ad$ KIS VÁLTOZÁSRA $F=\frac{\Delta E}{d}$

TRAFÓ

Csatolt tekercsek.
A tekercsek el vannak szigetelve egymástól, hogy az örvényáramoknak útját állják.

U_1 PRIMER | SZEKU U_2 $\quad \frac{U_1}{U_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{I_2}{I_1}=a$

$U_1I_1\cos\varphi_1=U_2I_2\cos\varphi_2$

$U_2=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N_2=I_2R_2 \quad U_1=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N_1$

$U_1=I_1R_1+\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N_1$

R_{1e} | R_1 $\quad R_{1e}=a^2R_1$

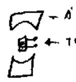
EGYFÁZISÚ AC GENERÁTOR

mechanikai energiát elektromossá alakítanak.

- VASMAGOS TEKERCS – FORGÓRÉSZ
- ÁLLANDÓMÁGNES ÁLLÓRÉSZ (LEHET ELEK.)
- CSÚSZÓGYŰRŰ (NEM KOMMUTÁTOR)

Ha több tekercspárt (n) alkalmazunk, akkor $\omega_M=\omega_{OK}$, $f=np$ – PERDÜLETSZÁM

EGYENÁRAMÚ GENERÁTOR



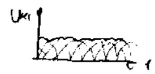
– ÁLLANDÓ
– TEKERCS

EZ KOMMUTÁTOROS:

(szeletelt csúszó-gyűrű)

$U_{ki}=|U_0\sin\omega t|$

HA TÖBB TEKERCS VAN:



DC MOTOR

$\quad$ UGYANEZ

a forgórész lesz el akarja fordítani a forgórészt, majd ha teljesen elfordult, a kommutátor polaritást vált, tér is (B) újra ugyanez. a holtpontokon a lendület viszi át.

- A időben változó mágneses mező forrásmentes, örvényes elektromos mezőt kelt
- A elektromos mező időbeli változása pedig örvényes forrásmentes mágneses mezőt kelt.
- $\ddot{O}_E$ – ÖRVÉNYERŐSSÉG $=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ($\ddot{O}_M$ – MÁG)
- A kondenzátorlemezek között is van mágneses mező, amíg áram folyik, mert változik az E a töltődés közben.
- ELEKTROMOS FLUXUS $\Psi=E\cdot A$
  Φ – MÁGNESES FLUXUS $=B\cdot A$
  $\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}=\frac{I_E}{\varepsilon_0}$ $\boxed{I_E=\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\varepsilon_0}=\frac{\Delta U}{dt}\frac{A}{d}\varepsilon_0$
- ÖRVÉNYES TEREK ERŐSSÉGE:
  Ö – ÖRVÉNYERŐSSÉG $\ddot{O}_B=\mu_0 I$
  $\ddot{O}_B=\mu_0\left(\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}+I\right)=\boxed{\mu_0(I_E+I)}$

(AMI AZ E-tér változásakor létrejön a kondenzátorban)

I_E – ELTOLÁSI ÁRAM

- TEHÁT A keletkező mágneses tér 2 hatás eredője:
  1) SIMA ÁRAM (I)
  2) E – VÁLTOZÁS $\left(\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\varepsilon_0\right)$ (MINTHA MÉG ÁRAM LENNE)

MAXWELL TÖRVÉNYEK

$\boxed{D=\sim}$

I) $N_E=\sum\frac{1}{\varepsilon}Q$ $=\sum E\,\Delta A=$ | ANYAGBAN: $\sum D\,\Delta A=\sum Q$

II) $\ddot{O}_E=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ $=\sum E\,\Delta s=$ | ANYAGBAN: $\sum E\,\Delta s=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

III) $N_B=0$ $=\sum B\cdot\Delta A=$ | ANYAGBAN: $\sum B\,\Delta A=0$

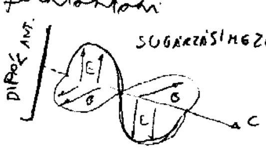
IV) $\ddot{O}_B=\mu_0\left(I+\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\right)$ $=\sum B\cdot\Delta s=$ | ANYAGBAN: $\sum H\,\Delta s=I+\varepsilon\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$

ZÁRT GÖRBÉKRE

$\ddot{O}_E=E\cdot\Delta s$ (TÁVOLSÁG) $\quad \ddot{O}_B=B\cdot\Delta A$ (FELÜLET)

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

Ahol B megváltozik, vagy E, akkor azok egymást keltve képesek önállósulni, egymást fenntartani.



$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\int E\,dr=-\frac{\Delta BA}{\Delta t}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$
$$\int B\,dr=\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta EA}{\Delta t}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$$

A SUGÁRZÁSI MEZŐRE

$E_N\sim\frac{1}{r^2}$ $\quad E_{sugárz}\sim\frac{1}{r}$

$B_N\sim\frac{1}{r^2}$ $\quad B_{sugárz}\sim\frac{1}{r}$

- AZ ELEKTROMÁGNESES HULLÁM TRANSZVERZÁLIS
- E és B azonos fázisban, és merőleges síkban
- IDŐEGYSÉG ALATT TERÜLETEGYSÉGEN ÁTHALADÓ ENERGIA

$S=\frac{E\times B}{\mu_0}$ $\quad \boxed{\frac{E}{B}=c}$

$E=E_{max}\sin\omega t \quad B=B_{max}\sin\omega t$

$S=E_{max}B_{max}\sin^2\omega t=\frac{1}{2}S_{max}$

- ENERGIA SŰRŰSÉG

$\varrho_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2$

$W=\varrho_e\cdot V$ – ADOTT TÉRFOGAT ENERGIÁJA

• IMPULZUS

a) TÉRFOGATEGYSÉGE:

$g = \varepsilon_0 E B \quad (\cdot \overbrace{\sin 90°}^{1})$

$(g = \varepsilon_0 E \times B)$

b) ADOTT TÉRFOGATÉ:

$G = g \cdot V$

c) SZINUSZOS, EZÉRT

$g = \varepsilon_0 E_{max} B_{max} \sin^2 \omega t$

$\bar g = \frac{1}{2} g_{max}$ – ÁTLAGOSAN

$\bar G = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_M B_M V$

• HULLÁMNYOMÁS:

$p = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E B \qquad \bar p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m B_m$

Elnyelő anyagnak erejét ad dt, visszaverőnek kétszer ennyit.

• I – lendület!

$I = gV = mc$

↓ kiszámítható

AZ ENERGIA $W = m \cdot c^2$

• TÖMEGSŰRŰSÉG:

$\varrho = \frac{m}{V} \qquad \varrho = \frac{1}{c} g$

$\varrho = \varepsilon_0 E B \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

REZGÉSEK

– REZGÉS: fizikai mennyiség nagysága egy egyensúlyi érték körül ingadozik.

– A kitérés általában az idő szinuszos függvénye

– POTENCIÁLIS ENERGIA:

$E_p = E_{p0} + a x^2$

ahol x a kitérés, a – rugalmas állandó

– kötött részecske rezgésénél.

$F = -\frac{dE_p}{dx} = -2ax$

erő hat a részecskére

Ez rugalmas erő

($F = -Dx$ rugónál)

CSILLAPÍTATLAN REZGÉSEK

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

• HARMONIKUS REZGÉS: AZ IDŐ SZINUSZOS FÜGGVÉNYE

A – AMPLITÚDÓ

φ – kezdőfázis $\quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

(Ez az egyenletes körmozgás egyenesre vett vetülete)

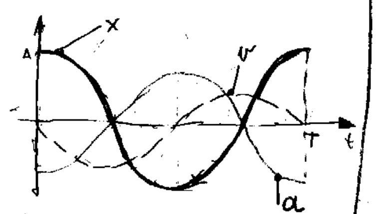
• A rezgéshez (harm.) hozzárendelhető 1 forgó vektor: A – hosszú, ω-val forog, φ-től indul.

⊙ függőleges vetülete x(t)

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

$= -\omega^2 x$



• KÉPLETEK:

teljes fázis: $\omega t + \varphi$

$v_{max} = A \cdot \omega$

$a_{max} = \omega^2 A$

KÖRMOZGÁS:

$n = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \alpha = \omega t + \varphi$

$|v_k| = R\omega \qquad a_{cp} = \omega^2 R$

$A = R$

$\bar r = A[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)]$

$v = v_k[-i\sin(\omega t+\varphi) + j\cos(\omega t+\varphi)]$

$a = -a_{cp}[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)]$

• DINAMIKA:

rugó: $\omega^2 = \frac{D}{m}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

$F = m \cdot a = -m\omega^2 x = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$= -D \cdot x(t)$

$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + \varphi\right)$

– HA VAN MÉG + ÁLLANDÓ ERŐ IS, PL GRAVITÁCIÓ:

$m \cdot a = -D \cdot x(t) + F_0$

EKKOR:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F}{D}$

• ENERGIA:

$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2$ = ÁLLANDÓ

bármilyen helyzetben

(Az energia a 2 fajta között áramlik oda-vissza)

$E = E_{KIN} + E_{POT} = \frac{1}{2} D A^2$

Ez az áramlás nem veszteségmentes.

• MINDEN AMIRE IGAZ: (DIFF E.)

$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 x(t)$

AZ LINEÁRIS HARMONIKUS OSZCILLÁTOR

• MATEMATIKAI INGA - FONÁLINGA

φ(t), m

$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi(t)$

• LC kör:

$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} U(t) \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$E(t) = \frac{1}{2} C U_{max}^2 = \frac{1}{2} L I_{max}^2$ = áll.

ÖSSZETETT REZGÉSEK

1.) AZONOS IRÁNYÚ, FREKVENCIÁJÚ

A, φ_0 különböző. ($\varphi = \omega t + \varphi_0$)

A VALÓS RÉSZNEK VAN FIZIKAI TARTALMA! $x(t) = \mathrm{Re}\{\bar x\}$

• rezgés komplexen:

$x = A e^{j(\omega t+\varphi_0)} = A\cos(\omega t+\varphi_0) + jA\sin(\omega t+\varphi_0)$

KOMPLEX AMPLITÚDÓ:

$\boxed{\bar x = a + jb} \qquad \bar A = A \cdot e^{j\varphi_0} \qquad \bar X = \bar A e^{j\omega t}$

1 rezgés = 1 komplex (forgó) vektor.

• Eredő vektor. (+)

mivel $\omega_1 = \omega_2$:

$\bar x_e = \bar x_1 + \bar x_2$

$\bar x = \underbrace{\sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}}}_{\bar A = A e^{j\varphi_0}} e^{j\omega t}$

• SZORZÁS: (KEVERÉS)

$x_1(t) \cdot x_2(t) = ?$ NEM KOMPLEXEN!

$= \frac{A_1 A_2}{2} \cdot \left[\cos\{(\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2\} + \cos\{(\omega_1-\omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2\}\right]$

HA $\omega_1 = \omega_2$ akkor lesz 1 tag, ami 2ω-tól függ, és 1, ami csak $\varphi_1 - \varphi_2$-től (nem forgó)

• DERIVÁLÁS (pl. L: áram-fesz.)

$\bar{X}' = j\omega \bar{X}$

2.) KÜLÖNBÖZŐ ω

Eredő spektrum a 2 összetevő spektrumainak az összege

Spektrum folytonos, ha $x(t)$ nem periodikus

• LEBEGÉS:

2 jel összege, ha $\omega_1 - \omega_2$ = KICSI, NAGYON KICSI folyt akkor érezhető, ha $A_1 \neq A_2$

Ha $A_1 = A_2 = A$

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = A\left[e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}\right]$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) e^{j\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$

ENNEK A VALÓS RÉSZE:

$$2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

Ez kb: 1 $\frac{\Delta\omega}{2}$ -vel modulált ω_1 vivőjű AM jel

• AM

jelek szorzásával állítják elő

F. TRANSZPOZÍCIÓ

$$X(t)e = A\left[1 + m\cos(\omega_{mod} t)\right]e^{j\omega_v t}$$

m - a moduláció mélysége:

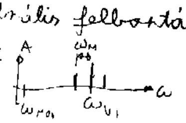
$\omega_{mod} \ll \omega_{vivő}$

φ_1, φ_2 - t 0-nak vesszük

$$X(t)e = Ae^{j\omega_{mod} t} + A\frac{m}{2}e^{j(\omega_m + \omega_v)t} + A\frac{m}{2}e^{j(\omega_v - \omega_m)t}$$

spektrális felbontásban

tehát:



alsó, felső oldalsávnak hívják.

tehát $\omega_{vivő}$ körül legalább $2\omega_{mod}$ -nyi sávszélesség kell.

• PERIÓDIKUS JELEK

felbontás: FOURIER SOROK

$$X(t) = a_0 + \sum_{k}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T X(t)\cos k\omega t\,dt \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T X(t)\sin k\omega t\,dt$$

Ha PÁROS az $X(t)$ → $b_k = 0$

DISZKRÉT lesz a spektrum ω_0 -ként.

3.) EGYMÁSRA MERŐLEGES HARMÓNIKUS REZGÉSEK

$x = A\cos\omega t$

$y = B\cos(\omega t + \varphi)$

A PÁLYA (OSZCILLOSZKÓP, ~~LISSAJOUS~~)

EZ 1 ELLIPSZIS LESZ.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

• Ha $\Delta\varphi = 0$ VAGY π akkor nem fordul az ellipszis.

• Ha $A = B$ is akkor KÖR

• Ha $\Delta\varphi = 0$ $A = B$ AKKOR VONAL A KÉP

4.) KÜLÖNBÖZŐ f, merőleges rezgések

EZEK A LISSAJOUS GÖRBÉK.

(ANIMÁLTAN AZ ELŐZŐ)

CSILLAPÍTOTT REZGÉSEK

oszcillátor: (RUGÓ)

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -D x(t)$$

CSILLAPÍTOTT:

$$F = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -D x(t) - \underbrace{k\frac{dx}{dt}}_{kv}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ - eredeti

$\beta = \frac{k}{2m}$ CSILLAPÍTÁSI EGYÜTTHATÓ

$$a = -\omega^2 x - \underbrace{2\beta v}_{\dot{\omega}\text{ TAG}}$$

EZ DIFFERENCIÁLEGYENLET.

LEMARADÓ GYORSULÁS

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$

EBBŐL:

$$X(t) = e^{\lambda t} \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$C_1 = \frac{A}{2}e^{j\varphi}$

$C_2 = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}$

Q-JÓSÁGI TÉNYEZŐ:

$$Q = \frac{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}{\beta}$$

új $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

VÉGÜL:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

lecsengés

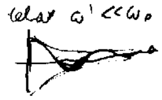
k - a 2 egymás utáni csúcs amplitúdójának az aránya

$$k = \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta T}$$

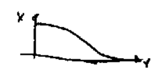
$\ln k = \beta T$ LOGARITMIKUS DEKREMENTUM.

• ha $\beta^2 < \omega_0^2$

tehát $\omega' \ll \omega_0$



• $\beta^2 = \omega_0^2$

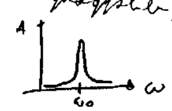


REZONANCIA

kényszerrezgés

Ll. nagy kilengésben rezgetjük ω_g-vel.

A rezgés amplitúdója akkor a legnagyobb, ha $\omega = \omega_0$



ilyenkor a gerjesztés:

$F_g = F_0\cos\omega_g t$

„az" egyenlet:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -Dx - k\frac{\partial x}{\partial t} + F_g$$

W ÁTVITELI FÜGGVÉNY

(K-EL JELÖLI GIBER)

Ebből kiszámoljuk ω_g, A_g -t

A meghatározó:

$$|W| = \frac{1}{\sqrt{m^2\left[(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} W}{\operatorname{Re} W} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega_g^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

A REZONANCIA (KÖR) FREKV.

ω_0 - a OSCILLÁCIÓTLAN SAJÁTFR.

HULLÁMMOZGÁS

- Ha a fizikai mennyiség változása (rezgése) tovább terjed. (téshen)
- a rezgés leválik a forrásról CSATOLÁS útján. (pl: megalaros erősítés a szomszédok között)
- A csatolás az elektrom. h.-nál: az egymást gerjesztő mágneses és elektromos mező.
- ideális eset: rezgő testből izotróp közegben MONOKROMATIKUS hullám válik le.
- DEFORMÁCIÓ MENTES HALADÁS: A kitérés 1:1 -ben eltolódik valamely irányba. ha az eltolás az idő függvényében változik, $b = -c \cdot t$ (eltolódik.)
- Y-KITÉRÉS $(y(x,t))$

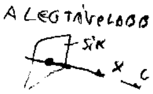
$$y = f(x - c \cdot t)$$

- adott t_n időpillanatban látható 1 hullámkép. $t_n + \Delta t$ -kor ugyanaz a hullámkép látható, csak $c \cdot \Delta t$ -vel eltolva
- $y = f\left(t_0 + \frac{\Delta x}{c}\right)$

ADOTT helyen. ha t_0-BAN $y = 0$

- SÍKHULLÁM:

1 adott minden pontjában a kitérés azonos fázisban van. (EZ A SÍK A HULLÁMFELÜLET) A LEGTÁVOLABBI, A HULLÁMFRONT.



(HULLÁMFEL. VALÓSÁGBAN HENGER)

- Ha $y_{(t)} = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

AKKOR

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right]$$

nem ugyanaz a x!

+x irányba terjedő HULLÁM.

- t időpontban a hullám képe:

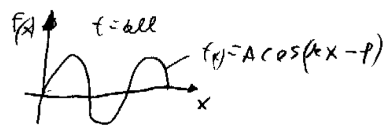
$$\cos\left(\frac{\omega}{c} x + \varphi_{(t)}\right)$$

- $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\lambda_{cos}}{\lambda_{hull}}$ HULLÁMSZÁM

λ aránya a cos FÜGGVÉNY λ-jához. $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ HULLÁMHOSSZ

- $y_{(x,t)} = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$

φ ERRE PERIODIKUS

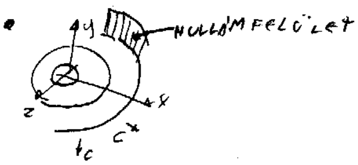


- $c = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$

- Ha a hullám minden irányban terjed a síkban, akkor (z-irányban)

$$y_{(\mathbf{r},t)} = A\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0)$$

itt k HULLÁMSZÁMVEKTOR, MERT r vektor.



- azonos fázisú pontok sebessége: FÁZISSEBESSÉG (x irány)

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

- GÖMBHULLÁM

hullámfelület GÖMB.

$$y_{(r,t)} = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

itt a kitérés iránya nem "látható"

$\frac{A}{r}$ - a helyfüggő AMPLITÚDÓ

KOMPLEXEN:

$$y_{(r,t)} = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

- HULLÁMEGYENLET

- 1 DIMENZIÓS (y kitérés)

$$\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2}$$

GYORSULÁS x/t_0-BAN

$y_{(r,t)}$ $\psi_{(r,t)}$-VEL SZOKTÁK JELÖLNI.

MINDEN FÜGGVÉNY, AMI kielégíti az egyenletet, c-sebességű hullámmozgást végez.

- RUGALMAS HULLÁMOK:

– ENERGIATERJEDÉS

- a hullám a terjedése irányában energiát szállít. Ennek jellemzője az
- INTENZITÁS:
  Terjedés irányára merőleges felületen egységnyi idő alatt szállított energia.

$$\frac{W}{A\cdot t} = I$$

(másképp: felületi átlagenergiasűrűség)

$I = w \cdot c$

ahol: w: átlagos térenergiasűrűség

- Tárolt energia:

$$E = \frac{1}{2}\rho\,\Delta V \cdot v_{max}^2$$

$$v_{max} = \omega \cdot A$$

- Az elektromágneses térnél

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) = $$

vizsgálódva

$$w = \varepsilon E^2$$

időegység alatt átáramlott térenergia (felületi teljesítmény)

= POYNTING-VEKTOR

- FÉNYABSZORBCIÓ:

LAMBERT-BEER-TÖRVÉNY:

Δx vastagságú anyagon áthaladva a kijövő fénysugár intenzitása csökken. Ami marad:

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

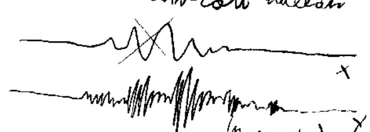
I_0: eredeti

β - ABSZORBCIÓS KOEFFICIENS (anyagra jellemző)

$(1/\beta = \ell$ -től $I = e^{-1} \cdot I_0)$

– HULLÁMCSOPORT:

Térben korlátozott hullám



Spektrum folytonos. különböző frekvenciájú hullámok szuperpozíciója

– HULLÁMOK TALÁLKOZÁSA:

szuperpozíció.

$$I_e = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

INTERFERENCIA:

a szuperponálódó hullámok fáziskülönbsége nem (nagyon) függ az időtől

Ha $\Delta\varphi$ lassan változik, akkor az intenzitás periodikusan változik

Ehhez kell, hogy $\omega_1 \cong \omega_2$ legyen.

Az ennek eleget tevő pontforrások KOHERENSEK

- ÁLLÓHULLÁM.

egymással szemben haladó KOHERENS forrású hullámoknak szuperpozíciója.

Ha a visszaverődés helyén $A_{(x)} = 0$ akkor ellentétes fázissal verődik vissza, és ÁLLÓHULLÁM lesz.

A távolság $= \left(k + \frac{1}{2}\right)\cdot\lambda$ $(k \in \mathbb{N})$

ÖRVÉNYES TEREK

ÖRVÉNYERŐSSÉG (MÁGN.)

$$\mathring{O}_B = \mathrm{rot}\,B = \mu_0\left(I_E + i\right)$$

$$= \mu_0\left(I_E + \frac{\Delta\Psi_E}{\Delta t}\varepsilon_0\right) = \mu_0\left(\frac{dU}{dt}C + I_E\right)$$

ELEKTR:

$$\mathring{O}_E = \mathrm{rot}\,E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t}A$$

$$= U_i \quad (N_1 : N_2 = 1 - 2)$$

$$U_i = -N_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N_2\frac{\Delta I}{\Delta t}N_1\mu\frac{A}{\ell}$$

MAXWELL	
I $\quad B = k\frac{I}{r}$ (GERJESZTÉSI TÖRV.) ÁRAM MÁGNESES TERE	II INDUKCIÓ
III $\quad \oint_A B\,dA = 0$ ZÁRT FEL. FLUX = 0 GAUSS-TÖRV. ~~q~~ FLUXUSA	IV

MÁS

GAUSS-TÉTEL

- felületre vett fluxus

$$\Phi_E = \oint_A E\,dA$$

– GAUSS:

zárt felületre vett FLUXUS

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{(vákuumban)}$$

fluxus arányos a töltéssel ahol van mennyiséggel

DIFFERENCIÁLISAN:

$$\mathrm{div}\,E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

– kondenzátorlap a térerősség: (GAUSSAL) (végtelen felületű)

$$\Phi = EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

a 2 fegyverzetre:

$\Phi = 2AE$ (felületek metszik vonalak az átfordulást, máshova nem mennek)

$$2AE = \frac{\rho A}{\varepsilon_0}$$

EBBŐL:

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}$$

– huzal térerőssége r távolságban:

$$E = \frac{\Phi}{A} = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

$$A = \ell \cdot 2r\pi$$

GERJESZTÉSI TÖRVÉNY

$$B = \frac{\mu_0}{2r\pi}\cdot I = k\frac{I}{r}$$

(VAGY: $I = \frac{rB}{k}$)

ZÁRT GÖRBE ÁLTAL KÖZREFOGOTT TERÜLETEN ÁTHALADÓ ÁRAM ARÁNYOS A B INDUKCIÓVEKTOROKNAK A GÖRBÉRE VETT INTEGRÁLJÁVAL

$$\oint_A B = \mu I$$

TEKERCSRE IS: (TOROID) $\ell = 2r\pi$

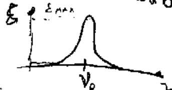
$$B = k\frac{I}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \quad N = \mu_0\frac{I}{\ell}N$$

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

HŐSUGÁRZÁS

1 test között kiegyenlítődhet a hőmérséklet, sugárzás útján is. Minden test sugároz is, és el is nyel. Egyensúlyban = nyiségű energiát bocsát ki és nyel el minden test.

A kisugárzott frekvencia-spektrum függ az anyagtól, a hőmérséklettől, felülettől



$E(\nu,T)$ - ENERGIA (SUGÁRZÁS)

- kisugárzott energia (teljesítmény) a spektrum $d\nu$ részében T-hőm.

$dE(\nu,T) = E \, d\nu \, \Delta t$

$E(\nu,T)$ KISUGÁRZOTT ENERGIA (EMISSZIÓKÉPESSÉG)

$\alpha(\nu,T)$ KISUGÁRZOTT ENERGIÁBÓL RÁESŐ RÉSZARÁNYT RÉSZT NYELI EL (abszorbcióképesség) (0 ... 1) (többi visszaverődik)

- $\frac{E}{\alpha}$ = állandó, és anyagra, testre jellemző. adott ν, T mellett!

- a kisugárzási és az abszorbciós spektrum illeszkedik egymásra

$E \cdot A = \alpha$

- ABSZOLÚT fekete test
$\alpha(\nu,T) = 1$ minden ν, T-re.
tehát mindent teljesen elnyel.
ha 2 „forró" testünk van, akkor az ABSFT fényesebben világít (a másik test nem ABSFT)
Pl: fényszóró fényes testben 1 pici lyuk. a belseje korom-fekete. A CSILLAGOK IS ILYENEK ($\alpha=1$)

- a tér és a testek között egyensúly áll fel. Ekkor a testek közötti elektromos tér (PL DOBOZBAN) a dobozba (testek közé) éppen beférő állóhullámok összegével modellezhető.
ahol $\omega_i = c \cdot n_i \frac{\pi}{L}$ L - távolság, $n_i = 1 \dots n$

Ehelyett a 3 térirányban mindenben kell
$\underline{k}_i = (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})$
n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} határban.
Adott lokalizáció: 1 MÓDUS
1 módushoz 2 POLARIZÁCIÓS ÁLLAPOT TARTOZIK.

- Ezek alapján:
ENERGIA mennyisége kvantált (PLANCK)
$E_0 = h\nu$ (elegendő kvantum)
PLANCK féle sugárzási törvény:
$E(\nu,T)$ - nagyon bonyolult (jó bonyolult)

ez az abszolút fekete test emissziós spektruma. (képesség)
- adott testre:

$$\lambda_{MAX} \cdot T = \text{állandó}$$

ez a WIEN-féle ELTOLÓDÁSI TÖRVÉNY
összegezve: $\lambda \to T$
~~A csillagok nagyon feketék tehát~~
így 1 KVANTUM - 1 FOTON

$$- E = n \cdot h\nu$$

n — DARAB

- FOTOEFFEKTUS
fény hatására elektronok lépnek ki
1 elektron $1 \cdot h\nu$ (kvantumos) energiát kap, ez a kilépésre + a gyorsításra fordítódik

$$h\nu = \Phi + \frac{1}{2} m v^2$$

Φ KILÉPÉSI MUNKA

- FOTON: $m=0$, de
$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ (IMPULZUS) $= \frac{h}{\lambda}$

- ATOMOK SZÍNKÉPE vonalos, tehát diszkrét frekvenciákon sugároznak. Most az elektronok csak meghatározott pályákon lehetnek. köztük lévő különbségek diszkrét. Ha az elektron ... vált, így elnyeli/kisugározhatja a különbséget

$$\Delta E = E_1 - E_2 = h\nu$$

- Az elektron impulzusa is kvantált
$p = nh$ ... n. kvantumszám
(BOHR féle kvantumfeltétel)

- az atom színképe nagyobb térben feloldódik vonalakra

- COMPTON-EFFEKTUS
Nagyenergiájú elektr. sugárzás éri atomot, akkor annál eredeti ν_0, de $\nu < \nu_0$ elektr. sugárzás, és elektronok is (compton elektronok) is távoznak. ezek aránya függ a (szórási) beesési szögtől

- $E = h\nu = \hbar\omega$ $\boxed{\hbar = \frac{h}{2\pi}}$

- ANYAGHULLÁM (DE BROGLIE)
mozgó anyagi tömeg HULLÁMHOSSZA:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$$

(ha elektr. mozog ...)

- HULLÁMOK:
HULLÁMSZÁMVEKTOR $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\lambda_{COS}}{\lambda_{HULL}} = \frac{2\pi}{\lambda}$
de lehet több a hullám iránya is
FÁZISSEBESSÉG: az azonos fázisú pontok sebessége $v_f = c$
DISZPERZIÓS RELÁCIÓ: $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$

- 2 részecske, mint 2 síkhullám, szuperpozíciójának nem lesz meghatározott impulzusa
Síkhullámok szuperpozíciója a HULLÁMCSOMAG (HULLÁMCSOPORT)
Egy (térben lokalizált) részecskéhez 1 hullámcsomagot kell rendelni
A hullámcsoport kiterjedése nő időben (szétfolyik)

- A részecskét egy Ψ ÁLLAPOTFÜGGVÉNY írja le. Ez megadja p, r, t (impulzus és hely)
Ψ nem adható meg pontosan, mert a hullámcsomag kiterjedése $\neq 0$
p-nem, mert ahhoz pontos k kellene, de a hullámcsomagnak ilyen nincs.

- hogy az elektron a mag körüli pályáján lehessen: $2\pi r = n\lambda$ kell.

- Ψ-ből az adott részecskére jellemző bármely érték számítható (mennyiség)

- IDŐFÜGGŐ SCHRÖDINGER EGYENLET
Ezzel az elektron is megoldható, tetszőleges térben is.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(r)\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

V: E_{POT}

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

a Descartes-koordinátarendszerben.

$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$, $\Psi(x,t)$
1 dimenzióban.

- IDŐFÜGGETLEN SCHRÖDINGER-EGYENLET
$\Psi = \Phi(x) \cdot \tau(t)$ alakban felírva

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi(x) + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x)$$

E ÖSSZENERGIA (SAJÁTÉRTÉK)

Ezt 0-ra kiforva a SAJÁTÉRTÉKEGYENLET
Φ állapotfüggvényt, és E-energia sajátértékeket kell meghatározni.

$$\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \Phi_i(x) \cdot T_i(t)$$

Ψ a SCHRÖDINGER egyenlet megoldása!

- MÉRÉS 1 $\hat{O}$ operátor jellemzi. Sajátfüggvénye $f(x)$, k ~~...~~ sajátértékét mérjük.

$$\hat{O} f(x) = k \, f(x)$$

ha az állapotfüggvény = mérő oper. sajátfüggvényével, akkor k-t mérjük
Ha $\neq$ akkor a k-k valamelyike lesz a mért érték, mindegyik ... valószínűséggel.

- Ψ akkor sajátfüggvénye 2 operátornak, ha felcserélhetők $[A,B]=0$
$[A,B] = AB - BA$ (KOMMUTÁTOR)

k_i mérésének a valószínűsége
$P(k_i) = |\langle\Psi|\varphi_i\rangle|^2 = \int_V \Psi^*\varphi_i \, dV$
Ψ állapotfüggv., φ_i sajátfüggv.
oz ogázi: skalárszorzat, assz. P

- hely és impulzus nem mérhető egyszerre pontosan.
(nos operátoraira: ha a 2 mennyiségnek egyszerre sajátfüggvénye Ψ, vagy felcserélhetők) KANONIKUSAN KONJUGÁLT MENNYISÉGPÁROK. $[A,B]=0$
EZ A HEISENBERG FÉLE HATÁROZATLANSÁGI RELÁCIÓ
$\Delta A \, \Delta B > \frac{\hbar}{2}$
(mennyiséget szorozva [J$\cdot$s])

- KVM. 1 POSZTULÁTUMA
Mikrorészecske állapota teljesen leírható Ψ állapotfüggvénnyel.
ami REGULÁRIS függvény.
REG. F. RENDSZER:
• bármelyik lineárisan független a többitől
• ortonormált

- 2. POSZT.
O mennyiség mérését $\hat{O}$ operátor reprezentálja. $\hat{O}$ sajátértékei a lehetséges mérési eredmények.
- ha $\Psi = \varphi_i$ (ami $\hat{O}$ sajátf.) akkor k_i-t mérünk. SAJÁTÁLLAPOT
ha $\Psi = \sum c_i\varphi_i$ k_i-t közül $P(k_i)$ valószínűségekkel mérünk 1 et.
ez a KEVERT ÁLLAPOT

- 3. POSZT.
$P(k_i) = |\langle\Psi|\varphi_i\rangle|^2$
Ψ - állapotfüggv. φ_i $\hat{O}$ sajátállapot
- O-t mérünk:
$\langle O\rangle = \langle\Psi|\hat{O}\Psi\rangle$

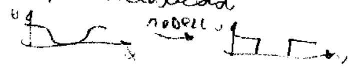
- 4. POSZT.
KANONIKUSAN KONJUGÁLT mennyiség-párokra, operátoraira
$[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{\hbar}{i}$

- 5. POSZT.
Ψ kielégíti a Schrödinger-egyenletet $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$
(időfüggetlen)

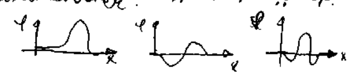
- REGULÁRIS FÜGGVÉNY:
• valós változók egyértékű függvényei
• mindenütt folytonos
• folytonosan diff.HATÓAK.
• NORMÁLHATÓAK.
$\int_{V=\infty} \Psi \, dV < \infty$

- Időfüggő SCHRÖDINGER-EGYENLET
egy is felírható $\hat{H}\phi = \varepsilon\phi$
$\hat{H}$ - HAMILTON-OPERÁTOR
sajátértékei adják a ENERGIA lehetséges értékeit.

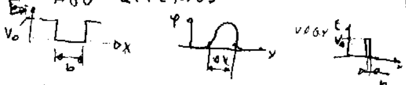
- ELEKTRONSPIN
elektron saját impulzusmomentuma. értéke $\pm\frac{1}{2}$

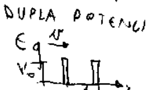
- POTENCIÁLKÁD (6x?)
atomrácsban 1 elektronra 2 (több) atomtörzs hat, ők a potenciálkád


- STACIONÁRIUS ÁLLAPOTOK.
elektronok valószínű ~~kötési~~ megtalálási helyei pl. atombor, rácsban. energiaszintek

- Elektron energiája csak bizonyos értékeket vehet fel. (csak bizonyos Ψ-k lehetségesek)
Ezek a Ψ-k csomóhely-számban különböznek. nagyobb E, több csp.


- részecske kinetikus energiája nem lehet $= 0$. (HATÁROZATLANSÁG)
Mert különben teljesen ismert lenne.
NULLPONTI ENERGIA

- ALAGÚT EFFEKTUS

A részecske (mozgó) átjut a falon bizonyos valószínűséggel.
ha $\Delta x > b$ $\Delta x > \sqrt{\frac{\hbar^2}{8m\Delta E}}$
$b_{max} = \hbar / \sqrt{8m(V_0-E)}$

- DUPLA POTENCIÁLGÁT

A 2 fal között ~~adott~~ nagy valószínűséggel megvalósít a részecske, ha $d = n \cdot \Delta x$

- 2ÖS POTENCIÁLGÖDÖR
(atomrácsban 2 atom közötti 2 rész)
- részecske akkor jut át a potenciálgáton, ha az energiájának a bizonytalansága nagyobb, mint $V_0 - E$
ha $\Delta E > V_0 - E$
$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2mb}$
$\Delta x \cdot \Delta p < \hbar$ $\Delta x > b$ legyen,
$\Delta p < \frac{\hbar}{b}$ $\Rightarrow \Delta E = \frac{(p+\Delta p)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}$

- LINEÁRIS OSZCILLÁTOR
harmonikus rezgőmozgást végző részecske.
$V_0 = \frac{1}{2}Dx^2$ potenciálgödörnek felel meg
ha a részecske energiája kvantált, ($\omega = \frac{2V_0}{\hbar}$)
$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ - ZÉRUSPONTI ENERGIA.

11. körmozgás
- HIDROGÉNATOM
az elektron $V(r) = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r}$
körben mozog $\to \Psi$:?
E értékei:
$E_1 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$
n-kvantumszám (FŐ)

- DOBOZBA ZÁRT ELEKTRON (KÖTÖTT)
doboz: végtelen nagy potenciálgátak közötti tér (POT. GÖDÖR)
ilyenkor az elektron $P=1$
v.-gel megtalálható a DOBOZBAN
a Ψ 1 álló hullám a dobozban (1D)

- PAULI elv: SOK elektron rendszerben minden elektron más kvantumállapotban van.

- DOBOZ...
SCH egyenlet megoldására
$k = E$ energiasajátérték
$E_L = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n}{a}\right)^2$ lehet csak (kvantált)
~~lehet külö~~
3D-ben 3 kvantumszám kell
$E(n_x,n_y,n_z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2\right]$
ahc léghatárt
$n_i - 1$ csomópont van, ...

ELEKTRON MÁGNESES MOMENTUMA

- Az elektronnak saját IMPULZUSMOMENTUMA A SPIN $S = \pm \frac{1}{2}\hbar$
- van mágneses dipólmomentuma $M = \kappa \times H$ lát rá (NYOMATÉK) $|m| = \mu_0 \frac{e}{2m_e} \hbar v$.

- ZEEMAN-EFFEKTUS.
elektron felgerjeszthető magasabb energiájú pályára mikrohullámú sugárzással ha $\frac{\hbar\omega}{2} = \Delta E$
TÉRHATÁSÁRA megnő a lehetséges elektronállapotok száma, így a színképvonalak száma (E térerősségtől függ)

- HIDROGÉNATOM.
1 elektron mozog 1 $V(r) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$ potenciáltérben.
Az elektron energiája
$E = E(m, \ell, n)$ ahol n a KVANTUMSZÁM
lesz mérhető rész
a sugarú gömbben mozogva: hely bizonytalanság = a
$E = \frac{p^2}{2m} + eV(r)$
n-edik gerjesztett állapotban n félhullám hosszú állóhullám keletkezik
$p_{ij} = p_{eébi} \cdot \frac{n\hbar}{r}$
itt n - a FŐKVANTUMSZÁM (az energia csak ettől függ)
$n = f + 1$ ahol f a hullámfüggvény CSOMÓFELÜLETEINEK száma $f = q + \ell$, ahol q csomógömbök száma, ℓ a CSOMÓSÍKOK SZÁMA / a MELLÉKKVANTUMSZÁM

- ELEKTRONPÁLYA:
adott ENERGIASZINTHEZ tartozó téreloszlás $\Psi(r)$

- PÁLYAJELÖLÉS
FŐKVANTUMSZÁM + BETŰ INDEX INDEX

n	ℓ	BETŰ
	0	S
	1	P
	2	D
	3	F

(KITÉRÉSMENTES RÉSZEK)
CSOMÓGÖMB: CSOMÓSÍK:
(SÓMÓ PÁLYA)

VAN MÉG INDEX IS: (A VAGY)
ALSÓ PÁLYA ORIENTÁCIÓJA
FELSŐ: HÁNY e^- VAN AZ ADOTT PÁLYÁN.

- IMPULZUSMOMENTUM
$M = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$
(kvantált)
iránya sem adható meg pontosan (ez is kvantált) szerint $2\ell + 1$ különböző állapotfüggvény lehetséges m kvantumszám jelenti ezt az irányítottságot.
Ez a MÁGNESES KVANTUMSZÁM
$-\ell \leq m \leq \ell$

- MÁGNESES MOMENTUM:
$\mu = -\frac{e}{2me} N$ ($\frac{\mu}{N}$ a GIROMÁGNESES FAKTOR)
ennek iránya is kvantált.
(külső tér gyorsítja az elektronokat, akkor a különböző μ-ű részecskék energiája különböző lesz)

- ELEKTRONSAJÁT MÁGNESES MOMENTUMA VAN, kétféle lehet a mágneses tér, és az impulzusmomentum összefüggésének szerint van saját IMPULZUS MOMENTUMA IS!
EZ A SPIN $S = \pm\frac{1}{2}$
(S-SPINKVANTUMSZÁM)

- KVANTUMSZÁMOK
n → ENERGIA
ℓ → hullámfüggvény alakja
m → hullám orientációja
s → saját perdület

- FELES SPINŰ RÉSZECSKÉK:
A FERMIONOK:
- ELEKTRON
- PROTON
- NEUTRON

$\} S = \pm\frac{1}{2}$

EGÉSZ SPINŰ: BOZONOK:
- FOTON $S = 1$
- MEZONOK $S = 0$

- NAGYOBB RENDSZÁMÚ ATOM:
N protonhoz képest sorban hozzájuk az elektronokat.
Az elektron állapotai megegyeznek a Z protonszámnál felírható elektronállapotokkal.

- PAULI ELV:
Több elektront tartalmazó kvantummechanikai rendszerben (pl atom, molekula, krist.) minden egyes elektron más-más kvantumállapotban van. (4 kvantumszám közül legalább 1 különböző lehet 2 e között)
1 elektronpályán MAX 2 elektron lehet, ellentétes spinnel.
- adott n - [redacted] fő-kvantumszámhoz n^2 db pálya tartozik → $2n^2$ db elektron
adott n-hez tartozó pályák összessége [redacted]
1 héj. adott ℓ → 1 alhéj.
0 pályákon 2 e^-
p —"— 6 e^-
d —"— 10 e^-
f —"— 14 e

PÁLYÁK:
4f
4d
4p
4s
4p
4s
3d
3d
3d
3d
3p
3p
3p
3s
2p
2p
2p
2s
1s
(E)

- $n = 3$-tól a d állapotok energiája akkora nagy, hogy nagyobb, mint a következő héj s pályáinak, ezért azok hamarabb előbb feltöltődnek.
(MELLÉKCSOPORT A PER.R.)
- első 2 oszlop: alkáli (föld) fémek
3 nagy nagyjából
- az f állapotok betöltődésével új csoport a LANTANIDÁK, AKTINIDÁK.
- 2 elektron energiája megegyezhet, ha ment lehet egyszerre (coulomb)

- KÉMIAI KÖTÉSEK:
alapvető összekapcsolódások az energiafelszabadulással jön
KOVALENS, FÉMES, ÉS IONOS KÖTÉS
- KOVALENS KÖTÉS:
MOLEKULÁK, VAGY KRISTÁLYOK lesznek a molekula a anyag legkisebb előfordulási formája a természetben ATOMRÁCSÚ kristályokban

ionos kötésben elektrosztatikus kölcsönhatás van.

— HIDROGÉN MOLEKULA-ION
2 PROTON + 1 elektron
1 állapotban az elektron.
2 proton távolsága $\frac{\lambda}{2}$
A 2 proton közti tartományban elektron =.

hidrogénmolekula:
ehhez jön még 1 elektron ellentétes spinnel.

— KOVALENS KÖTÉS: olyan elektron, vagy elektronpár hozza létre, ami egyszerre tartozik 2 vagy több atommaghoz.

— ahol az elektronok vannak (kötő elektronok) azok a MOLEKULAPÁLYÁK
Az így összekapcsolódott atomok elektronszerkezete a nemesgázokéhoz hasonlít.
Ez a M.P. az eredeti atomban lévő pályák szuperpozíciója
$c_1, c_2 \in 1$
$\psi_i = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$

középen ~~nagyobb~~ nagyobb lesz az elektronsűrűség.
Ez lehetővé teszi a magok taszítását az ilyen ~~pálya~~ a kötőpálya.

Ha gerjesztjük az atomot, akkor a gerjesztett pályának csomósíkja lesz a 2 mag között:
LAZÍTÓPÁLYA (nem ellensúlyozza a 2 mag taszítását. ~~Így~~ Ilyen csak instabil állapot → molekula felbomlik.
Kapcsolódás akkor van, ha a kötőpályák száma nagyobb, mint a lazító pályáké. különbségük: kötés rendje / vegyértékkel kapcsolódnak

— σ KÖTÉS: ha a 2 magot összekötő tengelyre forg. szimmetrikus a kötés
lehet kötő, lazító is! (σ* LAZÍTÓ)
π KÖTÉS: TÜKÖRSZIMMETRIKUS
lehet kötő, lazító

σ PÁLYA energiája sokkal kisebb mint π-é.

— nem csak hidrogénszerű pályák vannak, hanem azok a szuperpozíciói is. ezek a HIBRIDÁLLAPOTOK
— szénnél
1 db 2s 3 db 2p pályából
4 db HIBRID PÁLYA LESZ.
(sp^3 HIBRID)
Ezen pályák energiáinak az összege nagyobb mint a tiszta pályáké.
(energiabefektetést igényel)
Molekula energiája akkor minimális, ha HIBRID pályák alakulnak ki.

— POLÁROS MOLEKULÁK:
aszimmetrikus HIBRIDPÁLYÁK alakulnak ki a molekulákban.
1 ilyen alakot hoznak létre összekapcsolják a magokat. ($+ \oplus$)
Pl. A különböző magok ~~és~~ ≠ mértékben vonzzák az elektronokat.
EZ AZ ELEKTRONEGATIVITÁS.
(Ez minél jobban különbözik, annál erősebben poláros a molekula)

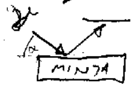
— FÉMES KÖTÉS
a külső S elektronok kötésre válhat. (Ezek hullámfüggvényeinek összege elmosódik) delokalizálódnak az elektronok.

- elektronegativitások

	KOV	FÉM	ION
összeg	NAGY	KIS	NAGY
különbs.	KIS	0	NAGY

— KRISTÁLY
ha az atomok a tér minden irányában szigorú rendben (periodikusan) helyezkednek el.

— a fizikai tulajdonságok a különböző irányokban lényegesen eltérhetnek.

— röntgendiffrakciós vizsgálat.

az anyag intenzitás maximumok, minimumok vannak, ha (a = rácsállandó)
$2a \sin\alpha = n\lambda_{\ddot{u}}$
Tehát ha (a kiszóródó párhuzamos) sugarak útkülönbsége $n\lambda$ ($n \in \mathbb{N}$)

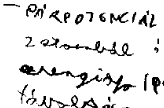
— KONTRÉCSZATOMOK – RONDOK elemi szerkezetének:
A rácsokkal 3 (nem 1 síkban lévő) legközelebbi rácsponthoz 1-1 vektort húzunk.
Rács lehet tükörszimmetrikus, vagy forgásszimmetrikus (1/n-nyi van olyan szög, van ahol egyszer)

— RÁCSOK:
atomrácsok, ionrácsok, fémes rácsok, molekularácsok
atomrács: atomok, kovalens
ionrács: +, - ionok
fémes: fémes váltakozva.

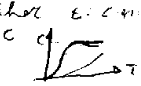
— PIEZOELEKTROMOSSÁG:
ionrács # nyomás hatására az +, és a - ionok töltésközéppontjai eltolódnak
2 felületen feszült. jelenik meg

— FÉMES RÁCSOK:
• HATSZÖGES
rétegek vannak: AB ABAB..
• FKK
ABCABCABC
rétegződés (azonos illeszkedésű síkok) (LAPÁTLÓ = 4R)
• TKK
KOCKA + a kocka középén elemi cella a éle:
testátló = 4R

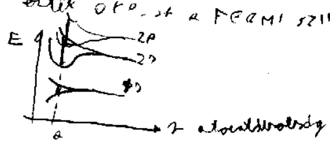
— MOLEKULARÁCS:
másodlagos kötések vannak
HIDROGÉNHÍD ÉS VAN DER WAALS-kötés

— PÁRPOTENCIÁL-FÜGGVÉNY:
2 atomból álló rendszer energiája (POT) az atom-távolság függvényében

Φ_0 - KÖTÉSI ENERG.
$r_0 = 0 K°$-ON A RÁCSÁLLANDÓ

Egész kristály kötési energiája $= \Sigma \Phi_0$

— MÓLHŐ: 1 MÓLNYI ANYAG 1K°-kal történő melegítéséhez szükséges munka C


- VEZETŐK:
kémiai kevés fesz hatására is számottevő áram folyik szigetelőkben nem.
- félvezető:
ellenállása egy csökken a hőm emelésével (termikus U.)
- Hall eff.
félvezetőben folyó áramra ható mágneses mező eltéríti az áramot (LORENTZ erő) így (HALL) fesz keletkezik (fémben B=0, szigetelőben I=0)
- atomokban az eredeti potenciálgödör magassága lecsökkent (véges) szélessége = a rácsállandó.
A megoldásokból az a.k. alakban egyenletes, félbolt. ellapul az eredeti vezetésben elektronok (3D) az így potenciálgödör felett lennének (a régi alatt volt)
- N db atom összes elektronja 1 kvantummechanikai rendszert alkot. (PAULI: azonos állapotban nem lehetnek) ezért az eredeti energiaszintek felhasadnak N db egymáshoz közeli szintre. EZEK MOST MÁR SÁVOK.
A SÁVOK KÖZÖTT TILTOTT SÁV VAN
A 0K°-on a legmagasabb betöltött energiaszint a VEGYÉRTÉKSÁV. az e feletti SÁV a VEZETÉSI SÁV
a LEGMAGASABB betöltött E érték 0K°-on a FERMI SZINT



- FÉLVEZETŐK:
szigeteléshez hasonló, csak a tiltott sáv kisebb.
T=0K°-on szigetelő
T→SOK néhány elektron a vezetési sávba kerül. ezek, és a visszamaradó lyukak E-tér hatására elmozdulnak. szigorúan csak a T hatására a fény is gerjesztheti az elektronokat.
- szennyezés hatására a sávok töltéshordozókoncentráció növelhető
- fermi szint: $E_F = \frac{E_V + E_C}{2}$
tiszta félvezetőknél

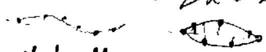
FERMI SZINT:
ahol $p = \frac{1}{2}$ megtalálási valószínűség.
DONOR szennyezéssel E_F nő.
- a DONOR atom elektron energiaszintje E_F és E_C között van.

- kristályrács:
legkisebb ismétlődő atomcsoport.
- elemi cella:
olyan rácspontokkal épített idom, ~~amiből~~ esik összeillesztésével pontosan építhető.
PRIMITÍV CELLA: síma KOCKA (EGYSZERŰ KOCKÁS)
CENTRÁLT CELLA: FKK TKK
- rácspont megadható

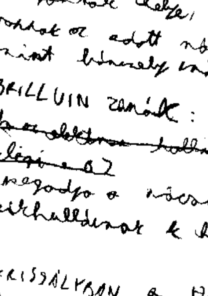
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

- irány megadása $[h,k,l]$ vektor az felírásra
$r = h a_1 + k a_2 + l a_3$
- KRISTÁLYHIBÁK:
• PONTHIBÁK:
VAKANCIA ön intersticiális, ezek száma
INTERSTICIÓS, SZUBSZTITÚCIÓS: ezek számossága koncentráció hőmérsékletfüggő.
ezek száma $n = N e^{-\frac{E_V}{kT}}$
• VONALHIBÁK - DISZLOKÁCIÓK
- DIFFÚZIÓ
ezek hatására:
• vakancia elmozdulás
• intersticiális elmozd.
• kicserélődés
• kick out
- DISZLOKÁCIÓK
ha (m.a.) síkok az egyik végén 1 sorral más
él és csavardiszlokációk vannak
meglágyítják a kristály alakítását.
- FELÜLETI HIBÁK:
szemcsehatári hiba (hasz cella hiányzik) kisszögű orientációs
- TÉRFOGATI HIBÁK:
üregek, kiválások
- AMORF ANYAG: átmeneti struktúrájú.

- rács és síkhullám kölcsönhatása:
az egyes rácspontokról (FOTONOK) visszaszórt elektronok. ezek a fáziskülönbséggel interferálnak.
- ELEKTRONOK SZÓRÓDÁSA:
csak a k hullámszámú elektronok szóródnak.
- BORN-KÁRMÁN feltétel
kristályban: $\psi(r+R)=\psi(r)$
- rezgések:
atomok így rezegnek a rácsban, mint rugókkal (kis) összekötött golyók.
Hullámként terjed a rezgés

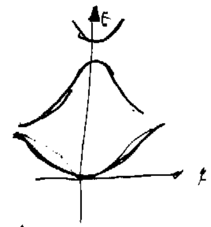


A hullámok a rácsban diszkrét energiakvantumokat szállítanak.
$E=\hbar\omega(q)$ FONON az E kvantum
HANGSEBESSÉG: $\frac{d\omega}{dq}$
- WIGNER-SEITZ cella:
az a tartomány, amely közelebb vannak az adott rácsponthoz, mint bármely másikhoz.
- BRILLOUIN zónák:
~~[illegible]~~
megadja a rácsban terjedő síkhullámok k hullámszámát.
- KRISTÁLYBAN A HŐMOZGÁS:
nem összefüggő, hanem:
az atomok rezgései ÁLLÓHULLÁMOKKÁ csatolódnak
ennek a terjedési sebessége a hangsebesség.
N atomnál 3N állóhullám alakulhat ki.
ezek energiája kvantált.
az ilyen hν kvantum a FONON (részecskeleírása)
- DISZPERZIÓS RELÁCIÓ: $\omega(q)$
leírja a HANG/HŐ/FÉNY terjedését



rezgéshullámok ellenőrzése

elektronok ENERGIA-DISZPERZIÓS RELÁCIÓJA:



hogy függetlenítsük ~~elektronokat~~ kezelhessük az elektronokat, bevezetjük az m_e effektív tömeget.

- $I = E \cdot J$

+

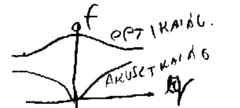
- KOORDINÁCIÓS SZÁM: legközelebbi szomszéd atomok száma.

- Minden kristálynak van olyan része, amiből a teljes kristály felépíthető. Ez az elemi cella.
- így rácspontokba jutunk, ha az oldalélvektorok N-szeresével elmozdulunk. $R = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$
- MILLER INDEX: (SÍK)
  - elemi cellát koordinátarendszerbe,
  - oldalélek koordinátáinak a reciprokát vesszük.
  - ezt szorozzuk úgy, hogy a ~~legkisebb~~ lehető legkisebb egész számokat kapjuk.

  (a, b, c)

síkot jelöl ki. (ha párhuzamos a sík xy, yz... koordinátával akkor ∞ index be legyen ezért a reciprok)
több sík lehet ekvivalens, ezek közül az egyiket $\{a, b, c\}$ jelölve megkapjuk az összeset.
Il. párhuzamos síkok 100, 010, 001

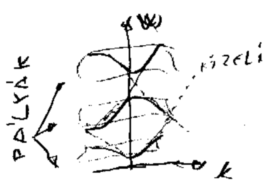
- MILLER INDEX, mint irány: ha az elemi cella bázisvektorainak $n_1 n_2 n_3$-szorosát vesszük $[n_1 n_2 n_3]$
- rezgési energiakvantum: FONON. Akusztikus (HŐ) hullám formájában terjed. van transzverzális, és longitudinális hullám. ezek frekvenciája nem lehet tetszőleges, hogy a hullámszám teljesíti f függvényében az ω (DISZPERZIÓS RELÁCIÓ) $E = \hbar\omega$



k - HULLÁMSZÁMVEKTOR:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\lambda_{rács}}{\lambda_{hull}}$$

- ELEKTRON - ENERGIA - DISZPERZIÓS RELÁCIÓ:



- ELEKTRON MOZGÁSA ERŐTÉRBEN

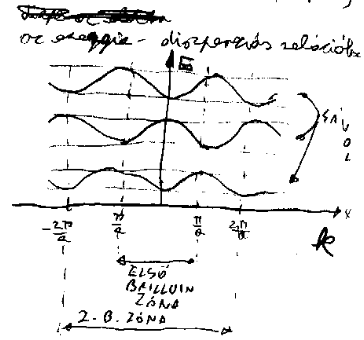
$m a = F_{külső} + F_{belső}$ ← RÁCS

ezt úgy is leírhatjuk, hogy:

$m_{eff} \cdot a = F_{külső}$

- KRISTÁLYOK:
- BÁZIS: legkisebb ismétlődő darab.
- ELEMI CELLA: olyan szorzatok összege amivel a rács felépíthető
- PRIMITÍV CELLA: olyan cella, ami csak csúcspontjában tartalmaz pontokat.
- centrált cella: ~~[illegible]~~ olyan hogy tér közepén is.

- VIGNER SEITZ CELLA: legközelebbi szomszédokhoz húzott szakaszok felezősíkjai által határolt idom.
- ALAPESETEK k-ból a BRILLUIN-ZÓNA határozza meg (DISZP.R.)
- BRILLUIN ZÓNA (434.o.)
~~[illegible]~~ az energia-diszperziós relációban



az első BRILLUIN zóna a WIGNER SEITZ CELLA.

Az elektronok energiája (részben) csak ezen sávok valamelyikében helyezkedhet el.
- BRILLUIN-ZÓNÁK: ahol $E(k)$ értékek ismétlődnek (azaz periódus van benne).
Zóna térfogata = a reciprokos elemi cellájának a térfogatával
- a szabad elektron $E(k)$ függvényének szakadása van a BRILLUIN zóna határán. ~~[illegible]~~
- A brillouin zónához eső k-jú síkhullámok nem szóródnak
- a (Fermi-lan) a vezetési sáv részlegesen betöltött (OK. az ión)
- LYUKVEZETÉS: vegyértékelektron gerjesztésekor negatív a teljes betöltött vegyértéksávban, így ott az egyensúlyi eloszlás megváltozhat. az itteni e-ok is vezetnek.
LYUK: + töltésű ($-k$) - hullám-számmal
- RECIPROKRÁCS: új bázisvektorok:

$$b_i = \frac{2\pi}{V}(a_j \times a_k)$$

- 1 Å (ANGSTRÖM)
$1 Å = 0{,}1 nm$

- ELEKTROMOS VEZETÉS

$\bar{J} = \sigma \bar{E}$

σ - FAJLAGOS VEZETÉS $= \frac{1}{\varrho}$

- vezetés:

termikus energia elektronokat juttat a vezetési sávba
ez a termikus generáció
~~[illegible]~~ szabad elektron és lyuk keletkezik.
Ellentéte a rekombináció.

- adalékolás a töltés-hordozószám növelése.
nem szimmetrikusan.

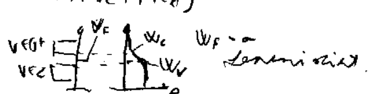
DONOR: 5 vegyértékű
N_e ~~[illegible]~~ N_{LY} nem nő.

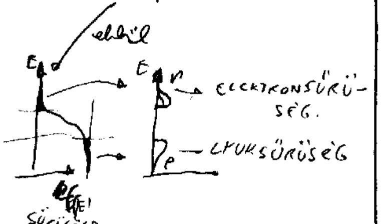
AKCEPTOR:
N_{LY} NŐ N_e nem nő

A donorok a + elektron nem kerül automatikusan a vezetési sávba, hanem kiveszi az elő. (ez a kicsi a kötési energiája, ami miatt kis hőmérsékleten elengedi az elektront)

- megengedett állapotok sűrűsége

elhelyezkedő betöltési valószínűség (FERMI-DIRAC STATISZTIKA)





$n = c\sqrt{T}^3 e^{-\frac{W_c - W_F}{kT}}$

$p = c\sqrt{T}^3 e^{\frac{W_F - W_V}{kT}}$

- TÖMEGHATÁS TÖRVÉNY:

$n_i^2 = n \cdot p = c\, T^3 e^{-\frac{W_g}{kT}}$

W_g a tiltott sáv szélessége

$np = \text{áll}$ ha $T = \text{áll}$.

SZOBAHŐM: $n \cdot p \approx 10^{20}$

- ha az egyik adalékolást megadjuk, akkor a másik töltéshordozó sűrűsége számolható

$n_i^2 = n \cdot p = N_D \quad p = n \cdot N_A$

- ÁRAMOK A FÉLVEZETŐKBEN

- SODRÓDÁSI ÁRAM

elektromos tér kelti. hordozók rendezetlen mozgása rendeződik a tér hatására.

$v = \mu \bar{E}$ μ - mozgékonyság.

$J = \underbrace{q \cdot (n\mu_n + p\mu_p)}_{\sigma \text{ - FAJLAGOS VK.}} \bar{E}$

- DIFFÚZIÓS ÁRAM

töltéshordozó-koncentráció-különbség - kiegyenlítődés.

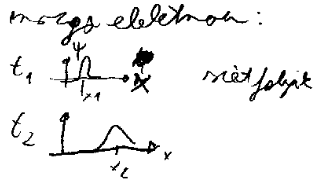
$\bar{J}_n = q D_n \operatorname{grad} n$

$\sim$

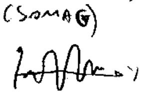
$D = \frac{kT}{q}\mu$

- INTRINSIC félvezető = szerkezeti félvezető

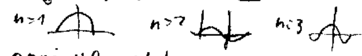
- erőmentes térben mozgó elektron:



- az állapotfüggvény inkább egyszerű (HULLÁM-CSOMAG)

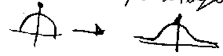


- dobozba zárt elektron állapotfüggvényei különböző energia-szinteknél értéke



egyre jobban, akkor (kötött[?] számán?)

ha nem doboz, hanem (véges mély) potenciálgát: akkor a széleken nem nulla a kezdet, hanem a tengely a [illegible]



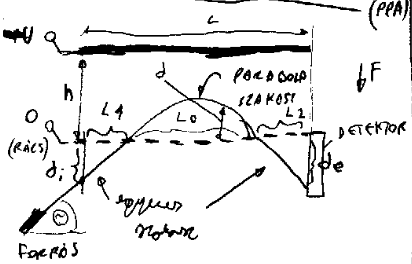
VÁKUM

KÖZEPES SZABAD ÚTHOSSZ:
- 2 ütközés között.
levegőben normálisan 10^{-7} m
- akkor jó a vákuum, ha forrás és a detektor közötti távolságnál sokkal nagyobb a szabad úthossz.
- MEAN FREE PATH
- 10^{-9} BAR
- a gázrészecskék ne tegyék tönkre a vizsgált (tiszta) felületet.

ENERGIAANALÍZIS

- részecskék (főleg...) energiaeloszlását kell mérni.
- pl: elektronmikroszkóp (pásztázó):
  Elektronnyalábbal bombázzuk az anyagot, a visszaszórt elektronok energiája jellemző az anyag azon darabjára, ahonnan ő visszaszóródott.
- MÓDSZEREK:

(1) PÁRHUZAMOS LEMEZ-ANALIZ. (PPA)



- A rácsot átnagy... sugár (nagy része)
- A rácstól kicsit távolabb olyan a tere, mintha sima síkkondenzátor lenne
-

$L_1 = d_i \,\mathrm{ctg}\,\Theta$

$L_2 = d_e \,\mathrm{ctg}\,\Theta$

$F = \frac{U}{h} q_0 = m \cdot a$

($\mathcal{E}$ - mozgási energia)

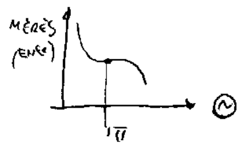
- MEDDIG VAN BENT?

$\tau = \frac{hm}{qU} v_0 \sin\Theta = \frac{v}{a}\sin\Theta$

$L_0 = 2\tau\, v_0\cos\Theta = \frac{2h\mathcal{E}}{U}\sin 2\Theta$

EBBŐL MÁR de CSAK GEOMETRIAI SZÁMÍTÁS
- Θ MENNYI LEGYEN?

A bemenetén hiroztos Θ intervallumban jönnek a részecskék. (Ennek minden, azt szűrik, de még így is) úgy Θ olyan legyen, hogy minél nagyobb ΔΘ-ra is kicsi legyen az eltérés a mért értékben.



nagyobb ΔΘ-hoz KIS ΔE tartozik

teljesüljön $\frac{\partial}{\partial\Theta}\mathcal{E} = 0$

és $\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\mathcal{E} = 0$

(MÉRT)
$\mathcal{E} = (d_i + d_e)\,\mathrm{ctg}\,\Theta + \frac{\mathcal{E}}{U} 2h \sin 2\Theta$

...

$\Theta = 30°$

- $\frac{\mathcal{E}}{U} = \frac{2d}{h}$

- $L =$

- $h = ?$
minél kisebb legyen, de azért a részecskék ne ütközzenek bele a felső elektródába:
$d_{max} < h$ legyen

$E_M = ?$ az $= E_h$

$E_M = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \quad E_h = q_0 \cdot U$

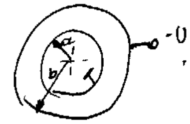
v_0 helyett $v_0 \sin\Theta$ - kell!

Cél:
$E \to d_e$ összefüggés

EZEK SZŰRIK IS ($\overset{E}{\text{SÁV}}$) a lassú részecs.

(2) HENGERES TÜKÖR-ANALIZÁTOR (CMA)

ugyanaz mint az előző, csak itt a 2 elektróda össze van tekerve.



ennek a hatásmechanizmusa az előző.
- itt L_0 más lesz, mert 2 henger között más (LOG) a potenciáleloszlás, mint a síklemezek között.

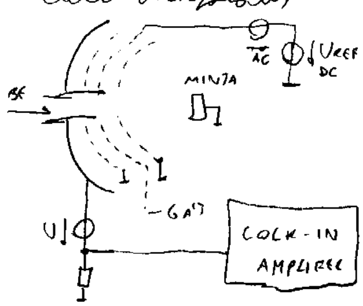
$V_x = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

- $\tau = ?$
- L_0
} bonyolultabb, mint a síklemezesnél.

- Ha ... akkor olyan, mint a síklemezes

(2) FÉKEZŐTERES ANALIZÁTOR (RFA)

- felületérzékeny típusú
- A részecskék útjába 1 POTENCIÁLGÁTAT teszünk. Ezen csak azok jutnak át, akiknek elég nagy az energiája.
- ELEKTRONMIKROSZKÓP szekunder elektron-energiaeloszlását vizsgáljuk (primer a gerjesztő elektronnyalábé)



- A belső rács földön van, hogy visszatartsa (gátolja) a teret a gömbön belül.
- a 2. rács a potenciálgát
- ugyano föld,
- majd a külső KOLLEKTOR, amibe ütköznek a visszamaradt elektronok, és változtatjuk annak potenciálját.
- Erősítő: a LOCK-IN erősítő.
- a gátat kis szinusszal változtatgatjuk (MODULÁLJUK) most majd a detektor ~~akár~~ az abszolút potenciálját nézi a KOLLEKTORNAK, hanem annak megváltozását. Így a detektor a bejövő JELE arányos a visszavert elektron mennyiséggel. (A bizonyos határon felül) így a spektrum: milyen U_{EF} (gát)-hoz milyen ~~[illegible]~~ mennyiség tartozik. $\frac{dI}{dE}$ — E
- A szűrés miatt a különböző felharmoni-kusok a különböző deriváltak. (az energiaspektrumnak.) A felharmonikusok előállítása nemlineáris áramkörökkel ~~[illegible]~~ SZORZ (F. SZORZÓ ÁRAMKÖR)

CENTRÁLIS ERŐTÉR

FÉLGÖMB-ENERGIA-ANALIZÁTOR

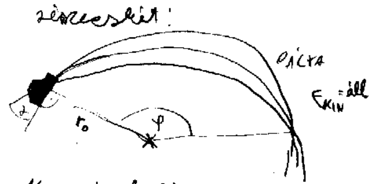
- Mozgások pályája a centrális erőtérben síkban van. Mert az IMPULZUSNYOMATÉK állandó:

$$\frac{d}{dt}\left(r \times v\right) = 0$$

$$r \times v = \text{állandó}$$

- B térben töltött, mozgó részecske körpályára áll!

- a φ irányú gyorsulás $= 0$
- az r irányú nem,
- A kicsi beérkező részecskét:



Kis (α) belépő szögeltérések esetén bizonyos φ után ugyanazon helyen találhatók a részecskék, ott ELSŐRENDŰ FÓKUSZÁLÁS VAN.

- φ:

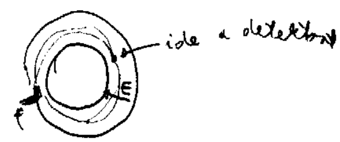
$$\varphi = k \frac{\pi}{\sqrt{n+3}}$$

DIPÓLUSTÉR $n = -3$

PONTTÖLTÉS $n = -2$ (FÖLD) $180°$

HENGERTÉR $n = -1$ $127°$

- A MEGVALÓSÍTÁS: gömb (henger) alakú kondenzátor.

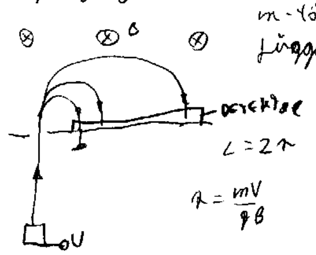


- Mire jó:
  - NEM TUDOM
  - összemérni több részecskék összemérése

PÁLYAGÖRBÉK

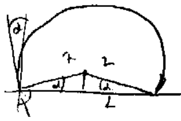
DEMPSTER FÉLE TÖMEGSPEKTROMÉTER

- állandó feszültséggel gyorsítjuk az ionokat, majd 1 B-térben azok KÜLÖNBÖZŐ körpályákon állnak. m-től függően.



És máshol csapódnak be a detektorba. (képernyő, vagy ellenállásréteg)

- ha kis eltérés van a beérkezésnél:



$L \neq 2r \quad L = 2r\cos\alpha$

WIEN FÉLE TÖMEGSZŰRŐ

- Egymásra merőleges B és E tér van. Ezekre merőlegesen lép be a részecske. A paraméterek olyanok, hogy a 2 tér hatása (F) eredője = 0. Az így egyenesen továbbhaladó részecskéket keskeny apertúrán át bocsájtjuk. Amelyekre a paraméterek nem az egyenes utat eredményezik, az nem jut át, kiszűrődik.
- Csak 1 BIZONYOS tömegű részecskére igaz az áteresztés mindig. De a paraméterek változtatásával mindig más tömegre.
- Tehát változtatjuk a paramétereket (HANGOLJUK) és figyeljük az áthaladó részecskemennyiséget ⇒ SPEKTRUM

EGYMÁSRA MERŐLEGES E, B terekben $v_0=0$ részecske mozgása (LINEÁRIS TÖMEGSP)

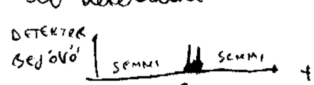
- $\Sigma F = qE + qv \times B$ ennek a 2 hatás eredője 2 mozgás: 1 egyenletes körmozgás (B miatt, $R = \frac{mv_0}{qB}$ $\omega = \frac{v_0}{R}$), és egy egyenes vonalú egyenletes mozgás (E miatt)
- Pálya CIKLOIS
- Először E gyorsítja a nyugvó töltést, majd már $v \neq 0$, hat rá a LORENTZ erő is, ezért körözni is kezd.

CSAK ELEKTROMOS TERET ALKALMAZÓ SPEKTROMÉTEREK

- repülési-idő T.S.M. ez A TOF
- kvadrupol tömegszűrő.

(1) TOF

- először elektromos térrel gyorsítjuk a mintából kilépett ionsugarat, ~~jó hosszan~~.
- így a különböző tömegű ionok különböző sebességre gyorsulnak. MAJD E=0-nál szét. Így a sugárban idő szerint (ionnyaláb) szétválasztódnak a különböző tömegű ionok. hosszú úton.
- Ezt az időbeli eltérést kell detektálni



ez a kapott tömegspektrum.

két DIRAC-impulzust indítunk, és 1 impulzuscsomagot kapunk, amit elektronikusan kell majd felfogni, ELEMEZNI.

- PROBLÉMÁK:
  - KIS $\delta(t)$ indító impulzus
  - ilyen időfelbontású (CAPTURE) érzékelés, feldolgozás
  - az azonos tömegű részecskék is szétszóródnak. Ezt kompenzálja az ELEKTROSZTATIKUS VISSZAVERŐ ELEKTRÓDA (REFLEKTOR)
- számolások:

$\frac{1}{2} m v^2 = qU = E_{MOZG}$

(ebből $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$)

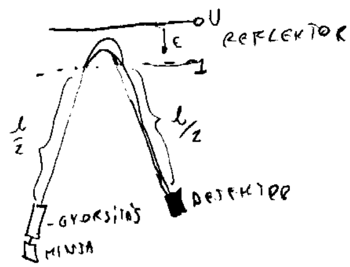
$t = \frac{D}{v}$ repülési idő.

$\Delta t = \frac{D}{\Delta v} = \frac{D}{v_{MAX} - v_{MIN}}$

az egyszerűsített esetben

$\Delta t = D \sqrt{\frac{m}{2qU}}$

- felépítés:



- a reflektor csökkenti az azonos tömegű részecskék divergenciáját:
  - $m_1 = m_2$ $v_1 > v_2$
    az 1. test hamarabb ér be a reflektorba, de mivel $v_1 > v_2$ ezért neki nagyobb idő kell a kifordulásához, megvárja m_2-t
  - $v_1 = v_2$ $m_1 > m_2$ (A)
    egyszerre érnek be, de az 1-esnek nagyobb a lendülete, ezért tovább marad a reflektorban: még jobban szét választódnak a különböző ionok.
    (a nagyobb tömegű ér be utoljára) tehát a különböző m-ű részecskék nem kerülnek közelebb, mint ahogy a különb. v-nél

- teljes repülési idő

$t = \frac{l/2}{v} \cdot 2 + t_{REFLEKTORBAN}$

$t_{REF} = \frac{2v}{a}$ $a = \frac{F}{m}$ $F = E \cdot q$ $E = \frac{U}{d}$

ebből

$t_{REF} = \frac{2v}{\frac{U}{d} \cdot q/m} = \frac{2 v m d}{U q}$

$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ (előző oldal)

- Mekkora tömegarány mérhető?

felbontás: t - idő

ami az időfelbontás tartomány 2 szomszédos tömegszámú ion tömegkülönbségének:

VÉGTELEN t_{min} - MÉRHETŐ

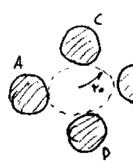
tartomány 1 PROTON tömegéhez.

-

- Emellett TOF-ból: több mérés végzése után átlagolással állítják elő az eredményt.

② KVADRUPÓL TÖMEGSPEKT.

- legelterjedtebb, kicsi.
- felépítés: (keresztmetszet)

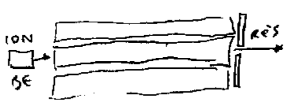


4 DARAB FÉM RÚD ELEKTRÓDA.

a szemben lévők össze vannak kötve

r_0 - TÉRRÁDIUSZ

$r = 1{,}16 r_0$ GOTRÁDIUSZ



- tehát 1 feszültséget kell rákapcsolni. $\varphi_A = \varphi_B$ $\varphi_C = \varphi_D$

$U_0 = U_{BC} = U_{AB, CD}$

az U_0 áll egy DC és egy AC komponensből.

Ezek arányából (amelyiket) helyes megválasztásával kell beállítani az áteresztést:

- azonnal át ne lőjenek
- egyszerre csak 1 tömegszámnak megfelelő iont.

ez: $\frac{U_{DC}}{U_{AC}} = 0{,}1678$

- A tömegspektrumban:

$U_0 = U_h \cdot (0{,}1678 + \cos\omega t)$

ahol minden U_h értékhez csak 1 tömegszám tartozik. U_h-val hangoljuk, közben mindig csak 1 bizonyos tömegszámú ion juthat át rajta. Minden más U_h-értéknél más ion. $(U_h \sim M)$

Detektáljuk a kijövő intenzitást. (energia-analízis)

- feltételek:

• 1 ion annyi ideig tartózkodjon bent, amíg $n = 3{,}5\sqrt{R}$ darab periódusa van a jelnek.

- MATEK:

az $\frac{U_{DC}}{U_{AC}}$ levezetése

MŰKÖDÉS:

vibrációs átlagonként

csak rezeg: 1

$\varphi = \omega t$

$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + (a + b\cos\varphi) x = 0$

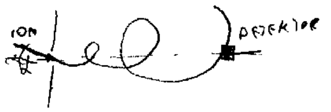
$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + (a + b\cos\varphi) y = 0$

EZ MATHIEU DIFF-EGYENLET

ENNEK A MEGOLDÁSA a 0,167

KORÁBBAN KIMARADT:

LINEÁRIS TÖMEGSPEKTROMÉTER:



a detektort mozgatjuk

a sugár 1 bizonyos helyre csak 1 bizonyos tömegnél metszi a tengelyt.

tehát most a detektor: Minden helyhez 1 tömeg tartozik.

- Most: különböző m-nél más az körpálya sugara.

L-adott. $\frac{v}{\omega}$

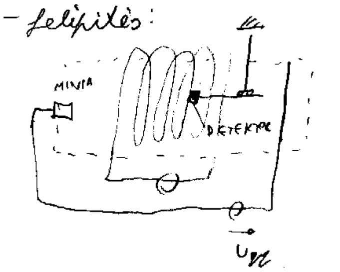
- Hol mérünk? L - távolság

$qV = \frac{1}{2} m v^2$

$\omega = \frac{qB}{m}$ $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$L = v \cdot T$

- felépítés:



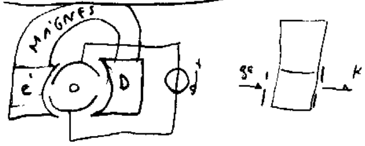
de inkább nem a detektort mozgatjuk, hanem a gyorsítófeszt hangoljuk.

A detektor 1 pontot mér.

- A SPEKTRUM:

$I(U)$ függvény.

A WIEN FÉLE TÖMEGSZŰRŐHÖZ

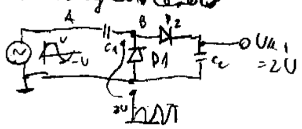


RÉSZECSKEGYORSÍTÓK

NAGYFESZ. ELŐÁLLÍTÁS

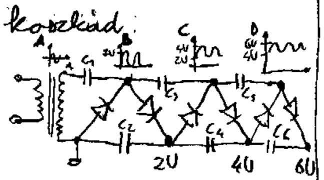
① KOSZKÁD GENERÁTOR

feszültségkétszerező



- Először D_1 nyit, C_1 feltöltődik U-ra
- másik félperiódusban D_1 zár, D_2 nyit, U_{AB} max $= U$ mert C_1 feltöltődött, most $U_A > U$, a B huroktörvény szerint $U_B = U_A + U_C = 2U$ lesz.
- Ezt csúcsegyenirányító D_2, C_2

kaszkád



- amikor $U_A = -U$ akkor C_1 feltölt,
- amikor $U_A = U$, akkor $U_B = U_A + U_C = 2U$
- amikor $U_A = -U$ akkor $U_B = U_A + U_C = -U + U = 0$

tehát U_B: 0 és 2U között ingadozik.

...

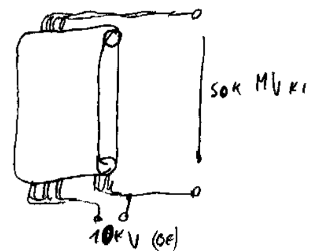
- az alsó kondik buffer kondik. a tőlük távolabb fent lévő part feszültségének MAX. értékére töltődnek nagyobb DC van!

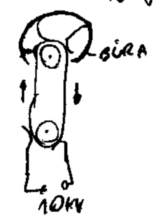
② VAN de GRAAF GENERÁTOR

- Mechanikai töltésszétválasztás
- gumiszalaghoz alul hozzáér érintkezőkön keresztül kb 10 kV DC

a gumiszalagot 1 motor hajtja, és fent pedig 1 másik érintkezősoron keresztül átadja a töltéseket 1 elektródának

- az alsó és a felső elektróda között jön létre a nagyfesz.





CIKLOTRON

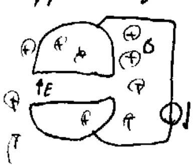
mágneses térben a körpálya:

$r = \frac{mv}{qB}$ $\omega = \frac{qB}{m} = \frac{v}{r}$

- állandó B tér, de:

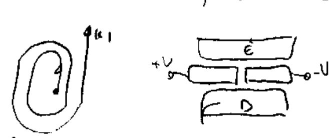
helyett:

minden félkör után érintő irányban gyorsítjuk E térrel.



a résben hat az E-tér, és ott gyorsulnak a részecskék

- a kimenet nem folytonos
-



- hogy a rés mindig gyorsítson, ezért fordítani kell a polaritást félfordulatonként.

így $f = \frac{\omega}{2\pi}$ $= \frac{qB}{m}$

állandó ω-val kell kapcsolgatni az U-t, de ez a számára is, mert így csak csúcs körül gyorsít.

- a kimenet darabonként, félperiódusonként
- $v_{max} = \omega r_{max}$

MAX ENERGIA:

$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{qB \cdot r_{max}}{m}\right)^2$

- az energiával nem mehetünk így el akármeddig, mert a relativitás elmélet szerint az ..., így a szükséges ω csökken ezzel ...:

SZINKROTRON

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

emiatt a részecskék a szinkronból kiesnek. Ezért ω-t, vagy B-t változtatni kell

- Ha B-t hangoljuk folyamatosan: SZINKROTRON (TÁROLÓGYŰRŰ) (elektronokra, mert ott $\frac{m}{m_0}$ NAGYON NAGY LEHET, B-ben könnyebb energiát hangolni)
- ω-val hangolunk SZINKROCIKLOTRON általában nukleonokra ω-val nehezebb nagy tartományt átfogni

- ELMÉLET:

$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$

$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{kin}}{m_0c^2} + 1\right)^2}}$

ezt $r = \frac{mv}{qB}$-be

$r_{rel} = \frac{mc}{qB}$ $r \to r_{rel}$

$\omega = \frac{v}{r} \rightarrow \frac{c}{r_{rel}}$

($r = r_{rel}$ minél c-hez közel a változók változhat)

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{r_{rel}} \cdot \frac{1}{2\pi}$

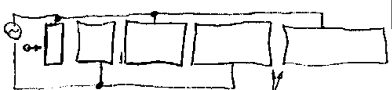
r_{rel}-he lehet r-et helyettesíteni

$E_{MAX} = q \cdot c \cdot B \cdot r_{rel}$

- MAX n TeV energia.
- ezért hogy ne kelljen túl gyorsan változtatni ω, B-t (VAGY MISÉ?) önidezi, kis-es átmérővel készítik

Ezek ezek a hatalmas gyorsítók. A CERN-ben, a CALTECH-ben...

LINEÁRIS GYORSÍTÓK

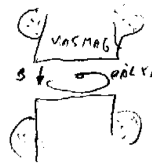


MAX 130 MeV

Mire odaér a részecske, 1 részhez, addigra éppen olyan fázisban lesz a hemenő fesz, hogy a 2 cső között gyorsítja. 1 csőben nem gyorsul, de nem is lassul ($E=0$)

- Ezért különbözőek a hosszak, mert míg átér 1 csövön pont 1 fél-periódusidő telik el. De a részecske gyorsul, ezért nagyobb út tartozik hozzá.

BETATRON



B-függ a helytől (a sugártól)

itt a gyorsító feszültség az INDUKÁLT feszültség

B-t növelik, így indukált fesz keletkezik, ekkor nő a sebesség, ezért megnövekedett B kell a körpálya megtartásához

De ez meg is van mert növeltük B-t

$U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ $\quad E = \frac{1}{2r\pi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$F = q \cdot E = \frac{\Delta I}{\Delta t}$

ebből:

$\frac{q}{2r\pi} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = m \frac{\partial v}{\partial t}$

így (DIFF. E. MEGOLDÁS)

$\frac{q}{2r\pi} \Phi = mV$

az U_i a sugárfüggő

$\frac{q}{2r^2\pi m} \Phi = \frac{v}{r} = \omega$

Kezdetben nincs B tér.

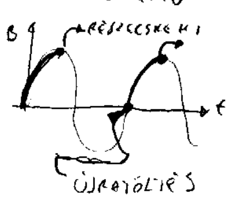
$\omega = \frac{qB}{m}$ a körpályához

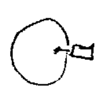
B függ az r-től!

$B(r) = B_0 r_0 \cdot \frac{1}{r}$

$E_{max} = q \cdot c \cdot B_0 r_0$ ahol $v_{max} \approx c$ lehet.

IMPULZUSÜZEMŰ:



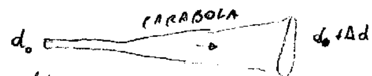


deriváltan $B=0$ helyezzük

Mindig ahogy gyorsul, nagyobb sugárban akar menni, de ott kisebb a gyorsító INDUKÁLT fesz.

TÉRTÖLTÉS

a nyalábon nehéz a tartani. (töltött részecskék taszítják egymást)



főleg ha nagy az áram.

Eddig 1 részecske-közelítést alkalmaztunk

$I_{MAX} = ?$ ahol még jól közelíthető az 1 részecske modellel

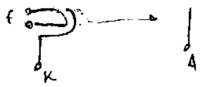
Nehunden részecskékből ez jól közelít. inkább a CRIMER részecskenyalábokról

TÖLTÖTT RÉSZECSKÉK GENERÁLÁSA, DETEKTÁLÁSA

(1) GENERÁLÁS

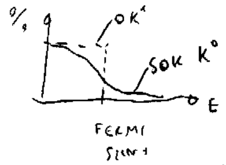
- TERMIKUS EMISSZIÓ

fűtött katódból elekt-ronok lépnek ki a felület közelébe, ott U-fesz (E-tér) gyorsítja.



≈ 1000-2000 °C-on lépnek ki.

az elektron-állapot betöltési valószínűségek elkenődnek nagyobb hőmérsékleten. Így lesznek olyan elektronok is, amiknek az energiája > kilépési MUNKA

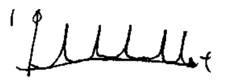


katódból kivehető max áram:

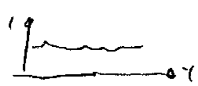
- HIDEGEMISSZIÓ

nagy elektromos térrel kiránthatók e^--ok (TÉREMISSZIÓ)

- kimenő áram:



ezért fűtik kicsit a fémet:



E-térerősség hatására a kilépési munka csökken, ha E-jó nagy, akkor a számítottnál nagyobb lesz az áram: ALAGÚT EFF.

- ELEKTROMOS tükrözés:

1 fémfelület felett van 1 töltés, annak a terének a hatása olyan, mintha a fémben is lenne 1 töltés, ~~ami~~ (tükrözve a Q a felületre)

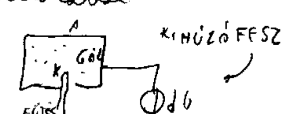
a Q és a tükörtöltés között vonzóerő van. A fémekben mindig vannak töltések, ezért a külső Q vonzza a fémbeli töltéseket.

ha a vonzóerő elég nagy, akkor az a tükörtöltés ki is szakadhat a fémből, és gyorsul a másik felé.

Nem 1 db töltést teszek oda, hanem 1 elektródát, amiben nyilván töltések vannak.

- IONFORRÁSOK

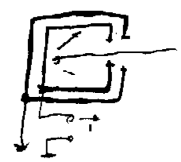
- Az ionizálandó gázba elektronsugarat vezetnek, így az azzal ütköző atomok IONIZÁLÓDNAK.
- Ha KÜLSŐ B is van, akkor az elektron-sugár csavarvonalú pályán halad, így nagyobb utat tesz meg, több gázt ionizál.
- elektronsugár TERMIKUS emisszióval.
- általában:



(2) DETEKTÁLÁS

- elektromos áramot mérünk.

- FARADAY SERLEG



a szekunder elektronok is bent maradhassanak

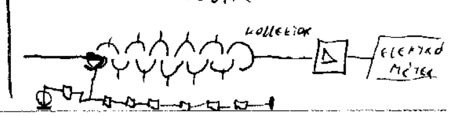
körülbelül árnyékolás kell, hogy a mérés a részecskék ne befolyásolják.

≈ 10^{-12} A áramerősség elég!

- SZEKUNDER ELEKTRON SOKSZOROZÓ (SEM)

ha fémtárgyba nagy energiájú elektron ütközik: akkor az elektronokat lök ki. akár többet is.

KB 10-20 LEMEZKE: EZEK A DINÓDÁK

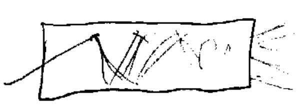


az kb. 6 nagyságrendű
erősítést végez

A bejárati sugarat
lehet gyorsítani, viszont
az ionméréshez az
elektron darabolására
kell. Ezt az megoldja
-ION is mérhető.
itt az első elektróda
végzi a ION/ELEK átalak.

– FOTO-ELEKTRON-SOKSZOROZÓ

itt az egész 1 üvegburában
van.
az első DINÓDA fény
hatására bocsájt ki
elektronokat
DINÓDÁK HELYETT:
CSŐ, nagy ellenállású
anyaggal vonják be
belülről, majd
nagy szekunder emissziós
tényezőjű ~~fémmel~~.
anyaggal.
cső 2 vége közé FESZT
kapcsolunk.
beesik 1 elektron,
akkor az szekunder
elektronokat vált ki,
és azok is a cső
falából.
EZ A CSATORNA-ELEKTRON-
SOKSZOROZÓ (CHANNECTRON)
ez jobban sokszoroz.
(10^8)



6. fejezet
Programozás

- PROGRAMVÉGREHAJTÁS (SZEKVENCIÁLIS)
  - a vezérlő kiveszi a memóriából a következő utasítást
  - CPU értelmezi
  - ha szükséges, további adatot (cím, operandus) hoz be a memóriából.
  - CPU végrehajtja AZ ALU-n keresztül
  - EREDMÉNY vissza a memóriába
  - jöhet a következő

- PASCAL PROGRAMOK

```
PROGRAM név;
CONST   A=83;              {ÉRTÉKADÁS}
VAR     B,C :REAL;         {deklaráció}
        D :INTEGER;        {minden változónak megadni a típusát}
BEGIN
  UTASÍTÁS;
  ...
  UTASÍTÁS;
END.
```

- FORMA:
  sorok: MAX 127 karakter. szóköz nélkül
  kis és nagybetűk közt nincs különbség
- ADATTÍPUSOK:
  - EGÉSZ: INTEGER $-32768 \ldots +32768$
  - BYTE: 0...255
  - WORD 0..65535
  - INTEGER 2BÁJT
  - LONGINT 4BÁJT
  - REAL $-\pm m \cdot 2^k$ valós
  - BOOLEAN 1 BÁJT - IGEN/NEM - LOGIKA
  - CHAR - karakter 1 BÁJT
    - ASCII

  az egyes típusok nem kompatibilisek.
- ÉRTÉKADÁS: FELTÉTEL ELLENŐRZÉS
  - A = B+C
  - A := B+C (!)
- CIKLUSOK
  - FELTÉTEL NÉLKÜLI:
    FOR i:=0 TO 100 DO utasít.;
    ut. helyett BEGIN-END között lehet több
  - FELTÉTELES:
    WHILE A>B DO utasítás;
    addig ismétel, amíg igaz
    belül kell állítani a feltételt meghatározó változókat.
    REPEAT utas. UNTIL A>B;
    addig ismét, amíg hamis.

- feltételes szerkezetek

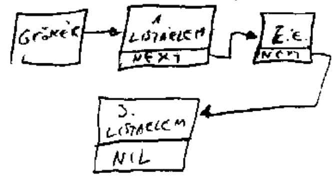
```
IF A>B THEN utas1 ;
IF A=B THEN ut2
       ELSE ut3;
```

- GOTO egyik ;
  az "egyik" helyhez ugrik
  az egyik 1 címke
- TÖMB ARRAY TÍPUSÚ adatstrukt.
  1 változó (vektor)
  deklarálása:
  VAR A : ARRAY[1..10] OF INTEGER;
  így pl A[3] - az A 3. eleme
- SZAVAK: STRING csak turbo PASCALBAN.
  ADOTT KARAKTER: A = 'BCDEF'
- FÜGGVÉNYEK:
  meghívhatók a programban
  program elejére kell, az VAR után.
  FUNCTION név (paraméter: típ): típus
  VAR lokális változó: típus
  BEGIN
  törzs
  END

  A meghívás:
  A = függvénynév (paraméter) - adottak a változók, vagy számok, amiket a param. értéknek adunk. A függvényértéket adja vissza, de állíthat globális változókat is. A fv. nevének értéket kell adni a törzsben.
- ELJÁRÁSOK:
  ugyanúgy mint a függvény, csak nincs visszatérési értéke, és FUNCTION helyett PROCEDURE a kulcsszó.
- FORMÁLIS PARAMÉTEREK:
  ?

  A lokális változók csak az adott függvényben érvényesek, a többiben nem.
  PARAMÉTERÁTADÁS:
  - ÉRTÉK SZERINTI: ennek nem módosíthatja az értékét a függv.
  - CÍM SZERINTI: a listába:
    VAR IZÉ: típus
    csak így lehet módosítani globális változó értékét.
    (Mindegyik globális változó)

- LISTÁK
  Adatstruktúra, aminek az elemei adat és pointerek



Műveletek:
beszúrás, törlés, keresés, rendezés.
Az elemek RECORD típusú adatok. A RECORD utolsó eleme POINTER.

„CÉ"

- Kis és nagybetűt megkülönbözteti.
- SZERKEZET

#INCLUDE <egyik.H>
#INCLUDE <másik.H> ← FÜGGVÉNYKÖNYVTÁRAK (*.H)
INT A,B;
FLOAT C,D; ← DEKLARÁCIÓK
INT függvény(INT E, INT F)
{
függvénytörzs;
} ← FÜGGVÉNYEK
VOID MAIN (VOID)
{
főprogramtörzs;
} ← FŐPROGRAM. (EZ 1 PARAMÉTER NÉLKÜLI FÜGGVÉNY)

- VÁLTOZÓTÍPUSOK
INT - integer (fix), egész
FLOAT - valós
CHAR - karakter (ASCII)
DOUBLE - 2x hosszú INT.
Előtagok: SHORT, LONG, SIGNED, UNSIGNED
- jelölések:
karakter: karakter, vagy
szöveg: 'szöveg'
idézőjel nélkül változónév
\n - sortörés
\f - lapdobás
\b - backspace
\\szöveg - MEGJEGYZÉS
12 - DECIMÁLIS
0X12 - HEXADECIMÁLIS
- TÖMBÖK
INT név[10];
INDEXELÉS 0... MAX
ha nagyobb MAX-nál nagyobb helyre → HIBA. név[5] → 5. eleme
SZÖVEG, KARAKTERLÁNC:
CHAR szövegnév[50];
- ÉRTÉKADÁS: = név="szöveg";
összehasonlítás: ==
- VEZÉRLÉSÁTADÁS:
IF (A>B) utasítás;
ELSE utasítás;
Elhanyagolható
- UGRÁSI TÁBLA (ha A=1, ha A=2)
SWITCH (A)
{
CASE 1: utasítás1;
CASE 2: utasítás2;
DEFAULT: utasítás3;

- FOR CIKLUS
FOR (i=0; i<100; i++) utasítás;
i=0-tól amíg i<100 ← növeli i-t
(HA NEM, nem igaz hagyja végre)
Ha nem egyesével növelünk: i+=10
Kiugrás: BREAK;
- DO WHILE (REPEAT UNTIL)
DO utasítás WHILE (A>B);
1x végrehajt mindenképp de csak akkor lép vissza, ha igaz.
- MUTATÓK:
más változók értékét tárolják
DEKLARÁLÁS:
INT *mutatónév; ← INT-RE MUTAT
INT *A;
paraméterátadás csak MUTATÓVAL
mut=&B; ← B-re mutat (B címe)
B=*mut; ← B = mut által mutatott változó értéke
C=mut ← C = B címe
*mut=D ← B=D lesz.
- ÖSSZETETT ADATSTRUKTÚRA: RECORD
definíció: (láncolt listákhoz)
STRUCT név
{
INT A;
CHAR B[20];
CHAR C[40]
}
használat
név.A = 10 ← értékadás
név.B = "izé"
név.C=...
- I/O
SCANF - olvas (sort)
PRINTF - ír (sort)
→ HOZZÁ ELŐTAGOK
C - KONZOL, (CSCANF), F - FÁJL,
SEMMI - STANDARD I/O ...
PRINTF("szöveg");
SCANF( );
PUTCHAR("A");
GETCHAR( );
- FÁJLKEZELÉS:
nyitás: FOPEN
zár: FCLOSE
írás/olvasás: FWRITE/FREAD
handler mutat a fájlra
A handler típusa: FILE
deklaráció:
FILE *mutatónév;

használat:
mutatónév=FOPEN("elérési út", "mód");
mód:
r - olvasásra, w - írásra
r+ - írásra/olvasásra,
w+ - új fájl írásra/olvasásra,
b - bináris, t - textfájl
- SIZEOF:
A = SIZEOF(B)

7. fejezet

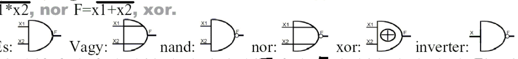
Digitális technika

Digitális technika 1. BME Dr. Arató Péter előadása, és Felvégi Péter András gyakorlata alapján készítette: Nagy István

Kombinációs logikai rendszerek (klr): N számú bemeneti változó, és m számú kimeneti változó között bármely pillanatban állandó függvénykapcsolat van. Jellemezhetőek egy logikai függvénnyel.

Logikai (boole) algebra: Műveletek: **és** f=x1*x2, **vagy** F=x1+x2, **nem** (invertálás), **nand** F=$\overline{x1*x2}$, **nor** F=$\overline{x1+x2}$, **xor.**

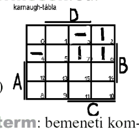
Jelölések: És: Vagy: nand: nor: xor: inverter:



Azonosságok: A*0=0 A+0=A A*1=A A+1=1 A*$\overline{A}$=0 A+$\overline{A}$=1 A*A=A A+A=A Elnyelési szabályok: A+A*B=A (AB+AC)A=AB+AC A*(A+B)=A Demorgan azonosságok: $\overline{A+B}=\overline{A}*\overline{B}$ $\overline{A*B}=\overline{A}+\overline{B}$

Logikai függvények megadása: igazságtáblával, algebrai alakkal, ezen általános algebrai alakkal vagy diszjunktív vagy konjuktív minimálalakkal és kanonikus alakkal (ezen belül diszjunktív, vagy konjuktív normálalak) vagy karnaugh táblával, vagy mintermesen. **Igazság tábla**: feltüntetjük az összes bemeneti jel-kombinációt, és a hozzájuk tartozó la kimeneti értékeket. Annyi sora van, amennyi 2-nek annyi-adik hatványa, ahány bemeneti változó van. Algebrai alak: Ennek több fajtája van. **Diszjunktív normálalak** (az összes olyan bemeneti kombináció, minterm vagy kapcsolata, ahol a kimenet=1 Ez kanonikus!), **diszjunk-tív minimálalak** (az előző változat egyszerűsí-tésekor jön létre, szintén és kapcsolatok vagy kapcsolata, de itt nem a bemeneti kombinációk vagy kapcsolata, hanem prímimplikánsok vagy kapcsolata). **Konjuktív normálalak**: azon bemeneti kombinációk (itt maxtermek, mert 0-kimenetre nézzük őket Ez is kanonikus!) és kapcsolata, ahol a kimenet=0.(vagy kapcsolatok és kapcso-lata) konjuktív minimálalak: prímimplikánsok vagy és, ha a kimenet=0. (vagy kapcso-latok és kapcsolata). **Karnaugh-tábla**: Ez egy grafikus ábrázolási, és megadási mód. Egy táblázat, melynek annyi cellája van, amenyi 2-nek annyiadik hatványa, ahány változó van, és minden cella megfelel egy-egy mintermnek, vagy maxtermnek. A karnaugh-táblában a logikai függvények egyszerűsítése könnyen, és egyszerűen megoldható. **Mintermesen**: Pl.: F=Σ^4(2,6) ez= m_2+m_6 4változóval.

karnaugh-tábla



Példa ezekre: mintermesen: F=Σ^4[(2,6,7)+(3,4)]

DNA: F=$\overline{A}BCD+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+(\overline{A}B\overline{C}\overline{D})+(\overline{A}\overline{B}CD)$

DMA: F=C$\overline{A}$

KNA: F=$\overline{A}$*B*C*D+$\overline{A}$*$\overline{B}$*C*$\overline{D}$+$\overline{A}$*B*C*$\overline{D}$+($\overline{A}$*B*$\overline{C}$*$\overline{D}$)+($\overline{A}$*$\overline{B}$*C*D)

KMA: F=A+$\overline{C}$

Fogalmak: **minterm**: bemeneti kombináció, ha a kimenet=1. **maxterm**: bemeneti kombináció, ha a kimenet=0. **Implikáns**: mintermek (vagy maxtermek) összevonásából keletkező hurok, szorzat (mintermeknél) karnaugh táblán 2-valamely hatványa-darab szomszédos minterm összevonásából (négyzet, vagy téglalap alakú formécióban). Képlete: azon változók és kapcsolata, amelyek minden mintermjében megegyeznek. **Prímimplikáns**: tovább nem egyszerűsíthető, nincs nagyobb implikáns, ami teljesen magába foglalná. **Meg-különböztetett minterm**: olyan minterm, ami csak 1 prímimplikánsban van benne. **Lényeges prímimplikáns**: olyan p.i., amiben van megkülönböztetettminterm. Az ilyen nem hagyható ki a végleges alakból az egyszerűsítéskor.

Átalakítás diszjunktív normálalakból konjuktívba: pl.: F=m_5+m_7 ←ami itt nincs, azokat felírjuk,, majd az indexeiket átírjuk a következő szabály szerint: az indexeket egyenként kivonjuk 2^n-1-ből. A mintermek helyett maxtermek lesznek, és és kapcsolatban lesznek. Pl: F=m_5+m_7→$\overline{F}$=$m_0+m_1+m_2+m_3+m_4+m_6$→F=$M_{7-0}*M_{7-1}*M_{7-2}*M_{7-3}*M_{7-4}*M_{7-6}$.

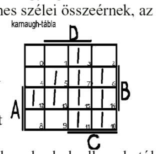
Szám-kódolások: bináris, komplemens kód(előjeles), kettes komplemens(előjeles), BCD. **Komplemens kód**: egy táblázat amiben minden számhoz hozzárendelünk egy másikat. A pozitív számoknál saját magukat rendeljük hozzá. Bizonyos számtartományban értelmezettek így a számok, pl. 0..99 vagy 0..999. Ez alapján (0..99) 0..49-ig saját magugat rendeljük a számok-hoz, -50..-1-ig: 50..99. **Kettes komplemens**: a pozitív számokhoz ugyanazt rendeljük, a negatívakhoz 2^n+n-et. Az így (binárisan) kódolt számok legnagyobb helyiértékű bitje jelzi az előjelet (1-, 0+). Képzése: (ha a forrás a szám apszolútértéke, az előjelet máshonnan kapjuk) ha + akkor meg-hagyjuk, ha negatív, akkor bitenként invertáljuk , majd hozzáadunk 1-et. A visszaalakítás is pont ugyanez. Az előjeles számok jelentősége az összeadásnál, és a kivonásnál van. Azonos művelettel végrehajtható mindkettő. N biten $-2^{n-1}..2^{n-1}$-1 közötti számok ábrázolhatóak. **BCD**: binárisan, 4 biten kódolt decimális számjegy (0..9)

0	0
1	1
…	…
49	49
-50	50
-49	51
…	…
-1	99

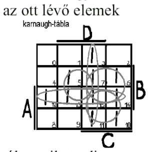
Nem teljesen határozott függvény: Ezeknél bizonyos bemeneti kobinációk működés közben nem fordulhatnak elő, ezért az azokhoz tartozó kimenet bármilyen lehet (közömbös). Ezen közömbös kombinációkhoz tartozó kimenetek értékét az egyszerűsítéskor választjuk meg, úgy, hogy a függvény a lehető legegyszerűbb legyen. Mintermes megadása: F=Σ^4[(2,6,7)+(3,4)], ahol az m_3, és az m_4 a közömbös bemeneti kombináció.

Logikai függvények minimalizálása (egyszerűsítése): Akkor a legegyszerűbb, ha a lehető legkevesebb szorzatot tartalmazza, és a szorzatok a lehető legkevesebb változót tartalmazzák. Módjai: **Grafikusan, vagy számjegyesen** (Quine-McCluskey-módszer), vagy szimetrikus függvényekkel egy, vagy több kimenetű függvény esetén. Két minterm **szomszédos**, ha csak 1 változóban különböznek,. Ez úgy látható, hogy ha egymás mellett vannak, vagy a tábla 2 átellenes szélén. Két implikáns (hurok, szorzat) szomszédos, ha a képletük csak egy változóan tér el. Ez úgy látható, hogy egész oldalukkal érintik egymást. A karnaugh-táblát úgy kell felfogni, hogy az átellenes szélei összeérnek, az ott lévő elemek szomszédosak.

karnaugh-tábla

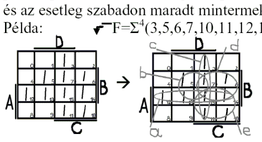


karnaugh-tábla



Grafikusan:(egy kimenet, telj.hat.) Karnaugh-táblába bejelöljük azokat a mintermeket, ahol a kimenet=1. Ez meghatározható a DNA-ból, vagy a mintermes megadásból. Ezuán szomszédossági viszonyokat kell keresni. Először kettes hurkokat (szomszédos mintermeket), majd négyeseket (szomszédos kettes hurkokat), nyolcasokat. Az olyan hurkok elhagyhatók, amiket teljes egészében magába foglal egy nagyobb hurok. Egy minterm egyszerre több hurokban is benne lehet. Miután az összes hurkot felírtuk, megkeressük azokat a hurkokat, amelyek elhagyásával elérhető az optimális lefedés.Ezt a **lefedési-tábla** segítségével végezzük.*Ez a művelet azonos, a számjegyes minimalizálásnál is*. A lefedési tábla tartalmazza, hogy melyik prímimplikáns melyik mintermet fedi le. Ez alapján fel kell írni a lefedési segédfüggvényt, azt dma-ba alakítani, majd a legrövidebb szorzatot kiválasztani, mert ez lesz a végleges prímimplikánskészlet. A végső képlet: a megmaradt prímimplikánsok (szorzatok) képleteinek, és az esetleg szabadon maradt mintermeknek a vagy-kapcsolata.

Példa: F=Σ^4(3,5,6,7,10,11,12,13,14,15) lefedési tábla:



p.i./m.	3	5	6	7	10	11	12	13	14	15
a *							I	I	I	I
b *		I		I				I		I
c *	I			I		I				I
d *			I	I					I	I
e *					I	I			I	I

A megk. mintermek alá lettek húzva. Mindegyik p.i.-hoz tartozik megk. Minterm, ezért mind meg van jelölve.

a=AB b=DB c=CD d=BC e=AC

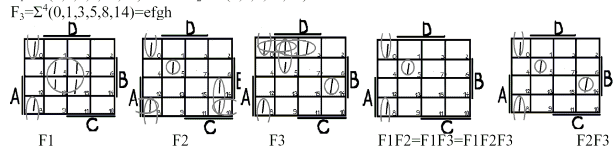
S=cbd(b+c+d)e(c+e)a(a+b)(a+d+e)(a+b+c+d+e) → S=abcde → F=AB+DB+CD+BC+AC

Nem teljesenn határozott függvények: Ha egy nagyobb hurok létrejötte függ egy közömbös mintermtől, akkor annak értékét 1-nek veszzük. Ha egy közömbös minterm szomszédos egy olyannal, ami mással nem szomszédos, akkor szintén 1-nek vesszük. Minden más esetben 0-nak kell venni a közömbös minterm értékét.

Több kimenetű hálózatok: Megoldható lenne a feladat úgy is, hogy kimenetenként külön függvénnyel, de bizonyos részeredményeket a többi függvény is használhatna, ezért meg kell keresni a közös prímimplikánsokat. Két függvény közös prímimplikánsai a két függvény szorzatának is príimplikánsai. Képezni kell a két függvény szorzatát, vagy ha kettőnél több kimenet van, akkor mindenféle kombinációkban, és párokban kell elvégezni a szorzatok képzé-sét. Azok a szorzatfüggvények elhagyhatók, amik benne vannak egy másik szorzatf.-ben. A szorzatfüggvénynek lehetnek olyan prímimplikánsai, amik az eredeti függvényeknek nem prímimplikánsai. Szorzatok képzése: egy karnaugh táblába azokra a helyekre teszünk egyest, ahol mindkét táblán egyes van. Majd megkeressük a prímimplikánsait. Ezután össze kell állítani egy **közös prímimplikáns táblát**, amin a prímimplikánsok függvényenként vannak csoportosít-va. Ami valamelyik szorzatban szerepel, azt nem kell újra leírni az eredeti függvényeknél.A mintermek pedig **kimeneti** függvényenként. Itt viszont minden kimenethez le kell írni az összes mintermet. Be kell jelölni a lényeges p.i.-okat, majd a lefedési segédfüggvény jön. Ezt dma-ba alakítjuk, majd a legkevesebb tényezős szorzatot emeljük ki. Ez lesz a végleges prímimplikáns-készlet. A táblázatból le lehet húzni azokat a p.i.-okat, amelyek nem szerepelnek a végleges készletben. Ez után fel kell írni a segédfüggvényeket az egyes kimenetekhez. Azok a prímimp.-ok tartoznak oda, amik az adott függvénynél vannak, és azok, amik az adott függvény felhasz-nálásával létrejött szorzatnál vannak. Példa:

$F_1=\Sigma^4$(0,5,7,8,13,15)=a+h $F_2=\Sigma^4$(0,5,8,10,14)=b+h+i

$F_3=\Sigma^4$(0,1,3,5,8,14)=efgh



F1 F2 F3 F1F2=F1F3=F1F2F3 F2F3

Közös prímimplikáns-tábla:

F	Kim. F>	F1						F2					F3					
	p.i/m.	m_0	m_5	m_7	m_8	m_{13}	m_{15}	m_0	m_5	m_8	m_{10}	m_{14}	m_0	m_1	m_3	m_5	m_8	m_{14}
F1	a *		x	x		x	x											
F2	b										x	x						
	c									x	x							
F3	d												x	x				
	e													x		x		
	f*													x	x			
F2F3	g*											x						x
F1F2F3	h*	x			x			x		x			x				x	
	i*		x						x							x		

S=afghi(a+i)(c+h)(b+c)(b+g)(d+h)(d+e+f)(e+i) S=(~~afghic~~+afghi~~i~~)(afghib+afghic)(~~afghib~~ +afghi~~g~~)(~~afghid~~+afghi~~h~~)(~~afghid~~+~~afghic~~+afghi~~f~~)(~~afghic~~+afghi~~i~~) =~~afghi~~(afghib+ afghic)~~afghi~~* ~~afghi~~*~~afghi~~ S=afghib+afghic S=afghic ez a közös prímimplikáns-készlet.

Az egyes kimenetek: S_1=h(a+i) S_2=hi(c+h)cg S_3=hfig Ezutánn behelyettesítjük az a-t.b-t… a karnaugh-táblák alapján, és megkapjuk a kimenetek képleteit. Megvalósításkor, a táblázatban közösnek jelölt p.i.-okat csak egyszer valósítjuk meg.

Számjegyes minimalizálás: **bináris súly**:A bináris felírásban hány darab 1-es van. 2 minterm **szomszédos**, ha: bináris súlyuk különbsége 1, indexeik különbsége 2^k, a nagyobb bináris súlyúnak az indexe is nagyobb. A mintermeket indexeikkel helyettesítjük. A megadott indexeket egymás alá leírjuk, majd mellé írjuk a bináris súlyukat. Ezután csoportosítjuk a bináris súlyuk szerint. A bináris súly meghatározása: egyszerűen utánaszámolunk fejben, vagy leírjuk a számok bináris alakjait, és megszámoljuk az 1-eseket. Az egyes mintermeknek az eggyel nagyobb, vagy az eggyel kisebb súlyú csoportban lehet szomszédjuk. Ha találunk így két számot, aminek különbsége 2^k, akkor azokat kipipáljuk, és a következő oszlopba írjuk őket egymás mellé, melléjük írva a különbségüket zárójelben. Így végigmegyünk az első oszlopon. A második oszlop is csoportokból áll. Az 1, oszlop első 2 elemének összehesonlításából lesz a 2. oszlob első csoportja, a 2. és 3.-ból a 2. oszlop 2. csoportja, a 3., 4.-ből a 3. csoport… Közben kialakul a második oszlop. Ekkor a 2. oszlop elemeit kezdjük csoportosítani, az előzőhöz hasonló módon, csak itt azok lehetnek párok, akiknek az indexeik különbsége páronként 2-nek ugyanaz a hatványa, és a zárójelbe írt számok megegyeznek. Most már az elemek utáni zárójelben 2 szám lesz:a már meglévő szám, és a párok közötti különbség. Addíg csináljuk ezt, amíg már mem tudunk újabb párokat létrehozni. Ha két párból ugyanaz az elem létrejöhet, akkor csak egyszer kell leírni, de mindkét párt ki kell pipálni. Aminek nem akadt párja bármely oszlopban, az prímimplikáns, és betűjelet kell neki adni. Ezután jön a **Lefedési táblás** egyszerűsítés, prímimplikánskészlet-meghatározás. A prímimplikánsok azokat a mintermeket tartalmazzák, amiket a nevük elé írtunk. A prímip.-ok képleteinek felírása: a betűjelhez tartozó indexek egyikéhez tertozó minterm képletét felírjuk, de a zárójelben szereplő indexnek (sorszámnak) megfelelő helyiértékű tagokat kihagyjuk. A vágleges eredmány a p.i.-ok képleteinek a vagy kapcsolata. Példa: $F_1=\Sigma^4$(0,1,3,7,11,12,14,15)

m_x súly	m_x		
0---0	0 √	0,1 (1) a	3,7,11,15 (4,8) e
1---1	1 √	1,3 (2) b	~~3,11,7,15 (8,4)~~
3---2	3 √	3,7 (4) √	
7---3	12 √	3,11 (8) √	
11--3	7 √	12,14 (2) c	
12--2	11 √	7,15 (8) √	
14--3	14 √	11,15 (4) √	
15--4	15 √	14,15 (1) d	

Ezután a lefedési táblával egyszerűsítés, majd segédfüggvény, amiből:

S=ace

a→0,1(1)→m_0,1helyiért.-lehúzni→$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cancel{\overline{D}}$

c→12,14(2)→AB$\cancel{C}\overline{D}$

e→3,7,11,15(4,8)→$\cancel{A}\cancel{B}$CD

F=$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$+AB$\overline{D}$+CD

Nem teljesen határozott függvény: Ilyen esetekben a közömbös bejegyzéseket is 1-nek kell tekinteni, a műveletek során, mindaddíg, amíg el nem jutunk a lefedési (primimplikáns)-táblához, mert a tábla felvételekor a táblából kihagyjuk a közömbös mintermeket, és a többi alapján végezzük az egyszerűsítést. Innen tovább a fent leírt módon.

Több kimenetű hálózatok: Az összes függvény összes mintermjét együtt írjuk fel. de műveletek közben mindig tudni kell minden mimtermről, implikánsról, és prímimplikánsról, hogy melyik kimeneti függvényhez tertozik. Ezt úgy oldjuk meg, hogy minden oszlop minden eleme mellé kódolva odaírjuk, hogy melyikhez tartozik annyi helyiértékű bináris számot írunk oda, ahány kimenet van, minden helyiérték egy kimenethez terozik. Ha az adott helyiérték=1, akkor az ahhoz tartozó kimenethez (is) tartozik az illető minterm, vagy szorzat. Pl.: (két kimenet esetén) m_x 10 →f1-hez igen, f2-höz nem tartozik, vagy m_y 11 mindkettőhöz tartozik. Ez a jelölés öröklődik, mégpedig úgy, hogya keletkező szorzatnál csak azok a helyiértékek lesznek egyesek, amik mindkét szorzónál egyesek. Ha 00, vagy 000…-lesz, akkor a szorzatot le kell húzni. A szorzók közül csak azt kell kipipálni, amelyiknek a kódja megegyezett a szorzatéval. P.: m_x 01√ m_y11→ m_xm_y (n) 01 A **lefedési táblát** úgy kell felvenni, mint a többkimenetű

grafikus módszernél. Itt a szorzatfüggvényhez azok a prímimplikánsok tartoznak, amik után csupa 1-es áll (2 kim.) több kim. esetén: ha 2 helyiérték 1, akkor a kettőnek megfelelő szorzatfüggvényhez tartozik.
Példa: (Az előző, grafikusan már megoldott példa)
$F_1=\Sigma^4(0,5,7,8,13,15)=a+h$ $F_2=\Sigma^4(0,5,8,10,14)=b+h+i$ $F_3=\Sigma^4(0,1,3,5,8,14)=efgh$

m	bin.s.	$f_1f_2f_3$
0	0	111
1	1	001
3	2	001
5	2	111
7	3	100
8	1	111
10	2	010
13	3	100
14	3	011
15	4	100

m	$f_1f_2f_3$
0	111 √
1	001 √
8	111 √
3	001 √
5	111 i
10	010 √
7	100 √
13	100 √
14	011 g
15	100 √

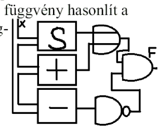
imp.	kül.	$f_1f_2f_3$	
0,1	(1)	001	d
0,8	(8)	111	h
1,3	(2)	001	f
1,5	(4)	001	e
8,10	(2)	010	c
~~3,7~~	~~(4)~~	~~000~~	
5,7	(2)	100	√
10,14	(4)	010	b
13,15	(2)	100	√
~~14,15~~	~~(1)~~	~~000~~	

imp.	kül.	$f_1f_2f_3$	
~~1,3,5,7~~	~~(2,4)~~	~~000~~	
5,7,13,15	(2,8)	100	a

Ezután írjuk fel a lefedési táblát, ami most ugyanaz, mint az előző, grafikus példánál. Ez alapján a segédfüggvénnyel meghatározzuk a közös p.i.-készletet, lehúzzuk ami nem kell, majd ezután az egyes kimenetekhez a segédfüggvényeket, a már ismert módon, majd a kimeneti függvényeket.

Nem teljesen határozott többkimenetű hálózatok: ugyanúgy kell eljárni, mint egy kimenet esetén, tehát a közömbös mintermeket is bevesszük az oszlopos műveletekbe, de a lefedési táblából már kihagyjuk őket.

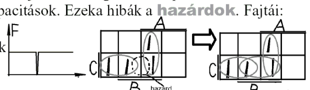
Szimmetrikus függvények: Ha rendelkezésünkre állnak olyan építőelemek, amelyek szimmetrikus függvényeket valósítanak meg, akkor sokszor egyszerűbb megvelósítás érhető el velük, mint az eddig leírt módokon, főleg akkor, ha a meglévőszimmetrikus függvény hasonlít a megvelósítandó függvényre. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a szim. függvényt kipótoljuk azokkal a mintermekkel, ahol a függvénynek 1-nek kellene lennie, és letiltjuk ott, ahol 0-nak. Tehát elő kell állítani a kiegészítő, és a letiltó függvényeket. A kiegészítő függvény(+) ott =1, ahol F=1, de S=0. Ott közömbös, ahol F=S=1. A letiltó f. ott=1, ahol F=0, de S=1, és ott közömbös, ahol F=S=0. Ezeket 2 k-táblába rajzolva meg kell valósítani.Ha a függvényünkben vannak közömbös bejegyzések, akkor meg kell vizsgálni, hogy a közömbösök megválasztásával nem alakítható-e szimmetrikussá.



A szimmetrikus függvényeket olyan logikai függvények, ahol a kimenet csak akkor=1-gyel, ha a bemenő változók közül pontosan *n*-darab értéke 1. Ez az n a szimmetriaszáma a függvénynek. Több ilyen szám is tartozhat hozzájuk. Ezek érzékeltlenek a változók páronkénti felcserélésére, és a funkcionális hazárdra. Jelölésük: $S^m_{n,p}$, ahol n,p-szimmetriaszámok, m-a változók száma. Kanonikus szimm.függv.-ek: aminek csak egy szimetriaszámuk van.

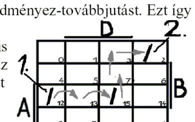
Műveletek is végezhetők velük: azonos <u>változószámúakkal</u>: összeadás (vagy) ilyenkor a 2 függvény szimmetriaszámainak az uniója lesz az új, szintén szimmetrikus függv. Szimmetriaszám-halmaza. Szorzás (és) ilyenkor a keletkező halmaz a 2 függv. Halmazainak a metszete. Negálás: ilyenkor az eredeti szimm.szám-halmaz komplementerét képezzük. Pl.:
$S^4_{01}+S^4_{125}=S^4_{0125}$ $S^4_{01}*S^4_{125}=S^4_1$ $\overline{S^4_{01}}=S^4_{2345678910\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15}$.

Kombinációs logikai hálózatok tranziens viselkedése: A jelterjedési késleltetések miatt hibás működés léphet fel, pillanatra hibás kimenet jelenhet meg. Okai: kapukésleltetések, vezetékek késleltetései. Szórt impedanciák,kapacitások. Ezeka hibák a **hazárdok**. Fajtái: **statikus**: Ha a kimenetnek egy szomszédos bemeneti változás hatására folyamatosan 1-nek kellene lennie, de pillanatra lemegy 0-ba (statikus 1-hazárd. Ennek az ellentéte a stat. 0-hazárd). Megszüntetése: a karnaugh-táblákban minden szomszédos mintermnek kell legyen közös prímimplikánsa.



Dinamikus: Ha szomszédos bemeneti változás hatására egyszer át kellene váltania a kimenetnek, de az többször vált át. Oka lentebbi kapuszinten létrejött statikus hazárd. Statikus hazárd <u>okoz-e dinamikus hazárdot?</u> → Ha egy vonalon a karnaugh-táblában, statikus hazárd van (egy ilyen vonal egy bemenet megváltozását jelenti), és azon a vonalon máshol kimenetváltozás van, ott lehet dinamikus hazárd. Ha az ilyen vonalakon nincs kimenet-változás, akkor a stat. hazárd kijuthat a kimenetre. <u>Kijut-e a kimenetre?</u> Meg kell nézni, hogy a stat. hazárdot okozó részegységtől függ-e a következő kapuszint kimenete az adott pillanatban, tehát az ahhoz tartozó változáskor (ekkor a többi bemenet nem változik). Ezt úgy lehet megtudni, hogy a következő kapuba becsatlakozó más bemeneteknek milyen értékeit vannak a hazárdvonal két oldalán, és hogy ez eredményez-továbbjutást. Ezt így végig kell követni a kapcsoláson.

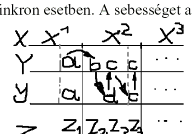
Funkcionális hazárd: Akkor keletkezik, ha nem szomszédos a bemeneti változás, vagyis legalább 2 változó változik. Oka: nem pont egyszerre változnak az illető kapu bemenetei, így mindenképpen fellép egy nem tervezett közbülső állapot, bemeneti kombinéció (minterm) Csak az a kérdés, hogy a minterm hogy viszonyul a 2 végállapothoz kimenet szempontjából. Amíg a rendszer átjut az egyik állapotból a másikba, addig a közbülső állapotokban bármilyen értéket felvehet a kimenet. Kiküszöbölése: szinkronizált kapuzás a részegységek között.



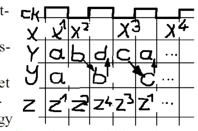
Sorrendi hálózatok:

Jellemzőik: A kimenet kialakulását a bemeneti kombinációkon kívül a korábban fennált bemeneti, kimeneti kombinációk, és azok sorrendje is befolyásolja. Ugyanahhoz a bemeneti kombinációhoz más-más kimenet tartozhat. A hálózatnak elő kell állítania egy **szekunder kombinációt (y)**, ami a hálózat előéletét képviseli. A hálózat bemeneti, és az aktuális szekunder kombinációval létrehozza a kimenetet, és a következő, új szekunder kombinációt(**Y**), ami az aktuális állapotokat képviseli majd a következő bemeneti kombináció fellépésekor. Z egy visszacsatolás. A szekunder kombinációk az **állapot**ok. A szekunder változók száma annyi, hogy legyen annyi kombinációjuk, mint ahány állapot van. Két fő csoport a kimenet előállítása, és működés szempontjából: **Moore modell**: A kimenet csak a szekunder kombinációtól függ, az állapottáblában egy sorhoz csak 1 féle kimenet tartozik. **Mealy modell**: A kimenet függ a bemeneti kombinációtól is.

Aszinkron hálózat: Az állapotok száma nagyobb, mint szinkron esetben. A sebességet a jelterjedés korlátozza. Ha változatlan marad a bemenet, akkor nem biztos, hogy a hálózat nyugalomba vonul. A nyugalmi állapot csak akkor jön létre, ha a kialakult Y kombináció visszahatva saját magát hozza létre (ez a stabil állapot). Ha nem így van, akkor a hálózat addig vált állapotokat, amí nem jut stabil állapotba, közbülső, instabil állapotokon keresztül. Ha nem jut stabil állapotba, és mindig visszajut ugyanazon helyekre, akkor a hálózat oszcillál. Ilyenkor ha bemenet változik, akkor kiszámíthatatlan, hogy milyen állapotba kerul, és hogy milyen lesz a kimenet. Az instabil állapotokat mindig úgy kell felvenni, hogy a megfelelő stabil állapotba vezzessék a hálózatot. Az ábrán látható **idődiagram** (<u>feltételezett</u> x-változás hatása) on látható, hogy minden Y-hoz tartozik egy z, és a bemenet váltáskor z ugyanaz marad, ha Moore modell szerinti a hálózat. X változás hatására változhat Y, utána y. Az aszinkron hálózatok megvalósíthatóak visszacsatolt kombinációs hálózattal. Normál aszinkron hálózat: két stabil állapot között legfejjebb 1 instabil lehet. Ütemezett aszinkron: a visszacsatoló ágakban el vannak helyezve tárolók, és kapuk, amiket órajel ütemez. A kapuzás létrehozza, ill. megszűnteti a visszacsatolást. A tároló akkor adja ki a kimenetére a bemenetén kapott jelet, ha a kapu már lezárt. Egy órajelperiódus alatt csak egyszer változhat a kimenet, és a szekunder kombináció. Az órajel sokkal gyorsabb, mint a bemenet.



Szinkron hálózat: Megengedjük x változását instabil állapotban is. Nincs jelentősége annak, hogy egy állapot stabil, vagy instabil. Szinkronizációs feltételeket kell biztosítani a megvalósításkor: a visszacsatoló ágak órajelvezérelten meg-szakíthatóak, a bemeneti változások az órajellel szinkronban történnak, a kimenetet is az órajellel szinkronban kell értelmezni. A bemeneti változásoknak követniük kell az órajelt. Az **idődiagramm**on látható, hogy x változásának hatása (lefutó élkor) változhat Y, ennek hatására y feveszi a Y előbbi értékét (felfutókor). Ekkor létrejön egy újabb Y, de ez már nem befolyásol semmit, kivéve, ha a következő lefutó élkor x nem változik. Minden Y-hoz tartozik egy z. X váltásakor (lefutóra) csak akkor változik a z, ha Mealy modell szerint működik.



Állapottábla: Minden rovatához egy-egy x, és y kombinációt rendelünk, a rovataiba pedig azokat a z és Y kombinációkat írjuk, amiket az előbbiek hoznak létre. Az y-okat az abc betűivel nevezzük el. Csak **azokat** az állapottáblákat **értelmezhetjük aszinkron módon**, amikben nem alakulhat ki oszcilláció. Ezek azok, ahol minden oszlopban van stabil állapot.

Bemeneti kombinációk

Aktuális állapot(y)	x^1	x^2	x^3	x^4
a	**a**,z^1	b,z^4	**d**,z^2	d,z^4
b	**a**,z^4	b,z^3	**b**,z^2	c,z^1
c	**d**,z^3	c,z^1	**c**,z^3	**a**,z^2
d	**d**,z^2	b,z^2	c,z^3	b,z^3

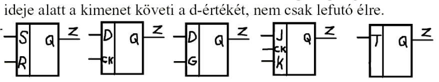
Következő áll.   **kimenet**

Aszinkron eset: A stabil állapotokat célszerű meg-jelölni. Ezek azok, ahol Y= a hozzá tartozó y-nal. Ha x változik (vízszintes elmozdulás), akkor az ott kijelölt állapotba ugrik, onnan az ott kijelöltbe, és így tovább, amíg stabil állapotba nem jut (függőleges elmozdulás). Egy kiindulási stabil állapotot kell választani, ami teljesen önkényes, ezt majd a megvalósítás során biztosítani kell, valamilyen resettel. **Szinkron**: x változik (lefutó élre), y is változhat (felfutó élre), de csak 1szer. Ez a táblában egy vízszintes, és egy függőleges elmozdulás. Előfordulhat, hogy bizonyos bemeneti kombinációk, vagy azok sorozatai sosem lépnek fel bizonyos állapotokban, így az azokhoz tartozó bejegyzések közömbösek. Értékeiket úgy választjuk meg, hogy az a leg kedvezőbb legyen. Ezek a nem teljesen határozott állapottáblák.

Állapotgráf: Sorrendi hálózat működési leírása, mint az állapottábla. A y-oknak köröket feleltetünk meg, az állapotváltozásoknak nyilakat, amelyekre ráírjuk az új bemenetet, és a következő állapothoz tartozó kimenetet.

Elemi sorrendi hálózatok (flip-flopok): Itt Y=z-vel, a kimenettel.
SR: Kimenetét megőrzi, ha set=reset=00 1-be vált, ha s=1, r=0. Visszavált, ha s=0, r=1. Aszinkron módon is működhet. JK: megegyezik sr-rel, azzal a különbséggel, hogy j=k=11 – nem tiltott bemenet, és ekkor állapotot vált. T: megegyezik jk-val, de a j és a k össze van kötve, így csak állapotot válthat, ha a bemenet 0-ról 1-re vált. D: az órajelbemenet lefutó élekor a D bemeneten fennálló értéket veszi fel a kimenet, ezt a következő lefutó élig megtartja. DG: hasonló a D-hez, de a g=1 ideje alatt a kimenet követi a d-értékét, nem csak lefutó élre.

A szinkron sorrendi hálózatok tervezéséhez mindenképpen flip-flopokat kell használnunk.



Sr/y	00	01	11	10
0	0	0	-	1
1	1	0	-	1

DG/y	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

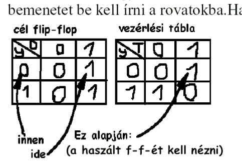
JK/y	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

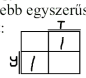
T/y	00	01
0	0	1
1	1	0

D/y	00	01
0	0	1
1	0	1

Különböző flip-flopok felhasználása egymás megvalósítására: Az alkalmazott flip-flop bemeneteire egy kombinációs hálózatot teszünk, aminek a bemenetei: az áramkör bemenetei és esetleg a kimenete. Kiindulás: a megvalósítandó f-f <u>állapottáblája</u>. Ez alapján, és az <u>**átmeneti tábla**</u> (→) alapján kitöltjük a <u>**vezérlési táblát**</u>. A vezérlési tábla peremezése ugyanaz, mint a megvalósítandó f-f-é, csak a rovatokba nem a keletkező szekunder változó értékét írjuk, hanem az annak létrejöttéhez szükséges bemeneti kombinációt, a használni kívánt f-f-hoz. Ha nem egy bemenetű, akkor mindkét bemenetet be kell írni a rovatokba.Ha az átmeneti táblának egy adott rovatában egymás alatt 2 különböző kombináció van, akkor ugyanoda be kell írni mind a kettőt. Ha ez kész van, akkor kitölthetjük a <u>karnaugh táblákat</u>, mégpedig szintén ugyanilyen peremezéssel. (A sorokhoz y, az oszlopokhoz j, és k, vagy s, és r, vagy csak d, t… tartozik.) Ha egy rovatban egymás aaltt két különböző kombinációvolt, akkor mindkét K-táblába egyaránt a felső, vagy egyaránt az alsó kombináció szerint írunk be. Azt választjuk, amivel könnyebb egyszerűsíteni. Majd felírjuk a logikai <u>függvény(eke)</u>t. Pl.: a fenti rajz folytatásaként:

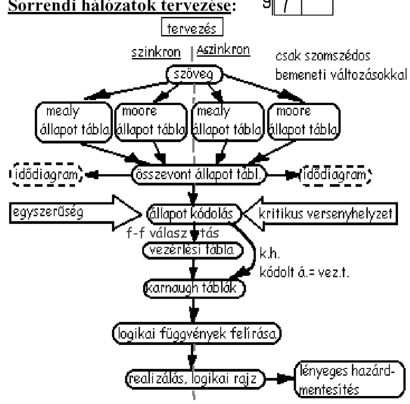
f-f	függvény	A szükséges bemeneti kombináció, hogy y→Y			
		0→0	0→1	1→0	1→1
SR	Y=y+R	Sr 0-	10	01	-0
JK	Y=jy+Ky	Jk 0-	1-	-1	-0
T	Y=Ty+Ty	T 0	1	1	0
DG	Y=DG+yG	Dg 0- -0	11	01	-0 1-
D	Y=D	0	1	0	1





Ez alapján a k.h egyenlete:
$D=y\overline{T}+\overline{y}T$ Ezt kell realizálni.

<u>Sorrendi hálózatok tervezése</u>:



<u>Szinkron hálózatok</u>:
Először az **előzetes állapottáblát** vesszük fel a szöveg alapján. Ebbe beírjuk a kimeneteket, és a következő állapotot. A hálózatnak különbözőképpen kell reagálnia ugyanarra a bemeneti kombinációra, az előző állapotoktól függően. Ha a hálózat egy állapotban van, az azt jelenti, hogy valamilyen bemenetek voltak a bemenetek ezt megelőzően. Minden állapothoz más előző bemeneti kombinációk sorrendje tartozik <u>**Mealy modell**</u> szerint:Ha még nincs olyan állapot, ami nem képviseli ugyanazokat az előzményeket ami nekünk kell, akkor újat vezetünk be. A következő állapotra való utalás mellé odaírjuk a hozzá tartozó kimenetet is, hogy a közbülső állapotnak biztosan megegyezzen a kimenete valamely végállapotéval. <u>**Moore modell**</u> szerint akkor is új állapotot vezetünk be, ha a meglévő állapotokhoz tartozó kimenetek sem felelnek meg. Itt ha egy állapotot bevezetünk, akkor az összes bemenetváltozáshoz **ugyanazt** a kimenetet rendeljük hozzá. Az új állapotnak abba az oszlopába jegyzünk be először, ahova a felvételkor jutunk, megadjuk a kimenetet, majd a sorban az összes oszlopba ugyanazt a kimenetet.

Általában több állapotot írunk fel a szükségesnél. Ezért el kell végezni az **állapotösszevonást**, és így elkészíteni az összevont állapottáblát. (erről később) Ezután jön az <u>**állapot-kódolás**</u>, hogy a realizálás a lehető legegyszerűbb legyen (milyen betűjelű állapothoz milyen szekundrváltozó-kom-binációt rendelünk). Ennek fajtái (sznkron esetben): **szomszédos kódolás**, **önfüggő szekunder változók szerinti kódolás (ht-partíció szerint)**. Szomszédos kódolás: Az állapot-kód megválasztásakor arra kell ügyelni, hogy páronként szomszédos legyen azon állapotok kódja, amelyeknek azonos a következő állapotuk, és szomszédos azoknak, amelyek ugyanannak az állapotnak következő állapotai, így csak szomszédos állapotváltozások lesznek, és így könnyebb egyszerűsíteni, és elmarad a funkcionális hazárd is. Előfordulhat, hogy e két feltétel egyszerre nem teljesíthető, így előnyben kell részesíteni az elsőt. Előfordulhat, hogy minden szomszédosság nem teljesíthető, ekkor teljesítsünk annyit, amennyit lehet. Önfüggő szekunder változók szerinti kódolás: A Y-okat olyan csoportokba randezzük, (önfüggő csoportok) hogy az egy csoportban lévők csak a csoprt elemeihez tartozó y-októ függjenek. Az önfüggés feltétele, hogy egy csoport bármrly eleméből ugyanabba a csoportba jussunk, (nem a kiindulási csoport). Keressünk ilyen csoportokat, majd a csoport elemeit kódoljuk. Ezután az ilyen csoportokat egy-két újabb szekunder változó bevezetésével különböztetjük meg. Az ilyen csoportok összessége a partíció, és ha a fent leírt módon határozzuk meg a csoportokat, akkor Helyettesítési Tulajdonságú (HT) partíciónak nevezzük.

Ha ez megvan, akkor **flip-flopot** kell **választ**ani, majd jöhet a vezérlési tábla elkészítése. Az egész további procedúrát több f-f-pal el kell végezni, és a legegyszerűbb megoldást meghagyni. Tervezni kell egy kombinációs hálózatot, ami a flip-flopok bemeneteire csatlakozik, és a bemenetei a hálózat bemeneti változói, és a kimeneti változói. Z-ket az y-okból, és az x-ekből kell kikódolni az állapottábla alapján felírt igazságtábla (vagy karnaugh-t.) felhasználásával. **A vezérlési tábla**: minden szekunder változóhoz hozzárendelünk egy flip-flopot, (a f-f kimenete lesz a Y/y). A kimeneti függvényt (z) a Y-okból, és a bemenetekből (x) kódoljuk ki, (egy igazságtáblából nyerjük ki, amit az állapottáblából olvasunk ki) illetve moore modell esetén csak az y-okból. A vezérlési tábla peremezése olyan, mint az állapottábláé, csak itt minden cellát annyi részre osztunk, ahány szekunder változó van, és az ilyen részcellákba azt a kombinációt írjuk, amit az alklmazott f-f bemenetére kell adni, hogy azt az állapotátmenetet hajtsa végre, amit az állapot tábla kijelöl az adott cellára. Ezt úgy értem, hogy a kiindulási állapot az, ami a sor elején van, mint aktuális állapot, és a célállapot az, ami az adott cellában van. Az ilyen részcellákat is két részre osztjuk, mivel bemeneti kombinációkat írtunk bele, és 2 bemenet van (j és k, s, és r, de D-nál, és T-nél csak 1 van) Ezután minden bemenethez **karnaugh táblákat** készítünk úgy, hogy az vezérlési(állapot) tábla peremezését átvesszük, és kihagyjuk a táblázatból a nem ehhez a bemenethez tartozó bejegyzéseket. Ezután összevonunk, majd felírjuk az **egyenletek**et ez alapján, és **realizálunk**.

Aszinkron hálózatok:

Itt is először az előzetes állapottáblát vesszük fel. Itt a funkcionális hazárd kizárására megtiltjuk a nemszomszédos bemeneti változásokat. Minden stabil állapottal nem szomszédos bemenetváltásra lévő cellákbe közömbös bejegyzéseket teszünk. Az állapotváltásokkor ha a kimenetnek stabilan 0-nak, vagy 1-nek kell maradnia, akkor a közbülső instabil állapotokhoz ugyanezt a kimenetet rendeljük. Ha a kimenetnek váltania kell, és egy közbülső állapot van, akkor az ahhoz tartozó kimenet közömbös. Ha két közbülső van, akkor az egyikhez tartozó kimeneti értéket rögzítjük a hozzá közelebb eső véállapot kimeneti értékéhez, a másik közömbös. Figyelni kell, mikor állnak elő újra a kezdeti feltételek, mert ekkor vissza kell ugorni az a állapotba. Minden sorba csak egy stabil állapotot tegyünk, hogy ki lehessen lőni a nem szomszédos bemeneti változásokat. Kijelöljük a00-t kezdő stabil állapotnak, és kilőjük a nem szomszédos válozáshpz tartozó cellát. A maradékhoz új állapotokat rendelünk, az új állapotoknak új sorokat nyitunk. Az új sorokba a hívási oszlopba kella stabil állapotot bejelölni. Később már új állapot felvétele előtt figyelni kell, hogy nincs-e már olyan, ami megfelelne. Moore modell esetén minden új sorba a kimenetet minden rovetba be kell jelölni. Ezután az **állapotösszevonás** következik, majd az **állapotkódolás**. Az állapotkódoláskor a kritikus versenyhelyzet elkerülése a fő cél. Az a **kritikus versenyhelyzet**, amikor állapotváltáskor a szekunder változók nem pont egyszerre változnak, és közbülső, nem tervezett állapotok is felléphetnek, amikről esetleg egy másik állapotra való ugrás van előírva. Ezért az állapotváltozásoknak szomszédosaknak kell lenniük, hogy csak 1 y változzon, tehát szomszédos kódolás kell. Ennek a megvalósításához fel kell rajzolni egy olyan állapotgráfot, ami nem jelzi a bemeneti, és a kimeneti kombinációkat. Az állapotátmeneteknek a nyilak felelnek meg. Az állapotokat páronként addíg kell cserélgetni, amíg jó nem lesz. Esetleg az **instabil állapotokat módosítjuk** úgy, hogy közvetlen állapotátmeneteket szűntetünk meg, vagy teszünk közvetetté, amelyek gátolták a szomszédossági viszonyt. Célravezetőbb, ha új, **átvezető állapotokat** veszünk fel, vagy a meglévő közönbös bejegyzéseknek olyan értéket adunk, hogy átvezetőként működjenek. Az átvezető állapotok szomszédosak a kezdő, és a célállapottal is (mert azok nem voltak szomszédosak). Ezen állapotok sohasem stabilizálódnak.

Ezután eldöntjük, hogy flip-floppal, vagy visszacsatolt kombinációs hálózattal oldjuk-e meg a hálózatot.

Ha **visszacsatolt k.h.-tal**, akkor az állapottábla= a vezérlési táblával, amit annyiszor írunk le, amennyi a kimeneti változók, és a szekunder változók összessége, mindegyikhez egy változó tartozik, annak a bejegyzéseit írjuk csak bele. Itt a kimenetnek is közvetlenül fel kell írni a vezérlési táblából a függvényét. Ezt egyszerűsítve felírjuk az egyes kimeneti, és szekunder változók egyenleteit, és realizáljuk.

Flp-flopokkal: Kiválasztunk egy flip-flopot, majd a továbbiakat elvégezzük, ezután más f-f-pal is kipróbáljuk az egészet, és az egyszerűbb realizált hálózatot tartjuk meg. Minden szekunder változóhoz 1-1 f-f-ot rendelünk. Tervezni kell egy kombinációs hálózatot, ami a flip-flopok bemeneteire csatlakozik, és a bemenetei a hálózat bemeneti változói, és a kimeneti változói. Z-ket az y-okból, és az x-ekből kell kikódolni az állapottábla alapján felírt igazságtábla (vagy karnaugh-t.) felhasználásával. Feírjuk a vezérlési táblát a szinkron hálózatoknál leírt módon, és innentől az ott leírt módon befejezzük a tervezést. (karnaugh táblák, vezérlési függvények, realizálás.

Végül a kész hálózatot meg kell vizsgálni **lényeges hazárd** szempontjából. A lényeges hazárd az, amikor egy kapubemeneten előbb érvényesül a szekunder változók változása, mint a bemenetek változása. Kiküszöbölése: Meg kell keresni, mely y-okra teljesül ez, és a hozzájuk tartozó visszacsatoló ágakba késleltetéseket kell elhelyezni. Meghatározásuk bonyolult, ezért általában minden visszacsatoló ágba elhelyezik a késleltetést.

Állapotösszevonások:

Ennek lépései:

- Ekvivalens (teljesen határozott állapottáblák esetén), illetve kompatíbilis (nem teljesen határozott állapottáblák esetén, főleg aszinkron hálózatok) állapotpárok keresése lépcsős táblán.
- maximális ekvivalencia, illetve kompatibilitási osztályok keresése algebrai úton.
- A megtalált osztályok elnevezése, ezek lesznek az összevont állapottábla új elemei.

Állapot ekvivalencia fennáll (nem t.h. eset), ha a két állapothoz tartozó 2 sor megegyezik, vagy feltételesen ekvivalens, ha ami a 2 sorban különböző, az is ekvivalens. Az utóbbi esetben az az állapotpár a feltéte, ami a vizsgált két sorban különböző. Több feltétel is lehet. (ezek szükséges, nem elégséges feltételek.)

Állapot kompatibilitás fennáll, ha a két állapothoz tartozó kimenetek megegyeznek minden olyan helyen (bemeneti kombinációnál), ahol határozott a kimenet, és mindkét állapot ugyanahhoz az állapothoz vezet, illetve egymással kompatíbilis állapotokhoz. Az utóbbi a feltételes kompatibilitás, a feltétel pedig, az a 2 állapot, ahová a vizsgált 2 állapot vezet.

A **lépcsős tábla**: Minden mezőjéhez tartozik 2 állapot, minden 2 állapothoz tartozik egy mező, és a mezők azt jelzik, hogy ekvivalens-e (kompatíbilis-e) a 2 állapot, ha igen és feltételesen, akkor milyen feltétellel. Ha a kimeneteik különbözősége miatt nem lehetnek ekvivalensek (kompatibilisek) akkor **X**-et teszünk a mezőbe. Ahol nincs X, ott megnézzük, hogy feltételesen, vagy anélkül ekvivalensek (kompatibilisek), és ha feltétel nélkül, akkor √-t teszünk a mezőbe, ha feltétellel, akkor beírjuk a **feltétel**t.

Következő lépésben azt keressük, hogy mely mezőkben szerepel feltételként a már le x-elt mezők egyike, és akkor azt a mezőt is le x-eljük. A nár le x-eltek mindegyikére ellenőrizzük az összes feltételes cellát, amikor az összes cellát leellenőriztük egy korábban le x-eltre, akkor mégegy X-et teszünk az előzője mellé. Így keletkeznek 1 x-es cellák, ezekre is ugyanígy elvégezzük. A cél az, hogy csak olyan cellák maradjanak, amikben vagy √ van, vagy két **X**.

Azok a cellák, amelyekben √ van, ekvivalens(kompatíbilis) allapotpárokat jelölnek. Ezután a **maximális ekvivalencia (kompatibilitási) osztályok**at keressük. Egy ilyen osztály tagjai összevonhatóak egyetlen állapottá. Az összevonás eredményét algebrai úton kapjuk meg. Ennek menete: Feltételezzük, hogy minden állapot egy osztályba tartozik, majd sorban az egyes állapotokat megvizsgáljuk, hogy tényleg abba az osztályba (kezdetben 1 osztály van, az osztódni kezd) tartozik-e, mint ahova eddíg feltételeztük. Ezt úgy ellenőrizhetjük, hogy megnézzük, hogy alkot-e párt a lépcsős táblában az osztály többi tagja közül mindegyikkel. Ha igen akkor marad az osztályban. Ha nem, akkor új osztályt alapít, (a régiből kizárja magát) amibe beveszi azokat is, akikkel az eddigi osztályban ekvivalens (kompatíbilis) volt. Ezek az elemek benne maradnak a régi osztályban is. Mégis a folyamat végére, mikor már minden állapotot megvizsgáltunk, az osztályoknak nem lesz közös elemük. Lesz olyan osztály, amelyikben csak 1 elem van. Itt is érvényesek az algebrai szabályok, pl. az elnyelés!

Ezutánn az osztályok tagjai összevonhatóak. Ezen állapotok kimenetei megegyeznek bármely tag kimeneteivel minden bemeneti változás hatására. Az új állapothoz rendelt következő állapotok: kiválasztjuk az egyik tagot, és az ő következő állapotainak a helyére annak az osztálynak a betűjelét írjuk, amelyikben található a kijelölt következő állapot.

Az új állapottáblába az így előállított osztályokat, mint állapotokat írjuk.

Példa sorrendi hálózat tervezésére:

Aszinkron, 2bemenet, 1 kimenet, moore modell, flip-flopokkal

Z=1 csak akkor, ha a bemeneten 10 jött, és előtte 00→01→11-volt sorban.

Az előzetes állapottábla:

y\x	00	01	11	10
a	a0	b0	—	e0
b	a0	b0	c0	—
c	—	g0	c0	d-
d	a0	—	f-	d1
e	a0	—	f0	e0
f	—	g0	f0	e0
g	a0	g0	f0	—

a lépcsős tábla az állapotösszeconáshoz:

	a	b	c	d	e	f
b	√					
c	~~bg de~~	~~bg~~				
d	X	~~cf~~	~~cf~~			
e	√	~~cf~~	~~cf de~~	X		
f	~~bg~~	~~bg cf~~	~~cf de~~	X	√	
g	~~bg~~	~~bg cf~~	~~cf de~~	√	√	√

Ez alapján kompatibilis állapot-Párok: ab, ae, dg, ef, eg, gf.

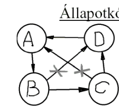
A maximális kompatibilitási Osztályok:
(abcdefg)
(abe)(bcdefg)
(ab)(ae)(b)(cdefg)
(ab)(ae)(~~b~~)(c)(defg)
(ab)(~~ae~~)(c)(d~~g~~)(efg)
(ab)(c)(d)(efg)
A B C D

Ha 2 osztályban benne van ugyanaz az elem, akkor az egyikből kihagyjuk, mert csak egyben maradhat benne.

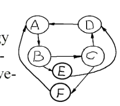
Az összevont állapottábla:

y\x	00	01	11	10
A	A0	A0	B0	A0
B	—	D0	B0	C0
C	A1	—	D1	C1
D	A0	D0	D0	D0

Állapotkódolás: (próbálgatással)



2 állapotátmenet nem jó, mert nem szomszédos, így kialakulhat a kritikus versenyhelyzet. Ezért két átvezető állapot kell: E, és F.



A kódolt állapottábla:

y\x	00	01	11	10
000	000 0	000 0	010 0	000 0
010	— -	111 0	010 0	011 0
011	000 1	— -	111 1	011 1
111	000 0	111 0	111 0	111 0
110	111 0	111 0	111 0	111 0
001	000 0	000 0	000 0	000 0

A vezérlési tábla:

y\x	00	01	11	10
000	0-0-0-	0-0-0-	0-1-0-	0-0-0-
010	- - -	1--01-	0--00-	0--01-
011	0--1-1	- - -	1--0-0	0--0-0
111	-1-1-1	-0-0-0	-0-0-0	-0-0-0
110	-0-01-	-0-01-	-0-01-	-0-01-
001	0-0--1	0-0--1	0-0--1	0-0--1
	JK 1 JK 2 JK 3			

$J_1=y_2x_2\overline{x}_1+x_2\overline{y}_1y_2y_3$

Ugyanígy kell a többi függvényt is meghatározni, a kimeneti függvényt pedig Moore modell lévén csak a Y-okkból, a f-f-ok kimeneteiből kell kikódolni.

A Y1-et előállító flip-flop J bemenetének a vezérlési függvényének a karnaugh táblája:

J	a	-	-	f	b	c	d	e
	0			0	0	0	—	—
X_1	0			0	0	1	—	—
X_2	0			0	1	—	—	—
	0			0		0	—	—

y_3 y_3 y_1 y_2

Sorrendi hálózatok analízise:

A kész kapcsolás alapján vizsgáljuk a hálózatot, kritikus versenyhelyzet, lényeges hazárd szempontjából, majd felírjuk az állapottáblát, ebből következtetünk a tényleges feladatra.

Lépései: Fordított sorrendben ugyanazok, mint a tervezésé.

- hálózati egyenletek felírása
- vezérlési tábla felírása
- kódolt állapottábla meghatározása
- esetleg analízis kritikus versenyhelyzet szempontjából, és lényeges hazárd szempontjából
- szimbólikus állapottábla, idődiagram felírása.

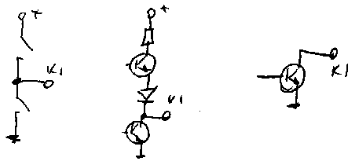
Ezek alapján már könnyebben megállapítható egy hálózat működése.

– LOGIKAI ALAPELEMEK

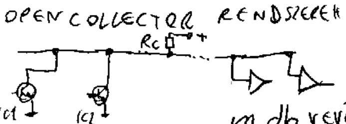
TTL: KIMENET:
H: 3,5V–5V L: 0–0,4V
BEMENET:
H: 2,4V–5V L: 0–0,8V

TERHELÉS
BEMENET: H: 40μA, L: –1,6mA
KIMENET: H: 400μA, L: –16mA

– KIMENETEK:
3STATE TOTEMPOLE OPEN COLL



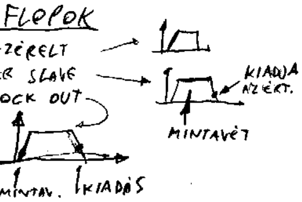
OPEN COLLECTOR RENDSZEREK



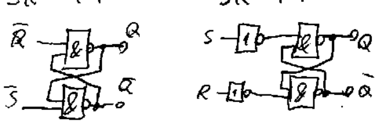
$$\frac{U_T}{I_{OL} - n I_{IL}} < R_C < \frac{U_T - U_{OHMIN}}{m I_{OH} + I_{IH} \cdot n}$$

– FLIP-FLOPOK

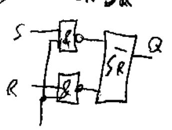
- ÉLVEZÉRELT
- MASTER SLAVE
- DATA LOCK OUT



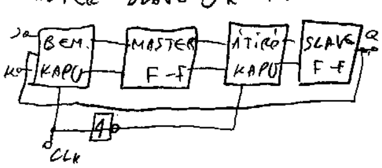
– $\overline{SR}$ – F-F SR – F-F



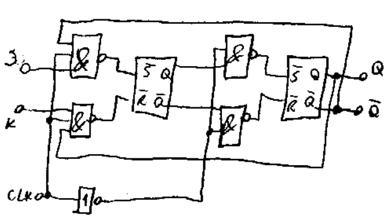
SZINKRON SR



MASTER SLAVE J-K F-F



BŐVEBBEN:



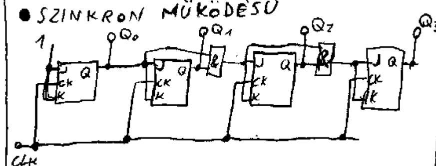
CLEAR BEVEZETÉS
A BEMENETI 2 &-KAPURA, ÉS
A 2 F-F KAPUIRA ÚJ BEMENET,
EZEKET ÖSSZEKÖTNI: CLEAR

– SZÁMLÁLÓK

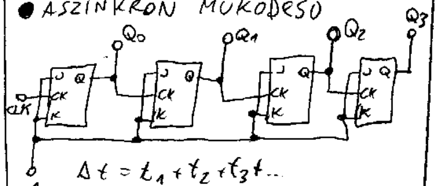
LSB – LEGKISEBB HELYIÉRTÉKŰ BIT
MSB – LEGNAGYOBB –||–

- SZÁMRENDSZER:
BINÁRIS / BCD / DECIMÁLIS (4 BIT = 1 DIGIT)
- IRÁNY:
FEL/LE/ODA-VISSZA

– MŰKÖDÉS
- SZINKRON MŰKÖDÉSŰ



- ASZINKRON MŰKÖDÉSŰ

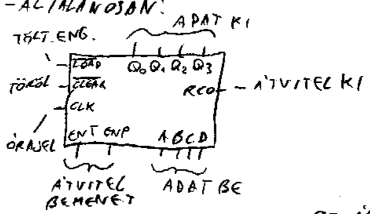


$\Delta t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$
EZ ALATT HAZÁRD VAN.

SZÁMLÁLÁS 0..n

– RÖVIDÍTETT SZÁMLÁLÁSI TARTOMÁNY
- ASZINKRON ESET: AZ UTOLSÓ UTÁNI kombinációt kikódoljuk a kimenetekből, és azzal engedélyezzük a törlést, vagy a LOAD-ot (BETÖLTÉS-t). A törlő impulzust hosszabbítani kell, hogy elég hosszú legyen. (MONOSTABIL M.V.)
- SZINKRON: utolsó kombinációt kikódoljuk, az bebillent 1 flip-flopot, ami a köv. lefutó élre tölt (TÖLT)

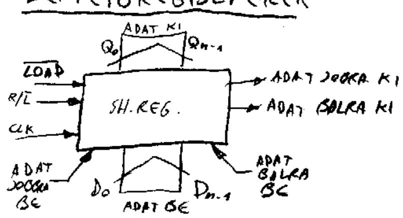
– ÁLTALÁNOSAN:



CLEAR → 0-RA, PRESET 1-RE ÁLLÍT.
ENT: ELŐZŐ SZÁMLÁLÓ RCO-JÁRA
ENP: ELSŐ SZÁMLÁLÓ RCO-JÁRA

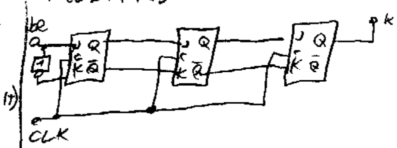
– A VEZÉRLŐJELEK AKTÍV ALACSONY SZINTŰEK, HA NEM HASZNÁLJUK, FELKÖTJÜK 1-RE, 10kΩ-ON KERESZTÜL

– LÉPTETŐREGISZTEREK



ADATTÁROLÁSRA, SOROS-PÁRHUZAMOS ÁTALAKÍTÁSRA VALÓ.

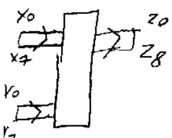
FELÉPÍTÉS:



– ARITMETIKA

A⊕B KIZÁRÓ VAGY
A⊙B MEGEGYEZŐ VAGY

– ÖSSZEADÁS (FIXPONTOS)



(+1 HELYIÉRTÉK)

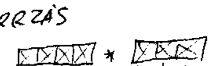
1 BITES TELJES ÖSSZEADÓK:

S – ÖSSZEG
$S = A \oplus B \oplus C_i$
$C_0 = A \cdot B + C_i(A+B)$

– KIVONÁS:
- EGYENESKÓDÚ SZÁMOKKAL:
  1. KIVONANDÓT 2-ES KOMPLEMENSÉ ALAKÍTJUK ($MAX \cdot 2^{n-1}$)
  2. összeadás
  3. előjel-ellenőrzés (ELSŐ BIT)
  Ha ⊖ akkor komplementálni.
- 2-ES KOMPLEMENS KÓDÚ SZÁMOKKAL: EGYSZERŰEN ÖSSZEADNI.

A KOMPLEMENTÁLÁS: INVERTÁLNI+1
(ODA-VISSZA) A TÚLCSORDULÁS NEM ÉRDEKES

– SZORZÁS



XXXX
XXXX
XXXX
YYYYYY

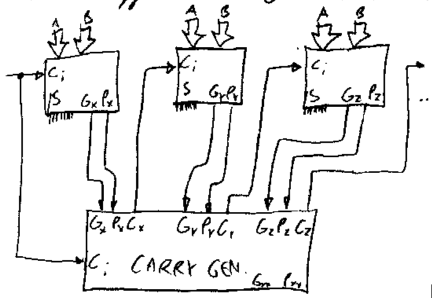
SZABÁLY: Ha a szorzó bit = 1 akkor a tartalmát lerakjuk, ha 0 akkor csupa 0-át.
m bit · n bit → MAX m+n bit

– OSZTÁS: n ELŐJELEK
XXXX : YY = ZZZ
XX
–YY
MAJD EZT KIVETNI, JOBBRA MINDIG n db bitet vizsgálunk.
ELŐJEL AZ EREDMÉNY KÖVETKEZŐ BITJE

– LEBEGŐPONTOS SZÁMÁBRÁZOLÁS:
$N = m \cdot 2^e$
$N = [m, e]$ $|m| \geq 2^{n-1}$
KOMPLEMENS KÓDÚ e EGÉSZ

- ÖSSZEADÁS:
A KISEBB e-hez tartozó m-et el kell léptetni addig, amíg $e_1 = e_2$ lesz $= e$
$N_1 + N_2 = (m_1 + m_2') \cdot 2^e$
- KIVONÁS UGYANÍGY
$N_1 - N_2 = (m_1 - m_2) \cdot 2^e$
- SZORZÁS: $N_1 \cdot N_2 = (m_1 \cdot m_2) \cdot 2^{e_1 + e_2}$

– TÖBB db 8 bites összeadót összekötünk hogy több bites legyen: CARRY GENERÁTOR kell



– SZÁMLÁLÓKNÁL HATÁRMÓDOSÍTÁS

● SZINKRON, CLEAR-REL (pl nem 0..255 hanem 8...139)

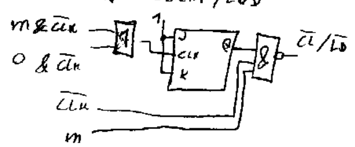
m –▷– CLEAR

● SZINKRON, LOAD-DAL (n..m)

m –▷– LOAD

+ AZ ÚJ SZÁMOT BETÖLTENI. lefutás él után hatásos.

● ASZINKRON CLEAR/LOD



– PARITÁS GENERÁLÁS

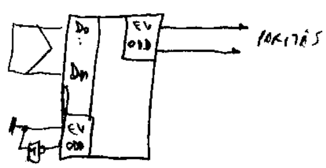
D_0 .. D_n -BEN AZ EGYESEK SZÁMA PÁROS, VAGY PÁRATLAN

PÁROS PARITÁS (PE=1 HA PÁROS, EVEN)

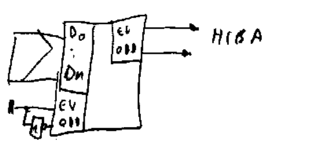
PÁRATLAN (PO=1 HA PÁRATLAN, ODD)

$PE = D_0 \oplus D_1 \oplus D_2 \cdots$

GENERÁLÁS:

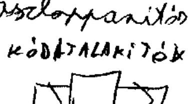


ELLENŐRZÉS



ADATBIZTONSÁG NÖVELÉS: REDUNDANCIA. PL MÁTRIXBA RENDEZZÜK az adatot, és sorparitás, oszlopparitás számítása.

– KÓDÁTALAKÍTÓK: valamilyen egyenletek, vagy táblázat a hozzárendelés

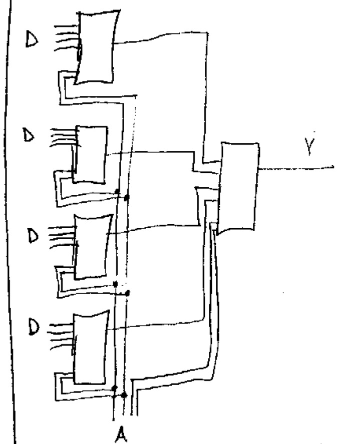


vagy transzformációs mátrix ld BCD → 7 szegmenses.

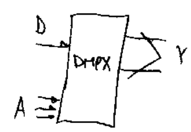
– MULTIPLEXEREK:

PÁRHUZAMOS, SOROS ÁTALAKÍTÁS. A címmel választjuk a bemenetet a kimenetre.

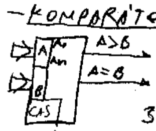
ÖSSZEKÖTÉS: (KASZKÁDOSÍTÁS)



VISSZAALAKÍTÁS: DEMULTIPLEXEK



– KOMPARÁTOROK

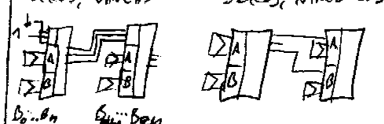


CAS - KASZKÁDOSÍTÓ bemenet. nem mindig van. 3 db BEM: A>B, A<B, A=B

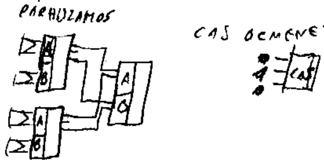
ELDÖNTI, HOGY A>B, A<B, A=B

● KASZKÁDOSÍTÁS:

SOROS, VAN CAS — SOROS, NINCS CAS



PÁRHUZAMOS — CAS BEMENETEK:



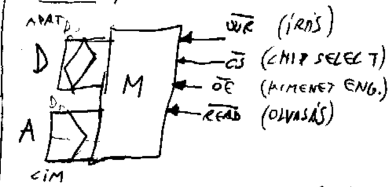
– MEMÓRIÁK

CÍMZÉSSEL ELÉRHETŐ ADATOK.

● ÍRHATÓ/OLVASHATÓ: (RAM)
- STATIKUS: FLIP-FLOPOK
- DINAMIKUS (KONDI-FETEK) frissíteni kell időnként. olcsóbb.

● CSAK OLVASHATÓ
- MASZKPROGRAMOZOTT
- PROM: 1 szer írható.
- EPROM: újraírható, UV törlés
- EEPROM: elektronikusan törölhető
- OTP: ABLAK nélküli EPROM.

– RAM, EPROM



READ/WRITE egyben lehet.

– HASZNÁLAT

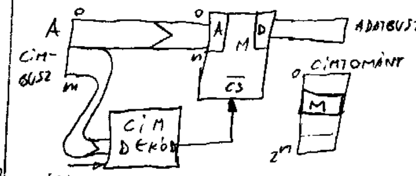
CÍM, ADATBUSZ CSATLAKOZÁS ELŐTT buszmeghajtó áramkörök kellenek: vagy 2 irányú:

EZEKET A RD/WR, CÍMDEKÓDER jelekkel vez.

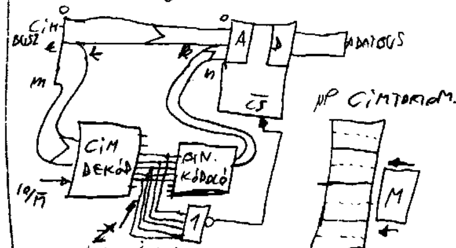
– MEMÓRIA ILLESZTÉS, CÍMDEKÓDOLÁS.

1 adott memória IC, a proci címtartományának csak 1 kis részére szolgál pl. vagy: 1 címdekódoló áramkör a címbusz alapján előállítja a CS-jelet, és a READY jelet. Ez a (READY) procinak kell mint várakozás.

● HA CÍMTARTOMÁNY SIMA FELOSZTÁSA ELÉG A MEM. CÍMTART.-HOZ:



● HA NEM JÓ A SIMA FELOSZTGATÁS, PL ELTOLT HELYZET, VAGY NEM 2^x tartományt használunk

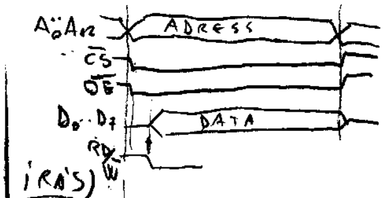


LEGKISEBB SZEGMENSMÉRET MEGHATÁROZÁSA: (2^k) MEMÓRIATÉRKÉP ALAPJÁN. (n–k) bitet kell a címdekódolóval előállítani. m–k bit a dekódolóra, 2^{m-k} db szegmens lesz. Mindegyikhez 1 kerethez tartozik. Ezekből azokat a kereteket a kódolóra, amely szegmensek az adott memóriához tartoznak.

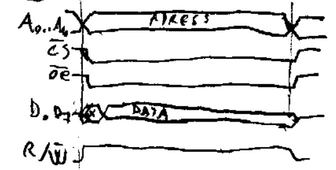
– MEMÓRIA ÍRÁS/OLVASÁS

MEMÓRIA SZEMPONTJÁBÓL

OLVASÁS)

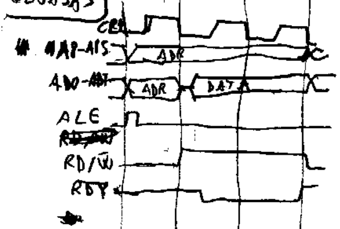


ÍRÁS) W

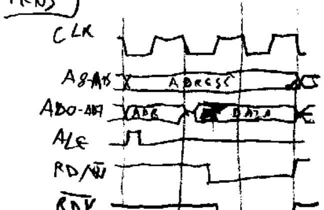


PROCI SZEMPONTJÁBÓL

OLVASÁS)



ÍRÁS)



– DIGITÁLIS RENDSZEREK
- SORRENDI HÁLÓZAT
- FÁZISREGISZTERES } HUZALOZOTT
- MIKROPROGRAMOZOTT
- µPROCESSZOROS

– SÍNEK (BUSZOK)
adatátviteli rendszer, rendszerek belső egységei közt
- PÁRHUZAMOS (BUSZ):
  A ═ B
- SOROS (BUSZ)
  A → B
- VEGYES

– MÁSKÉPP:
- SZINKRON
jelzést ad a adó, hogy az adat a buszon van
- ASZINKRON: visszajelzést vár az adó, addig nem küld új adatot.

– MÁSKÉPP:
- 1 MASTERES
- TÖBB MASTER

– ELEMEI:
vezetékek, PROTOKOLL (szabályok)

PROCESSZOROK (i8085)

– ELEMI ADATMOZGATÓ, ARITMETIKAI, ÉS LOGIKAI + PROGRAMUGRÓ MŰVELETEKET HAJT VÉGRE, EGYMÁST KÖVETŐ UTASÍTÁSOK ALAPJÁN, AMIK PROGRAMBAN VANNAK TÁROLVA. A PROGRAMOT MEGÍRJÁK, MAJD A FORDÍTÓ LEFORDÍTJA.

FŐ RÉSZEK: (i8085)
ALU, regiszterek (AKKU a fő), cím buffer, adat buffer, vezérlő, időzítő egység, órajelgenerátor.
Speciálisan: STACK POINTER, PROGRAM SZÁMLÁLÓ, UT. REG.

– Az UTASÍTÁSOK:

MŰVELETI KÓD	OPERANDUS

1/2/4 CÍMŰEK

– UTASÍTÁS VÉGREHAJTÁS:
GÉPI CIKLUSOKBAN (8085-nél
3 ÓRAJEL CIKLUS = 1 GÉPI CIKLUS)
1 G.C. = 1 RÉSZMŰVELET.

LÉPÉSEK:
1. UTASÍTÁSBETÖLTÉS (FETCH)
   - MŰV. KÓD
   - CÍMRÉSZEK
2. VÉGREHAJTÁS

– CÍMZÉS:
- KÖZVETLEN
programban adjuk meg a címet
- INDIREKT: CÍMLATCH-ben tárolva van maga a cím
- REGISZTERCÍM

– FLAG-EK:
ALU-műveletek eredményei-nek tulajdonságait jelzik. (paritás, carry, zero)

– PROCI ÁLLAPOTA:
RUN, WAIT (READY-re vár), HOLD (HLDA=1 - vár, PAUSE), HALT (leállás)
Ezektől, és az éppen végzett műveletektől függenek a státuszbitek (S_0, S_1)
Ezek ki vannak vezetve

– MEGSZAKÍTÁSOK
Programfutás közben, és elugrik a megszakításhoz tartozó szubrutinra.
Honnan jött a kérés:
RIM utasítással ÁLLAPOTINFORMÁCIÓT lehet kérni.

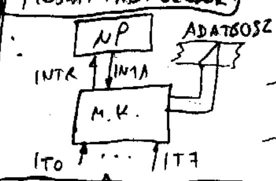
Ha kívülről jött, akkor (INT) a µP lekéri a vektorcímet.
Sajat kérésekhez is van, ezek RST 5.5, 6.5, 7.5, TRAP a bemenetei. RST n → n·8 = ADDR
Külső kiszolgálási kérés:
az egység INTR jelet küld, ha a µP kész, INTA-val lekéri a címet az adatbuszon (címzés illyen nincs)
Ha kész, érkezett az INTE-FLIPFLOP-ot bebillenti. Ez letiltja a többiet.
DI utasítással lehet tiltani, EI-vel lehet engedélyezni a megsz.-okat. VISSZATÉRÉS: RET

– STACK (verem)
LastInFirstOut memóriaterület.
tehát utoljára tettünk be a tetejébe, azt tudjuk először kiolvasni.
Megszakításokor, szubrutinhívásokon a PC értéke ide kerül be. Visszatéréskor ki lehet bele tenni mást is, pl. folyamatban lévő műveletek operandusait, regiszterek tartalmát
PUSH reg.pár – betölteni
PUSH PSW – A, F regisztereket teszi
POP op. – ugyanaz
A STACK aktuális helyére a STACK POINTER mutat.
Ennek kezdőértéket kell adni.

– I/O EGYSÉG
SOROS IN: SID -ből
SOROS OUT: SOD
ÍRÁSA/OLVASÁSA a RIM/SIM utasításokkal. Úgy csak 1 bittel férjünk hozzá, MASZKOLNI kell.
RIM: olvasás (állapotok)
RIM – beolvas
ANI 1000000 – maszk.
XRI 0
így A Z-FLAG jelzi a SID értékét.
BEÁLLÍTÁS: [FLAG-EKTŐL függő ugró utasítások
MVI A, BITMINTA
SIM
Ezzel lehet megszakítást engedélyezni külön-külön, SOD, SOD ENABLE...

– PROCI FELFÜGGESZTÉS ÉS LÉPTETÉS
- GÉPI CIKLUSONKÉNT: RDY – LETILTÁS
- UTASÍTÁSCIKLUSONKÉNT: STÁTUSZBAN jelzi a µP ha műv. kódot olvas. akkor HOLD-ot kell adni (FETCH CIKLUS)
- EGYÉB: HOLD-dal

MEGSZAKÍTÁSKEZELŐ:



INTR jelre INTA-val válaszol a NP. Ekkor utasítást (CALL, RST) ad be a megszakításkezelő.

- ÜZEMMÓDOK: INICIALIZÁLÁS / NORMÁL MŰKÖDÉS
- AZ UGRÁSI CÍMET INICIALIZÁLÁS KÖZBEN KELL BEADNI NEKI.
- VAN I/O CÍME IS, AZ INICIALIZÁLÁSHOZ.

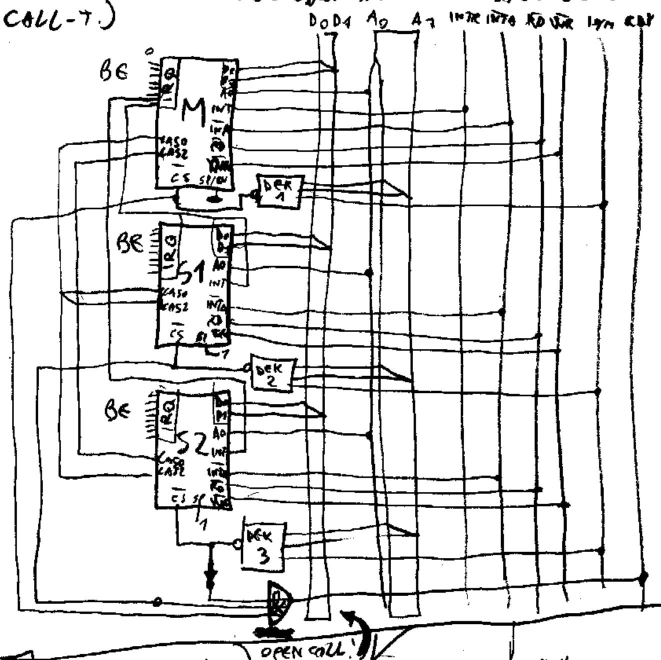
8259 KASZKÁDOSÍTÁSA:

INTA → IRÁNY INTA ← INTA

VAN CAS-BUSZ

AZ IRQ0-RA CSAK AKKOR KÖTÜNK BA A TÖBBINIS VAN MÁR SLAVE!!

(HA MINDEN BEMENETEN SLAVE VAN AKKOR A MASTER SOSE AD BE CALL-T.)



VÁLTOZÁS EHHEZ KÉPEST: G - LETILTVA, HA EGY MÁSIKNAK SZÓL AZ INTA. EZAKOR VAN, HA:

- MASTER: A CAS VONALRÓL KIKÓDOLJUK AZOKAT A KOMBINÁCIÓKAT, AMIK A SLAVE-EKHEZ TARTOZNAK. EZZEL TILTJUK A BUFFERT.
- SLAVE HA NEM AZ Ő KOMBINÁCIÓJA JÖTT, A CAS-BUSZON, AKKOR TILTJUK A BUFFERET.

NEM MUSZÁJ BUFFER!

ICW

INICIALIZÁLÁSI PARANCSREGISZTEREKKEL. Ezekkel a parancsregiszterekkel ICW-t csak egyszer lehet kiadni, utána csak OCW-t lehet kiadni.

ICW1
- KASZKÁDOSÍTÁS LESZ-E (ICW3 KELL)
- ICW4 LESZ-E
- ÉL / SZINT
- BÁZISCÍM A5 - A7
- 4 BÁJTONKÉNT, VAGY 8-B.-ONKÉNT (A_0, A_1 = 0 -LESZ) (LÉPÉSKÖZ MIATT)

ICW2: $A_8 .. A_{15}$

ICW3: (HA KASZKÁDOS)

MASTER ÉS SLAVE MÁSKÉPP ÉRTELMEZI
- MASTERNEK: MELYIK BEMENETEN VAN SLAVE
- SLAVE-NEK: ALSÓ 3 BIT: CAS KÓD

ICW4:
- A SP/EN BEMENET, VAGY KIMENET?
- HA KIMENET, AKKOR ITT KELL MEGADNI, HOGY MASTER, VAGY SLAVE. (EGYÉBKÉNT SP/EN BUFF. ENG.) (HA BEMENET, AKKOR AZ SP/EN-EN ADJUK MEG)
- RÖGZÍTETT, VAGY FORGÓ PRIORITÁS
- AEOI: 1: MEGSZ. BEJÖTTE UTÁN (CALL OLVASÁSA UTÁN) ÚJRA ENGEDÉLYEZI A BEMENETET. 0: NP FOGJA ÚJRA ENGEDÉLYEZNI OCW2-VEL.
- NP TÍPUS: 8085 (CALL) 8086 (VEKTORT FOG CSAK BEADNI)

INICIALIZÁLÁS:

A PERIFÉRIACÍM ALSÓ BITJE ICW1-NÉL 0, A TÖBBINÉL 1 (UGYANAZ A CÍM)

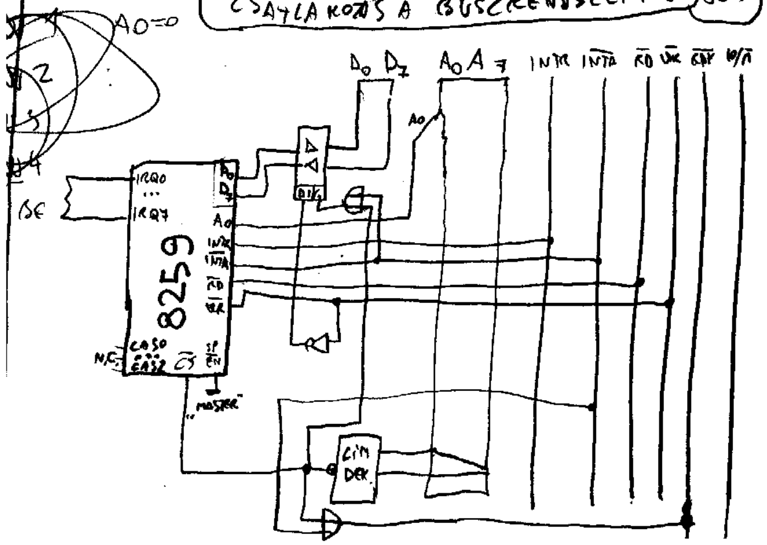
AZONOS CÍMRE TÖBB BÁJT: SZEKVENCIÁLIS BETÖLTÉS.

ICW1 UTÁN TUDJA, HOGY MI, ÉS MENNYI FOG KÖVETKEZNI.

2 DEKÓDOLT I/O CÍMEN (OUT CÍM)

CALL
CÍM L
CÍM H

CSATLAKOZÁS A BUSZRENDSZERRE: 8259



RDY INTA ALATT IS
VAN (KELL) !

PIR:
→ 1T INTA RD CÍM
↔ OCW RD INTA CÍM
← ICW WR RD CÍM INTA
⇩
→ HA RD + INTA
← WR
⇘ WR ← / MÁS →
⇩
G
↔ CS + INTA
← CS ⇘ G = CS + INTA
VAGY SP/EN, DE
AKKOR: ICW4-BEN
MEG KELL ADNI

MIUTÁN ICW-KET
KIADTUK, NINCS TÖBB
ICW, CSAK OCW!

OCW

MASZKREGISZTER: MELYIK BEMENET VAN LETILTVA!

ÜZEMMÓD ÁLLÍTÁS MENET KÖZBEN

OCW1

A0=1 CS=0 WR=0

MASZKREGISZTERBE
MASZKOLÓS ÍRÁSA

OUT CÍM - (ARONCCSAL

01000111
0 1 NEM TILTOTT
TILTOTT BEM.

OCW → A
A → 8259

OCW2, ÉS OCW3 2 FIX
BITBEN KÜLÖNBÖZIK (ÍGY LEHET MEGKÜLÖNBÖZ...)

OCW2 A0=0

- FORG.
- TILTÁS
- PRI MEGADÁS

PARANCSOK
- PL.: EOI (END OF INTERRUPT)
PRIORITÁSFORGATÁSSAL, VAGY
ANÉLKÜL.
ESETLEG MEGADNI, HOGY MELYIK
BEMENETET ENGEDÉLYEZZÜK ÚJRA.

SPEC / NEM SPEC

EOI - MIND A MASTERRE, MIND A SLAVE-RE IS KELL!

A0=1, CÍM → MASZKREGISZTER
ÍRÁSA (OCW1), OLVASÁSA.
A0=0 - CÍM OCW3 + MIC
MEGADJUK, HOGY OTT MI
LEGYEN OLVASÁSKOR
(MILYEN STÁTUSZINFORMÁCIÓ)
LEGYEN AZ A0 CÍMEN.

OCW3: A legkülönbözőbb státuszolvasáskor amit olvasunk. Maszk tilt/eng.

A=0

STÁTUSZOLVASÁS:

A=0

- MASZKREGISZTER (ezzel eng/tilt az egyes bemeneteket.
- OCW által jelölt
- LEGMAGASABB PRIORITÁSÚ BEMENET SORSZÁMA

SPEC. EOI PARANCS: megadjuk, hogy melyik bemenetre vonatkozik.
NEM SPEC. EOI: az aktuálisra

~~Edle ffi ....~~

DMA-VEZÉRLŐK: Ezek segítségével mozgathatók adatokat a számítógépben, közben a procit el- hallgattatják.

— DRQ

— $\overline{DACK}$

i8257 MŰKÖDÉSE

Periféria kezdeményez adatátvitelt DRQ-vezetéken. Ekkor a DMA v. — HOLT vezetéken jelez a procinak. A proci befejezi amit csinál, HOLD állapotba kerül, és ALDA-vonalon visszajelez. Ekkor a DMA v.-is visszajelez a perifériának a DACK vonalon, majd elindul az adatátvitel. Az adatmennyiséget és az irányt (MEMÓRIA) inicializáláskor adja meg a proci. Ha letelt, akkor HOLD megszűnik, HLDA, DACK is, dolgozik tovább a proci...
(TC-JELEZ A PERIFÉRIÁNAK)

ELNEVEZÉS:
HOLD — μP.
HACK – DMA

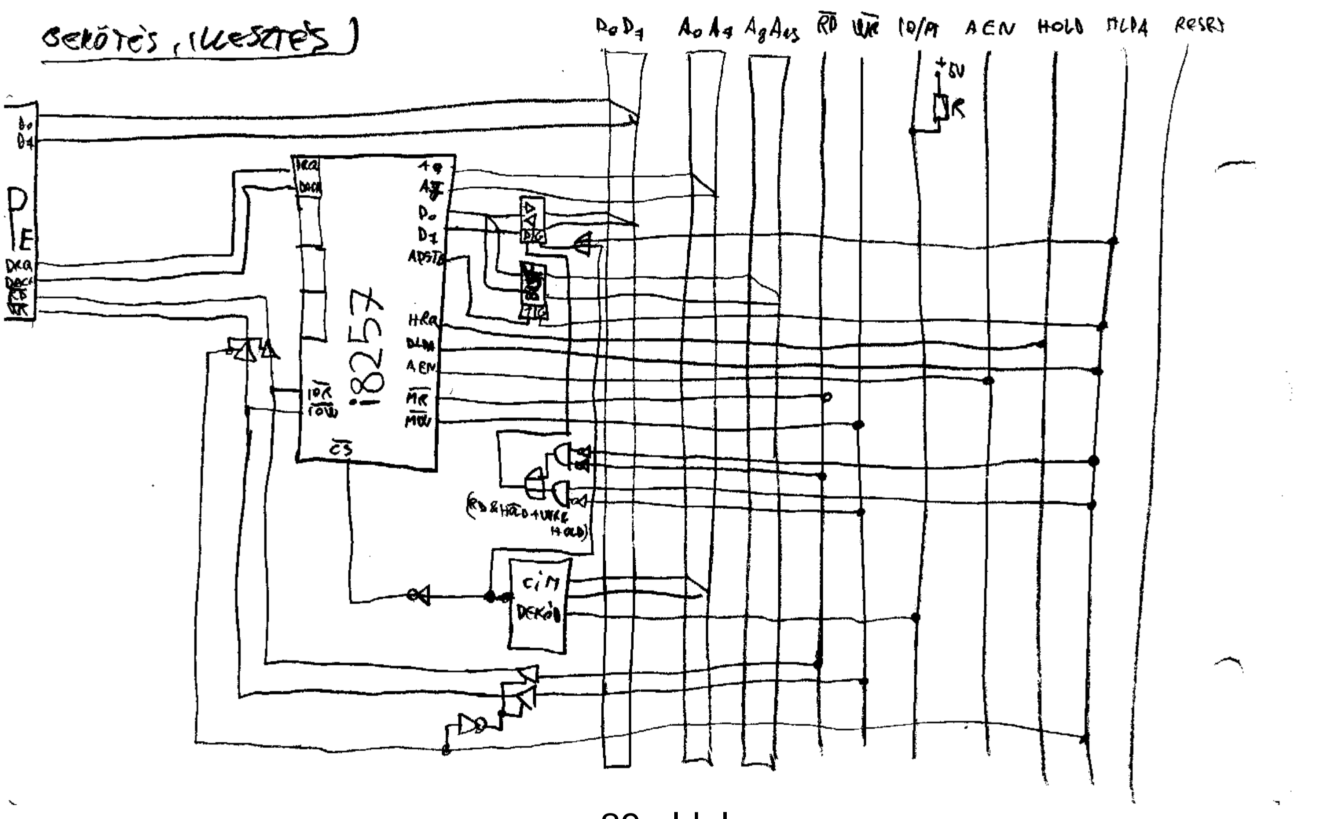
INIC: 3 DMA csatorna, mindegyikhez tartozik 2 CÍMREGISZTER, és 2 (TERMINAL COUNT) TC REGISZTER.
(CÍMREG.: HOVA/HONNAN (M) MEGY AZ ADATÁTVITEL)
TC: ÁTVIENDŐ BÁJTSZÁM. ÁTVITELKOR DEKREMENTÁLÓDIK,
MODE SET REGISTER: ÜZEMMÓD. UGYANEZEN A CÍMEN (OLVASÁSRA) STÁTUSZ REGISZTER.

TC FELSŐ 2 BITJE: ÜZEMMÓD ÉS IRÁNY AZ ADOTT CSATORNÁHOZ.
TC-BE $n-1$-ET KELL ÍRNI AZ ÁTVIENDŐ BÁJTSZÁMNAK (MERT CSAK AKKOR ÁLL LE, HA MÁR 0=TC, ÉS EZ AZ UTOLSÓ CIKLUS UTÁN LESZ CSAK

CÍMREG: KEZDŐCIM. EZ INKREMENTÁLÓDIK

MOD SET REG.:
- CSATORNÁK ENGEDÉLY/TILTÁS
- FORGATOTT PRIORITÁS ENG/TILT. (FIX)
- KITERJESZTETT ÍRÁSCIKLUS: LASSÚ PERIFÉRIÁK MEGVÁRÁSA
- TC STOP: 1 DMA CIKLUS ENGEDÉLYEZETT CSAK ha az megtörtént, akkor az a csatorna nem kap többé engedélyt, esetleg ha a proci az megadja.
- AUTOLOAD: CH3 AUTOMATIKUS INICIALIZÁLÁSA CH2-ALAPJÁN

BEKÖTÉS (ILLESZTÉS)



i8255 PR. PÁRH. I/O

- 3×8 I/O VONAL, VAGY A, B, C PORT
  2×8 + HANDSHAKING JELEK. A, B PORT
- IO VONALAK 2 CSOPORTRA VANNAK OSZTVA: [redacted]
  - A CSOPORT:
    A PORT, C PORT FELSŐ 4 BIT
  - B CSOPORT:
    A PORT, C PORT ALSÓ 4 BIT
- 3 ÜZEMMÓD: (0, 1, 2)
- 0. MÓD: 3 8BITES PORT. KIMENET BUFFERELT, BEMENET NEM. (BUFFERBE ÍRUNK, LÁBRÓL OLVASUNK) [redacted] EBBEN A MÓDBAN BIT SET/RESET PARANCCSAL A C PORT BITJEI EGYENKÉNT BEÁLLÍTHATÓAK. MEGADJUK A BIT SORSZÁMÁT, ÉS ÉRTÉKÉT
- 1. MÓD: 2DB EGYIRÁNYÚ (LATCH) (BEÁLLÍTHATÓ IRÁNY) PORT, HANDSHAKING JELEKKEL. A HS JELEKET BIT SET/RESETTEL KELL KIADNI) STÁTUSZBÓL OLVASNI) ADATBUSZ: A PORT, [redacted] HOZZÁ 4 BIT FÉL C PORT, ÉS A MÁSIK: B PORT, MÁSIK FÉL C-PORT.

INPUTKÉNT A HS JELEK:
- STB: ADAT JÖTT KÜLSŐ EGYSÉG JELZI. (STBA, STBB)
- IBF: 8255 VISSZAJELEZ, HOGY VETTE, A VISSZAJELZÉS AZ IC-BŐL VALÓ KIOLVASÁSIG TART.

OUTPUTKÉNT:
- OBF: 8255 KITETTE AZ ADATOT ADDIG TART, MÍG VISSZA NEM JELEZ A PERIFÉRIA, HOGY VETTE AZT. (OBFA, OBFB)
- ACK: PERIF. VETTE AZ ADATOT. MINDKÉT IRÁNYHOZ TARTOZIK EGY
- INTR - KIMENET:
  INPUT: ADAT JÖTT, JELEZ, AMÍG KI NEM OLVASTUK
  OUTPUT: HA A PERIF. VISSZAJELEZ AKKOR JELEZ, (1) ADDIG, AMÍG ÚJ ADATOT NEM ÍRUNK KI.
- ENABLE: INTR ENG. BEMENET.

- 2. MÓD (LATCH)
  CSAK AZ A-CSOPORT KÉTIRÁNYÚ PORT (A)
  +5 HS JEL.
  - INPUT HS. STB, IBF
  - OUTPUT HS. JELEK: OBF, ACK
  - INTR

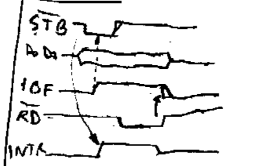
MARADNAK SZABAD PC-BITEK. EZEK IS LEHETNEK H.S. JELEK

[redacted]

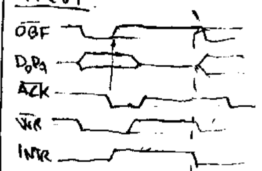
IRÁNY TESZT

JELEK:

M1, INPUT:



M1 OUT:



M2 OUT/IN → UGYANEZ

STÁTUSZ: (RD/WR)
- M1 INPUT ESETÉN:
  - INTR
  - IBF
  - INTE F-F [redacted] } A CSOP.
  - INTE
  - IBF
  - INTR } B CSOP.
- M1 OUT:
  - OBF
  - INTE
  - INTR } A CSOP.
  - INTE
  - OBF
  - INTR } B CSOP.
- M2
  - OBF
  - INTE1
  - IBF
  - INTE2
  - INTR } A CSOP.
- X } B CSOP.: STÁTUSZ ATTÓL FÜGG, AHOGY A B-CSOPORTOT MILYEN MÓDBAN HASZNÁLJUK

INTE F-F: INTR MASZKOLÓJA
EZEK A BITEK ÍRHATÓAK (C PORTRA OUT MŰVELETTEL)

PÉLDA:
(NYOMTATÓRA ADATKÜLDÉS M1 OUT)

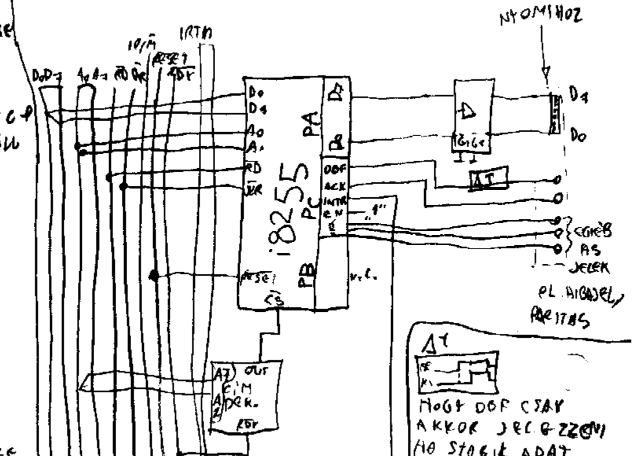
PROGRAM - ELSŐ UTASÍTÁS
- MEGSZ. SZUBRUTINBAN A TÖBBI BÁJT
KIVITELEZÉS: INKREMENTÁLNI AZ INDEXET (M. CÍM)
- HA AZ INDEX >OLER, ÉS MEGSZ. ELKEZDETT: NEM ADUNK KI ÚJ ADATOT, ÍGY AMIKOR NEM JELEZ VISSZA, NEM LESZ TÖBB MEGSZAKÍTÁS
- (ESETLEG) A SZUBRUTINBA PARITÁS KÉPZÉS, ÉS HIBAFIGYELÉST, HA HIBÁS AZ ADAT: INDEX VISSZA, ÚJRA UGYANAZT A BÁJTOT KI.

INIC: - A CSOP OUT, M1

REGISZTEREK:
4 CÍM (EZEK A0 A1 ADJÁK MEG)
- 0 - A PORT ADAT
- 1 - B PORT ADAT
- 2 - C PORT ADAT
- 3 - RD - STÁTUSZ
  - WR - D7=0: BIT SET/RESET C P.
  - D7=1: ÜZEMMÓD BEÁLL.

ÜZEMMÓD BÁJT:
- A CSOPORTRA VONATKOZÓ:
  - A PORT KI/BE
  - C FELPORT KI/BE
  - ÜZEMMÓD (2BIT)
- B CSOPORTRA:
  - B PORT IRÁNY
  - C FÉLPORT IRÁNY
  - ÜZEMMÓD: 1BIT
- D7=1

BIT SET RESET:
- 3 BIT: MELYIK C.P. BITRE VONATKOZIK
- 1 VAGY 0 LEGYEN.
- D7=0



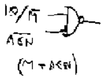
HOGY OBF CSAK AKKOR JELEZZEN, HA STABIL ADAT VAN KINT, NE VEGYEN LE HIBÁS ADATOT A NYOMT.

A DMA-hoz:

STÁTUSZ REG:
- TC-K ÁLLAPOTAI (TÖRTÉNT MÁR ÁTVITEL?)
- UPDATE FLAG: AUTOLOAD TÖRLI

BÁZISCÍM: CH0 CÍM
B+1: CH0 TC
B+2: CH1 CÍM
...
B+8: MSR/STAT

AZ IO/M JELET:



A DMA VEZÉRLŐ NEM AD IO/M JELET, AZ R fel húzza
1-re: az IO-t plusz
0-ra: - címdekódolásban le kell tiltani
IO/M HELYETT AZ: IO/M, AEN (M+AEN)
AZ IO-K MŰKÖDÉSE: TILTJA AZ AEN - TILTJA BKET
(CÍMDEKÓDOLÁSNÁL AEN IS!)

JELEK:
- READY - HA VAN HÍD. LASSÚ AKKOR RÁSZTALL, PERIF. → DMA
- HRQ (HOLD) DMA igény
- HLDA - IGENT visszajelzés, proci hozzá állapotban
- AEN - PERIF. címdekódolás, hogy ne szóljon meg a címre (CSAK HA VAN HOL MEM.)
- ADSTB - ALE: ADO-A15 BUFFER VEZÉRLÉS
- TC - lelőtt a byteszám
- MARK - lelőtt 128 BÁJT (PERIF. - NAK JELEZ)
- MEMR - RD
- MEMW - WR } kimenet, a vezérlő buszra (DMA ciklus, 3 STATE)
- IOR
- IOW } - proci ezekkel mondja, hogy mit olvasson (státusz, címeket) (BEMENET)
  - DMA ciklus alatt KIMENET, DMA - mondja, PERIFÉRIÁNAK, hogy mit csináljon.
- D0-D7 (A8-A15) MULTIPLEXELVE

i8253 IDŐZÍTŐ/SZÁMLÁLÓ

- 3 DB 16 BITES SZÁMLÁLÓ
- MINDEGYIKHEZ TARTOZIK:
  - 1 BEMENET: CLK i
  - 1 KIMENET: OUT i
  - ENG. BEMENET: GATE i (SZÁMLÁLÁS)
  - 2 ÍRHATÓ/OLVASHATÓ ADAT REGISZTER, AZONOS CÍMEN, SZEKVENCIÁLIS HOZZÁFÉRÉSSEL
- ~~[illegible]~~ LEFELÉ SZÁMLÁL
- ~~1 VEZÉRLŐ REG.~~
- 4 CÍM (ADA1 - BEVEZETVE)
  - C0 0, C0 1, C0 2 } ADAT
  - VEZÉRLŐ REGISZTER (BÁJT)
- 5 MŰKÖDÉSI MÓD
  - M0: IDŐZÍTŐ LETELTÉKOR 1-BE MEGY (MEGSZAKÍTÁSRA HASZNÁLHATÓ) ÚJRATÖLTÉSRE, MÓD PARANCSRA VISSZAMEGY 0-BA
  - M1: MON. MULTIVIBRÁTOR ILYEN, DE GATE-TEL ÚJRAINDÍTHATÓ
  - M2: FREKVENCIAOSZTÓ (FOLYAMATOS) f/i = OUT
  - M3 FREKVENCIAOSZTÓ, DE 2f/i = OUT
  - M4 kitöltéskor 1 órajelperiódusra A KIMENET 0-LESZ, EGYÉBKÉNT 1. (FOLYAMATOS IMPULZUSGENERÁTOR)
  - M5 — UGYANEZ, DE A GATE ÚJRAINDÍTJA A SZÁMLÁLÁST.

~~ÜZEMMÓD BEÁLLÍTÁSA~~

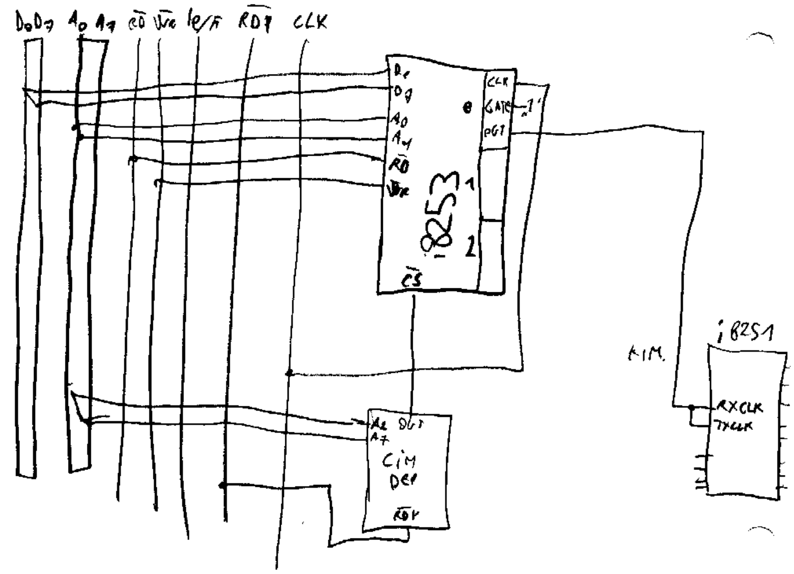
INICIALIZÁLÁS: (CONTROL WORD)

AZ ~~ÜZEMMÓDOT AZ~~.
A PARANCSOKAT AZ EGYES SZÁMLÁLÓKNAK KÜLÖN KELL KIADNI! DE AZONOS CÍMEN: A BÁJT 2 BITJE HATÁROZZA MEG, HOGY MELYIKRŐL VAN SZÓ.

TARTALMA:
- MELYIK SZÁML?
- ÜZEMMÓD
- BETÖLTÉSI, KIOLVASÁSI MÓD: (MAJD)
  - SZÁMLÁLÁS KÖZBEN ÁTMENETI REGISZTER HASZNÁLATA
  - CSAK ALSÓ BÁJT, CSAK FELSŐ BÁJT } 8 BITES SZÁML.
  - ELŐSZÖR AZ ALSÓ, MAJD A FELSŐ BÁJT
- BCD/BINÁRIS

FELHASZNÁLÁS:
- KÉSLELTETÉS
- IDŐMÉRÉS
- DARAB SZÁMLÁLÁS
- JELGENERÁTOR (PL: BAUD RATE)
- FREKVENCIAOSZTÓ

BEKÖTÉS (PL BAUD RATE)



ASIC — ALKALMAZÁSORIENTÁLT ÁRAMK.

- PLD - felhasználó programozza
- GATE ARRAY - univerzális chip-elemek, gyártó egyedileg huzalozza
- STANDARD CELL - adott elemeket lehet az IC-be választani, a gyártó teszi bele.
- FULLY CUSTOM - gyártótól lehet rendelni saját tervet alapján

- PLD:
  alkatrészek belső összeköttetései megadhatók.
  - ROM-TÍPUSÚ
  - PAL TÍPUSÚ
  - PLA
  - GAL
  - FPGA

A FOLYAMATÁBRA: → TERVEZÉSE - (IDŐDIAGRAM) → ANALÍZISE — MOORE/M., ELLENTMONDÁS

- ÁLLAPOTTÓL INDUL
- ÁLLAPOT UTÁN ELÁGAZÁS VAN (NEM FELTÉTLENÜL KÖZVETLENÜL)
- ELÁGAZÁSNÁL VAN A KIMENET - MEGADÁSA
  MOORE: ELÁG. ELŐTT
  MEALY: ELÁG. UTÁN.
- AMÍG NINCS KIMENETVÁLTÁS NINCS MEGADVA, AKKOR OTT MARAD (STABIL)
- NYILAKKAL JELÖLJÜK A KOMB: AZ AMIKOR KELL VÁLTOZNIA, AZ ADOTT IRÁNYÚ ÁLLAPOTVÁLTÁSHOZ
- TÖ KIM. VÁLT: MEGADÁSA: KÖZÖMBÖS BEJEGYZÉSEKREL

TERVEZÉSE
- IDŐDIAGRAM ALAPJÁN
- FELVESSZÜK A LEGELSŐ ÁLLAPOTOT
- HA A BEMENET VÁLTOZIK, (VAGY A KIMENETNEK KELL VÁLTOZNIA) ÚJ ÁLLAPOT
- FIGYELNI, HOGY EGY ÚJ BEVEZETENDŐ ÁLLAPOT NEM LÉTEZIK-E MÁR, HA IGEN, AZT HASZNÁLJUK (SORRENDI TERVEZÉS
- ZÁRT HUROKIG KELL FOLYTATNI.

ELLENTMONDÁS JAVÍTÁSA
ELÁGAZÁSI: MŰKÖDÉS VIZSGÁLATA (KÍVÁNT MŰK.), EZ ALAPJÁN ÁTJAVÍTANI
- KIM. ÁLL.: STRUKTÚRA MEGVÁLTOZTATÁSA PL ÁTVEZETŐ ÁLLAPOTTAL, AMI A KIMENETET VÁLTOZTATJA

ANALÍZIS
- MOORE/MEALY? - EGYSZERŰ - KIMENET HOL?
- ELLENTMONDÁSOK
  - ELÁGAZÁSI: különböző irányba különböző feltételek vezessenek.
    AHOL EGYIK SEM KÖZÖMBÖS, OTT KELL KÜLÖNBÖZNIÜK.
    PL. 0 1, 0 - 1 } NEM JÓ
  - KIMENET ÁLLÍTÁSI: TORKOLATNÁL
    A KÉT FORRÁSHOZ (ADOTT IRÁNYÁHOZ) TARTOZÓ KIMENETEK MEGEGYEZZENEK
    PL Z=1, Z=0 → n - NEM JÓ

USART i8251

JELEK:

ADAT KI — TXD
ADAT BE — RXD

RXCLK } ADATÁTVITELI
TXCLK } SEBESSÉG
ASZINKRON ESETÉN
CLK = 1X, 16X, 64X BR

[redacted]:
TXREADY: JÖHET A KÖVETKEZŐ KIVIENDŐ BÁJT A ZELŐZŐ KIMENT
MEGSZAKÍTÁST OKOZHAT
TXEMPTY: KIMENT AZ UTOLSÓ BÁJT IS, MIVEL MINDKÉT REG. ÜRES.

RXRDY: BEJÖTT EGY ÚJABB BÁJT (MEGSZ. FORRÁS)

SYNDET: (KIM/BEM) /BRKDET

- KIM: [redacted] JELEZ, HA SZINKRON KARAKTER ÉRKEZETT. (SZINKRON MÓDON) ASZINKRON MÓDBAN BREAK KARAKTER DETEKTÁLÁSÁRA JELEZ (OOH)
- BEM: (SZINKRON MÓDON): ITT MONDJUK MEG NEKI, HOGY SZIN. KAR.-ÉRKEZETT KÜLSŐ DETEKT. ÁRAMKÖR

$C/\bar{D}$: A_0 (VEZÉRL, INIC, (COMMAND INSTR.) STÁTUSZ / ADAT)

MODEM JELEK

$\overline{DSR}$: MODEM KÉSZ AZ ADATÁTVITELRE (STÁTUSZ)

$\overline{CTS}$ = 0 AKKOR LEHET ADATÁTVITEL.
MODEM ADJA. HA NINCS MODEM, AKKOR 1

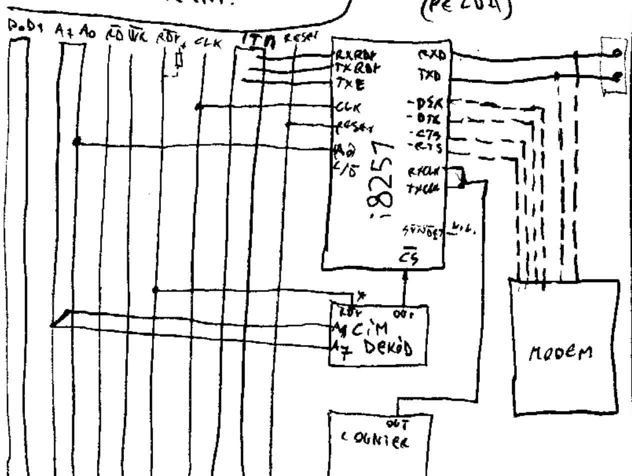
DTR: JELZÉS A MODEMNEK, HOGY AZ USART KÉSZ. (0) ADNI.
RTS: 8551 JELZI, HOGY KÉSZ ADATOT VENNI.

MŰKÖDÉS

- ADATÁRAMLÁS:
  1 VONAL + FÖLD
- 2ES BUFFERELÉS
  AZ EGYIKBE ÍRUNK, A MÁSIKBA ÁTTÖLTŐDIK, AMIKOR AZ KIÜRÜL.
  VÉTELKOR: AZ EGYIKBE JÖN AZ ADAT, HA TELJESEN BEJÖTT, AKKOR ÁTÍRÓDIK A MÁSIKBA [redacted], ÉS ONNAN OLVASHATÓ.
- FULLDUPLEX
- ADATKÜLDÉS: AZ EGYIK CÍMRE ÍRUNK, MAJD AZ KIMEGY
  ~~[illegible]~~:
- VÉTEL: MEGSZAKÍTÁSRA KI KELL OLVASNI.
- FOLYAMATOSSÁ TÉTEL: (FŐLEG ADÁSBAN) MEGSZ. HA KELL AZ ÚJABB BÁJTOT KIADNI
- 2 CÍMVAN:
  a) ADAT KI/BE
  b) MÓD INST PARANCS, STÁTUSZ
- ASZINKRON VÉTELKOR A BITIDŐ KÖZEPÉN MINTAVÉTELEZ. EZÉRT VAN CLK/16 VAGY 64 ÍGY LEHET KISZÁMÍTANI A BI. KÖZEPÉT - SZÁMÉKET MEGADHATÓ

ADATKIVITEL AKKOR KEZDŐDIK, AMIKOR ÍRUNK A BUFFERBE, INNEN A HARDVER MAGÁTÓL VÉGZI A KIVITELT
VÉTEL IS AUTOMATIKUS, HA ADAT ÉRKEZETT, AKKOR JELEZ, ÉS A BUFFERBŐL ÍS SZEREZŐL

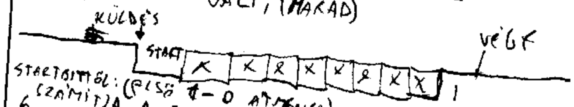
BEKÖTÉS
(PÉLDA)



ADATÁTVITEL

ASZINKRON

A VONAL ALAPBAN 1.
1 BÁJTÁTVITELE: STARTBIT + ADAT + STOPBIT (1; 1,5; 2 BIT)
EZUTÁN 1 [redacted] MARAD A VONAL A KÖVETK ÁTVITELIG.
STOPBIT ALAP 1-RŐL 0-RA VÁLT
STOPBIT 1-RE VÁLT, (MARAD)



STARTBITTŐL: (ELSŐ 1-0 ÁTMENET) (SZÁMÍTJA A BITIDŐK KÖZEPÉT.

SZINKRON:

ADDIG ISMÉTEL SZINKRONKARAKTEREKET, AMÍG NINCS ÁTVIENDŐ ADAT, MINDEN 2 ADATBÁJT KÖZÖTT VAN 1 SZINKRON KARAKTER EZT HARDVERBŐL ÉRZÉKELI.

SZ	SZ	SZ	DATA1	SZ	DATA2	SZ	DATA3	SZ	SZ	...

(3 BÁJT ÁTVITELE)

INIC + PARANCSOK

ADATFORGALOM: 2 CÍM AHOL C/D <0 VAGY 1 (A_0)
ELSŐ CÍM ADAT KI/BE EZ 2 REGISZTER DE EGY CÍMEN, MERT MINDKETTŐHÖZ CSAK 1 IRÁNYÚ ADATFORGALOM RENDELHETŐ, EGYIK ÍRÁS, A MÁSIK OLVASÁS.

2. CÍM:
- MODE INSTRUCTION (INIC) → ÜZEMMÓD
- COMMAND INSTRUCTION → PARANCS (VÁLTOZÓ)
- STÁTUSZOLVASÁS ←

MODE INSTR.:) (ÍRÁS)

RESET UTÁN AZ ELSŐ ÍRÁS ERRE A CÍMRE CSAK MODE INSTR. EZUTÁN UGYANERRE A CÍMRE TÖRTÉNŐ ÍRÁS MÁR COMMAND LESZ, MÁS REGISZTERBE KERÜL.
- ÁTVITELI SEBESSÉG 2BIT, HA 00 KÓDÚ, AKKOR SZINKRON, EGYÉBKÉNT ASZINKRON AZ ÁTVITEL.
- ADATBITEK SZÁMA
- STOPBITEK SZÁMA
- PARITÁS ENG.
- HA ENG. AKKOR MILYEN PARITÁS.

COMMAND INSTRUCTION:) (ÍRÁS)

- ENTER HUNT MODE - SZINKRONKARAKTER-FIGYELÉS ← SYNDET KIM/BEM
  ENGEDÉLYEZÉSE (NYILVÁN SZINKRON MÓDBAN)
- MODEM VEZÉRLÉS RTS ÉS DTR MEGADÁS
- KIM/BEM. ENGEDÉLYEZÉS
- HIBAJELZÉS TÖRLÉSE A STÁTUSZBÓL
- KIM 0-0A
- SZOFTVER RESET: EZ UTÁN [redacted] PARANCS UTÁN HA ERRE A CÍMRE ÍRUNK, AKKOR AZ ISMÉT MODE INSTR.-LESZ. (CSAK 1SZER, ÜZEMMÓD ~~[illegible]~~ ÚJRABEÁLLÍTÁSÁHOZ)

STÁTUSZ:) (OLVASÁS)

- JÖTT ÚJ ADAT (RXRDY) } IC LÁB
- KIVIHETŐ ÚJ ADAT (TXRDY) } IC LÁB
- DSR (MODEM KÉSZ)
- STOPBITEK SZÁMA NEM JÓ } ERROR BITEK
- ADAT FELÜLÍRT EGY MÁSIKAT } (TÖRLENDŐK STÁTUSZOLVASÁS UTÁN)
- PARITÁSHIBA }
- TX EMPTY — IC LÁB

8. fejezet

Informatika

1

TARTALOM

HARDVER
- TELJESÍTMÉNYFOKOZÓ ARCHITEKTÚRÁLIS VÁLTOZTATÁSOK
  - TÁROLÓ KEZELÉS (MEMÓRIA)
  - I/O PERIFÉRIA
  - SZOFTVER: MULTITASKING, VÉDELEM
  - 386
- MULTIPROC. RENDSZEREK
- SÍNRENDSZEREK

OP.RENDSZEREK
- SZOLGÁLTATÁSOK
  - RENDSZERHÍVÁS
  - MODULOK
  - RENDSZ. PROGRAMOK
- OP. RENDSZ. FELÉPÍTÉSE, FAJTÁI
- FOLYAMATOK KEZELÉSE
- HOLTPONT HELYZETEK

ARCHITEKTÚRÁK – NEUMANN, HARWARD

NEUMANN: az utasításokat és az adatokat azonos formában kezeljük, és tároljuk.
HARWARD: külön

SEBESSÉGNÖVELÉS (NEUMANN)
- BONYOLULT UTASÍTÁSOK (pl. FFT) minden ilyen funkció, művelet bekerülfoglalása 1 prociba nem megoldható, ezért egy rendszerbe több processzort teszek, 1 az univerzális, a többi a TÁRSPROCESSZOROK.
  (CISC – (összetett)) utasításkészletű procik.
- egyszerű utasítások: RISC ut. készlet.
  Egyszerű utasítások, és kevés féle.
  Mindegyiket 1 órajelciklus alatt. Nincs mikroprogramozott vezérlés.
  Szoftverrel valósítunk meg mindent, a gyorsítás azon alapul, hogy ritkán kell bonyolult műveleteket végezni.
  A memóriához csak írás/olvasás miatt fordulunk, most a belső regiszterekkel oldunk meg. Sok belső regiszter kell.

Utasítás átlapolás megvalósítható az egyforma hosszú utasítások miatt.

- CISC: ut. készlet.
  Bonyolult utasítások. Utasítások meghatározott része mindig ugyanazt jelenti. (pl. azonos hosszúságú műv. kód)
  Kompatibilitás mindig meglévő rendszerekkel.
  Magasszintű programok funkciók támogatása, (pl: tömbök, ...)
  Itt a műveleti kódok 4..0 címesek lehetnek:
  4..3 RITKA
  2-című: gyakoribb
  1-című a leggyakoribb.
  0.- az operandus a verem tetején van.

Címzési módok
a) 1 komponensű
  közvetlen: közvetlen cím.
  indirekt:
  - ind. mem. cím: M helyen van másik M cím
  - ind. regisztercím
  - auto increment/decrement
  - SP-en keresztül.
b) 2 komponensű
  - indexelt:
    báziscím + eltolás $\boxed{B \mid E}$
  - bázisrelatív:
    bázis reg. tartalma + címrész. $\boxed{B \mid DATA}$
  - PC relatív:
    PC + címrész $\boxed{PC \mid DATA}$

a magas szintű programok funkciók támogatása:
- spec. adattípusok kezelése
- összetett adattípusok (tömb, rekord)
- összetett címzés kezelése.
- OP. rendszer funkciók támogatása
- programmegszakítások támogatása, függvényhívás

Nagyméretű huzalozott tárolók → végrehajtási idő nő, de kevés utasítás.

végrehajtási idő csökken, de sok ut.

Társprocesszoros rendszer:
- A társproci, ami a bonyolult ut. elvégzésére van kiélezve, a rendszerbuszra csatlakozik.
- Az UNIV. proci szólítja át, aztán ha ő kész, visszajelez.
- Az utasításokat az UNIV. proci hívja le, csak 1-1 feladatot dob oda a másiknak.
- az univ. proc. vár az eredményre, vagy: folytatja a munkáját, ha a társproci számára nem kell címeket számítania, adatot adnia.
- ADATOK:
  - Adatokat UNIV adja CO.procinak, és ő a belső regisztereivel dolgozik, UNIV most is csinálhat.
  - UNIV POINTERT AD át CO.PROCINAK, ilyenkor CO.PROCI is használja a RAMOT.
  UNIV: - van
  - több utas. memória van: nem vár.
  - Bizt. memóriaterület kap CO. PROCI, felváltva férnek hozzá a RAMhoz

MEMÓRIA SZERVEZÉS:
MÓDSZEREK:
- TÖMBKAPCSOLÁS (1)
- INDEXELT leképzés (2)
- virtuális tárkezelés (3)

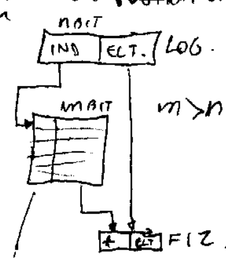
1. TÖMBKAPCSOLÁS:
- A memóriát független tömbökre osztjuk
- Egyszerre csak 1 tömbhöz férhet hozzá a proci, + a nemkapcsolt memóriához.
- A TÖMBKIVÁLASZTÓ LOGIKÁnak megadjuk először, hogy (pl. ...) melyik tömbbel akarunk kezdeni, aztán jöhet az adatmozgatás.
- a NEMKAPCSOLT logika mindig azonnal elérhető. (FONTOS RUTINOK)
- a proci NEM TUD egyszerre elég nagy címet kiadni.
- ha a RAMoknak van több címbemenete, akkor lehet egy címrészt regiszter, amibe a NP írja, viszont az adja a RAMOK felső címbitjeit.

2. INDEXELT LEKÉPEZÉS:

- a proci nem tud elég címbitet kiadni.
- a kiadott LOGIKAI cím 2 részből áll:

index	ELTOLÁS

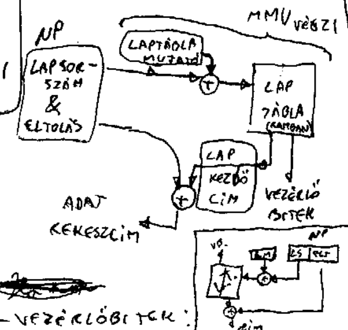
- az index alapján egy indextömbből ~~[illegible]~~ behelyettesítünk egy kódot az index helyére. Ez többlet bites
- Így egyszerre nem érhető el az egész tartomány, ahhoz át kell írni az index tömböt.
- így lesz a ~~[illegible]~~ FIZIKAI cím



- Vezérlő BITEK: melyik ~~[illegible]~~ TASK-hoz tartozik az adott INDEXŰ rész, az adott LAP.
- az index LAPOKRA osztja a RAM-ot.
- 2 taszkhoz is hozzárendelhető ugyanaz ~~a~~ LAP, így kommunikálhatnak egymással
- egyszerű, gyors többlet hardver, de az mostani is kell

3. VIRTUÁLIS TÁRKEZELÉS

- a proc. teljes címzési tartománya 1 VINYÓ területet (LOGIKAI) (VIRTUÁLIS) jelent, aminek 1 része lehet van a RAM-ban. (FIZIKAI) ~~[illegible]~~
- szükség van adatmozgatásra a VINYÓ ↔ RAM között, de ezt az OP. rendszer végzi, és a HARDER.
- a hardver része az MMU, memóriakezelő egység.
- az MMU nyilvántartja, hogy az adott információ a vinyón van, vagy a RAMban.
- a ~~[illegible]~~ CPU által kiadott VIRTUÁLIS címet RAM címmé alakítja ha a RAMBAN van. DE HANEM: akkor kérdeményezi a behozatalt, majd ~~[illegible]~~ RAM-CÍMMÉ alakítja.
- az is LAP-szervezéssel dolgozik. VINYÓ ↔ RAM mozgatáskor EGÉSZ lapokat mozgat.
- a LAPOK mérete azonos
- a RAMban van egy: LAPTÁBLA: ami a ~~L~~ LAPCÍM meghatározáshoz, (és adatok is) kell.
- ADATELÉRÉS, HA benn van a RAMBAN:



- VEZÉRLŐBITEK: hozzáférési jogok
  - BENT VAN / KINT VAN
  - VINYÓCÍM

  minden LAPHOZ tartozik 1.
- ha kint van: (ELÉRÉS) MMU megkeresi a vezérlőbitek alapján a vinyón, az OP. rendszerrel behozatja. utána a leírtak szerint folytatódik. Ez ugyanaz mint ha bent van, csak itt a LAPTÁBLA elérése után egy LAP-behozatal van.
- BEHOZATAL: ha behozunk valamit, akkor ki is kell vinni valamit. MIT? ~~[illegible]~~ valami régit. ha azt nem módosítottuk (a vezérlőbitekben látszik) akkor nem kell kimásolni a vinyóra. Ilyenkor a LAP-TÁBLÁT IS MÓDOSÍTANI KELL!
- mindig kell 1 + ciklus: a LAPTÁBLA-elérés.
- GYORSÍTÁS: az a +1 elkerülhető bizonyos esetekben: a PROCIBAN kell egy ASSZOCIATÍV MEMÓRIA, benne a LAPTÁBLA 1 része. Egyszerre keresünk mindenhol benne. ha itt van, akkor a keresést a laptáblában leállítjuk, (megnyerjük az 1+ SZÓT) és a már meglévő eredmény alapján algoritmusunk tovább.
- Ha a RAM-ban nem fér el a laptábla: egy részét vinyón kell tartani: lassulás. az van bent, ami a RAM-ban bent lévő adatokra vonatkozik
- Ha LAPOT kell ~~[illegible]~~ BEHOZNI: az a LAPHIBA
- a lapméretet célszerű nagyra választani.
- a LAPVÁLTÁSRA TÖBB STRATÉGIA VAN

LAPVÁLTÁSI STRATÉGIÁK:

új lap behozása:
- igény szerint
- előretekintve (ha egy kódot tartalmazó lapot használunk, akkor valószínű, hogy a következő is kelleni fog.)

Egyszerre több lapot hozunk be. Ilyenkor 1 régit ki kell vinni (ÁLDOZAT) (ha nem írtunk bele akkor nem)

MÓDSZEREK:

1. OPTIMÁLIS HELYETTESÍTÉS: Azt a lapot cseréljük le, amelyet a legkésőbb fogunk használni. Ezt viszont csak találgatni lehet.
2. FIFO: A legrégebben ~~[illegible]~~ bentlévőt cseréljük le. lehet, hogy pont azt akarjuk használni
3. LRU: legrégebben használtat cseréljük. Ennek több változata is van. Minden laptáblabejegyzéshez tartozik 1 használati időt jelző számláló, ami behozáskor törlődik. Hivatkozáskor az értékét növeljük. A legkisebb számláló-értékűt ~~[illegible]~~ cseréljük. Vagy az azonosítókat STACK-be tesszük (FIFO) A STACK tetejére tesszük az éppen használtat. az alsó az ÁLDOZAT. Ennek módszerek:
   - a) ~~[illegible]~~ Számláló helyett 1 jelzőbitet használunk. így csak 2 csoport lesz: viszonylag régiek és új-ak. MMU betöltéskor törli, időnként mindet 1-be. használatkor is törli.
   - b) second chance: FIFO. ha az elsőben a jelzőbit 0: lecseréljük. ha 1 - akkor 0 ba, és nem cseréljük. 2 - módszer: jelzőbit és FIFO

[L] c) SHIFT-regiszter referenciabit + 1 léptetőregiszter minden lapkerethez.

A referenciabitet időnként beléptetjük a regiszterbe, és a bitet töröljük. A regiszterek tartalma: 1 szám. Ez alapján választunk áldozatot. Szerre hozzáadást közben a bitet 1-be állítjuk.

A felvés csak a beérkezésre: LAPKERETEKRE

- Egy processz akkor van egyensúlyban, ha neki a tényleges futásideje nagyobb, mint a laphibáinak a kezelési ideje.
- Lapkeret: RAM-hely, ahova 1 lapot be lehet tölteni.
- Lapkeret allokáció:
  LOKÁLIS: fix keretszám minden folyamatnak
  GLOBÁLIS: dinamikus allokáció 1 közös halmazból prédálhatnak kereteket a folyamatok.
- másképp: (módszerek)
  EGYENLETES: egyenlő lapszám mindenkinek
  PROPORCIONÁLIS: virtuális memóriaigénnyel arányos lapkeret-kiosztás, vagy prioritás alapján.
- VERGŐDÉS: túl sok idő megy el a laphibák kezelésével
  Elkerülése megfelelő LAPkeret-allokációval.
  • ~~[illegible]~~ egy kis időintervallumban hivatkozott lapok száma alapján elosztani.
  • időegység alatti laphibák száma alapján.
  • Előrelapozás: előre több lapot töltünk be.
  • LAPVÁLTÁS TILTÁSA, ZÁRLÉS

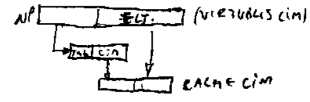
CACHE

- Ram és proci közé kis kapacitású gyors memóriát teszünk
- Ram bizonyos részeit (lapjait) tárolja. (másolat) Ezeket a másolatokat megjelöljük az eredeti RAM-címmel (TAG)
- van egy jelölőmező.
- CÍMÖSSZEHASONLÍTÁS: táblázat alapján.
- ha a proci akar valamit a RAM-mal, akkor megnézi, hogy nincs-e a CACHE-ben. ezt a jelölőmezőben nézi.
- Ha nincs benne, akkor behozza az egész BLOKKOT.
- a blokkméret < LAPMÉRET.
- nagyobb a hibaarány.
- OLVASÁS: csak akkor történik adatátvitel
- ÍRÁS: egyszerre a CACHE-be, és a RAMBA ~~[illegible]~~ nincs blokkmozgatás.
- külön CACHE az utasításoknak és az adatoknak.
  az utasításoknál kevesebb a laphiba,
  Az adat írás/olvasás átlapolható az utasítás-lehívással.
- Bonyolultabb esetben: a beérkezés ellenőrzése ASSZOCIATÍV memóriával.
- BLOKKVÁLTÁS, felosztás:
  1.) FIFO stack: a használt (ASSZOC. LEK.) blokkot a STACK tetejére. is az újat is.
  A jelölő lehet a virtuális cím is, így címfordítás nem kell.
  a DMA működés közben lehet a CACHE-sel dolgozni.
  2) KÖZVETLEN LEKÉPZÉS
  a RAMOT egyforma méretű MEZŐkre osztjuk. minden mező ~~[illegible]~~ mérete = a CACHE-mérettel.
  így 1 blokk csak adott sorszámú helyre mehet be. így ~~[illegible]~~ egyszerűbb áramkörök, és olcsóbb.
  Másik:
  ~~[illegible]~~ asszociatív: KÉTUTAS
  2 CACHE-van. (hogy több) és 1 blokkot a 2 ~~[illegible]~~ bármelyikébe be lehet tenni, de csak adott helyre
  A keresés egyszerre mindkét modulban.
  Oda tölti az újat, ahol a bentlakót régebben ~~[illegible]~~ használtuk.

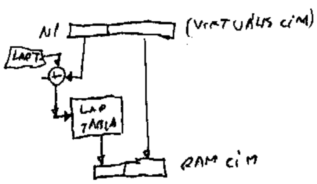
BEHOZÁS:
- igény esetén
- előre – de a következőt is behozzuk.

Mos:
- legrégebben használt
- legrégebben bentlévő
- RANDOM

CÍMZÉS: - HA CACHE-BAN VAN (VAN ILYEN TAG)
~~[illegible]~~ CÍM:



- HA NINCS A CACHE BEN

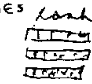


- HA MÉG A RAMBAN SINCS:
  LAPTÁBLÁBAN NINCS: BEHOZÁS, MÁSD FOLYTAT. (KELL ÁTMENETI TÁROLÁS) LAPTÁBLA ALAPJÁN VINRÓCIM

PÁRHUZAMOSÍTÁS:

- felosztani az utasítás-végrehajtásokat fázisokra (minél többre) úgy, hogy ezek a fázisok más erőforrást használjanak, és önállóak legyenek.
- így különböző utasítások különböző fázisait egy időben lehet elvégezni.

MEGOLDÁSOK: (ELŐ A RAMNÁL)
• UTASÍTÁSLEHÍVÁS, és végrehajtás átlapolása (P/L)
• PIPE-LINE (teljes): végrehajtást is fázisokra osztjuk. (ha hosszú a végrehajtás)
• TELJES különválasztás

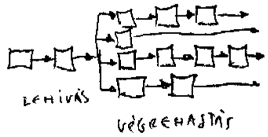


(különböző végrehajtási fázisok között)

PIPELINE:
- Lassító, gátló hatások:
  • feldolgozási egymásrahatás: 2 fázis ugyanazt az erőforrást akarja használni. (VÁRAKOZÁS)
  • procedurális egymásrahatás: elágazásoknál: már betöltöttük a következő utasításokat, de ugrás miatt ~~[illegible]~~ nincs rájuk szükség.
  • adategymásrahatás: 1ik utasítás az előtte lévő utasítás adatát, eredményét igényli.
  • ~~különböző~~ hosszú ~~[illegible]~~ utasításvégrehajtások. ezeket lehet egyenlíteni: UTASÍTÁSLEHÍVÓ ÉS VÉGREHAJTÓ EGYSÉG KÖZÉ EGY FIFO STACK
  mindkét egységnél az átlagos végrehajtás/IDŐ =.

  • AZ UT. lehívó nem tud folyamatosan hozzáférni a RAM-hoz, ezért ő elé is kell EGY FIFO.

• A különböző típusú utasítások végrehajtási ideje különböző.
Ezért külön pipeline kell a végrehajtásukhoz.



A sorrendet nyomon kell követni

EGYMÁSRAHATÁSOK KIVÉDÉSE:

1.) FELDOLGOZÁSI:
a) WAIT-CIKLUSOK kellenek (FÁZISOK)
b) KÉSLELTETETT LOAD:
NOP utasítások. Ezeket a fordító progi teszi oda.

2.) ELÁGAZÁSOK (procedurális)
a) ha rájön, hogy ugrás lesz, (2. FÁZIS) akkor nem hív le semmit, csak ha kiderül a cím.
b) a következőt ezért hatalti, hátha nem lesz ugrás (FREEZING)
c) 2 pipe-line mindkét eshetőségre VAN/NINCS UGR. egyikbe tölti be sorban másikba: mar elkezdi a cél lehívását.
Az egyik törlődik, amikor kiderül hogy lesz-e ugrás. Lehet sok ugró út, ahhoz sok PIPELINE kellene. ez nem jó.
d) ugrás előrejelzés statisztikával.
Lehívja a valószínű utat, de nem hajtja végre, amikor kiderül az út, akkor:
ha ugrás nincs: folytatja
van: ugrik.
Ez kb. 90% az új procikhál.

A cél: ha még nincs ugrás, akkor ne üres PIPE-LINNAL menjünk tovább.

3.) ADATEGYMÁSRAHATÁS:
- írás utáni olvasás (régit olv.)
- olv. utáni írás. előbb ír
- írás utáni írás: 1. írás utáni állapot marad. 2. nem ér.

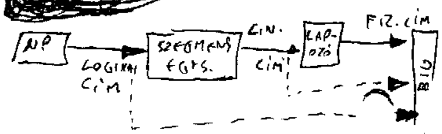
(Ezek a hazárdok)

Kivédés:
a) jelzőbites tech.
erőforráshoz jelzőbit: foglalt. ut. dekódoláskor állítódik be. (akkor még ocsmos légrészeniak az utasítások. nem vérzei) végrehajtáskor: ha szabad.
b) adat előrehozás:
előző művelet eredményét nem csak kiírjuk, hanem továbbítjuk a köv. utasításnak.

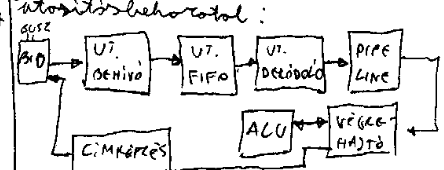
MULTITASKING:
- időszeletek a taszkokhoz.
- ha ez lejár, akkor mindent el kell menteni a hozzá tartozó adatstruktúrába, STACK-be. összes proci regisztert
- minden task úgy látja, hogy csak az övé a proc.
- taszkváltást az op. rendszer végzi.
- ütemezés: hosszútávú, középtávú, rövidtávú.
- Rövidtávú:
Processzorválasztás:
prioritásfüggvény alapján minden processz prioritását meghatározza.
A legnagyobb prioritású kapja meg a procit.
Ha azonos prioritásúak között kell dönteni:
ARBITRÁLÁSI szabályok alapján megy:
• véletlenszerű választás
• először jött → először kap (sorbaállás).
• legközelebb a most kiválasztott utániakat.
- döntés: • preemptív:
aktív processz futását op. rendszer felfüggesztheti.
mert: magasabb prioritású processz jött, vagy időlimit lejárt.
1 másik folyamat prioritása megnő.
• nem preemptív:
időszelet lejárta után ~~[illegible]~~ váltja fel egy másik folyamat az előzőt.
pl: számláló + megszakítás.

védelem:
- típusellenőrzés
kódot kódként, adatot adatként értelmezünk-e?
- határellenőrzés: területtúllépés
- privilégium szint:
OS, kernel, felhasználói
- lapozás
- STACK
BŐVEBBEN A 386-NÁL

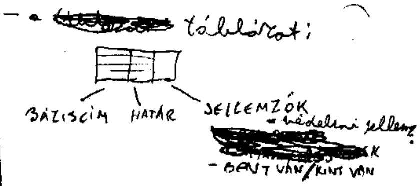
i386:
- tulajdonságai:
MAX 4GIGA fizikai c, 64T logikai címtartomány.
4MIPS
virtuális tárkezelés
nincs CACHE
32 BITES
• CÍMZÉS



• lineáris
• szegmentált. 1 BÁJT-4G.
Lehet külön kód és adatszegmens, ez is egy védelmi lehetőség.
A címet a BUSZ ILLESZTŐ (BIU) EGYSÉGEN keresztül adja ki.
utasításbehozatal:

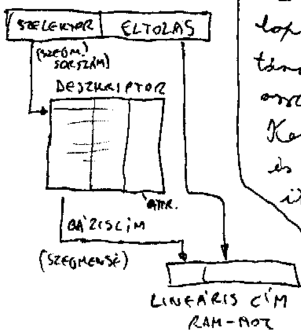


- A cím alsó 2 bitje dekódolva jön ki. Így, mivel 32 BITES, külön el lehet érni 1 BÁJT széles adatokat.
- regiszterek:
A 8086 16 BITES regisztereit kibővítve. Elérhető az alsó 16 BIT, vagy az egész.
• AKKU
• EGYÉB SEGÉD
• INDEXREGISZTEREK (FORRÁS ÉS CÉL)
• BÁZIS POINTER
• SP
• PC
• szegmensregiszter
- Szegmensregiszterek:
Szelektorok 1 index táblázatra.
Ez a táblázat • DESZKRIPTOR
- CODE SEGMENT
- STACK
- DATA 1..4
- • táblázat:



3

Szegmentált címzés:
(Ezmiatt van virtuális címzés)
LOGIKAI CÍM NP-BÓL



a szelektor:
SORSZÁM · egyéb info.

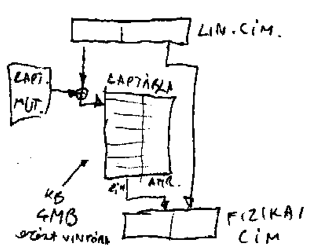
„egyéb info":
- prioritási szint
- 1 TASZK / TÖBB TASZK használja.

DESZKRIPTOR attribútumok:
- használták-e az illető szegmenst
- R ONLY / R&W
- KÓDSZEGMENS / NEM
- VINYÓN / RAMBAN
- VÉGREHAJTHATÓ / OLVASHATÓ IS
- PRIVILEGIZÁLÁSI SZINT:
  - KERNEL
  - BIOS
  - OS (DRIVER)
  - FELHASZNÁLÓ

TEHÁT:
- VÉDELEM
- JOGOK
- ADATTÍPUS

SZEGMENSEK LAPOKBÓL ÁLLNAK.

– LAPOZÁS:
A (fenti) LINEÁRIS CÍM tovább feldolgozható, ha virtuális tárkezelést alkalmazunk:



A CÍMRÉSZ:
- LAPTÁBLA KÖNYVTÁRCÍM, és
- LAPCÍM

A könyvtárcím egy táblázatból a taszk sorszámával együtt megkapjuk egy könyvtárat. Ebben ebben keressük a LAPCÍMET.

A könyvtártáblázat a RAM-ban van. A könyvtárat be kell helyezni.

– FORDÍTÁSI SEGÉDBUFFER: (TBL)
A lapkikeresés túl lassú (könyvtár a laptábla...) ezért a 32 leggyakrabbi lap adatait egy táblázatban tárolják (TBL tábla). Ez egy asszociatív memória (gyors). Keresés: egyszerre ebben, és a laptáblákban, de ha itt benne van, akkor nem kell végigbogarászni a sok táblázatot, mert egyből adja a CÍMET.

– van 1 néhány segítség az op. rendszer számára:
- globális táblázatban
- LOKÁLIS –"–
- task running

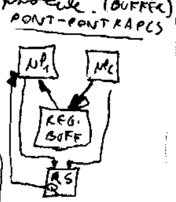
VÉDELEM:
– típusellenőrzés
  KÓD, ADAT STACK
– határellenőrzés
– Privilég. szint
  SZEGMENSLEÍRÓ
  LAPTÁBLA
  ILL. PRI. SZINT
  } ALAPJÁN
– STACK ellenőrzés:
  Minden taszknak 4 szegmens
– KÓD
  vezérlésátadás:
  kisebb a nagyobbat ne hívja meg.
  Másik irányba:
  - nincs
  - prioritás megemelhető CALL kapuval

MULTIPROCESSZOROS RENDSZEREK:

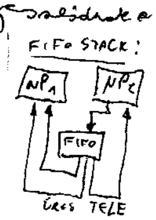
– taszkokat szétosztjuk az egyes procik között. Így ezek párhuzamosan futhatnak.
– Ez a felosztás
  - statikus: adott taszkot előre elrendeljük a proci-hoz.
    (egyszerű, egyszerű op. rendszer, ha 1 proci kiesik, akkor nem jó)
  - dinamikus:
    általános célú proc. 1 kiesik, a többi átveszi a helyét

● NP-k közötti kapcsolat szerinti felosztás
- LAZÁN CSATOLT: üzeneteken keresztül kapcsolódnak a procik. (BUFFER)

PONT-PONT KAPCS.

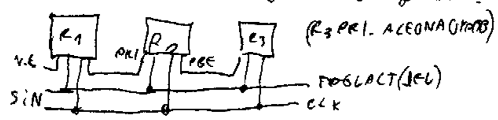


FIFO STACK:

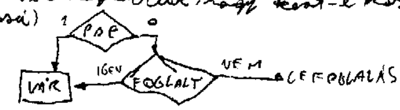


- SZOROSAN CSATOLT
Közös memória van, erre kapcsolat. Busz interfészen keresztül osztozkodnak a RENDSZERBUSZON. (a memórián is.)
A sorbarendezés lehet:

a) SOROS. Többmaster van. a szinkronizációhoz a kiválasztás: ... érkezési sorrend szerint (PIC, I²C) vagy prioritássorban. ilyenkor pri. bemenete, és kimenete van minden egységnek, így vannak láncba fűzve.

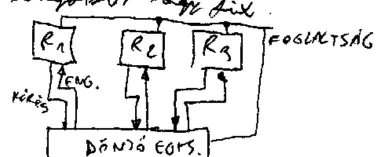


A prioritáseldöntés:
Ütem kezdetén nem kért a zenki.
A kéréseket felírjuk, vesszük a CLK periódust, ahány elem van benne. Azután megnézzük, hogy kért-e más is.
(lassú)



Ez a DAISY-CHAIN technika.
Nem az adat a soros, hanem a hozzáférés elbírálása.

b) PÁRHUZAMOS
Van 1 prioritás eldöntő egység. Ettől kell kérni, és ez ad engedélyt.
Ez figyeli: hogy foglalt-e, és hogy az egyszerre jövők prioritása.
vagy nem prioritássorban:
időosztással. Ha pri. akkor lehet forgatott, vagy fix.



A BUSZ elengedése:
- csak kérésre: a legnagyobb prioritású használja folyton. Tőle lehet elkérni.
- befejezéskor.
- prioritás szerint (PREEMPTÍV):
  R. használja éppen. Ha olyan fázisban van hogy megszakítható, és éppen egy nagyobb prioritású kéri, akkor annak ő átadja a BUSZT.

Fogalmak:
- Kritikus adatok: összetartozóak. Csak együtt érvényesek.
- konkurens folyamatok: azonos erőforrást akarnak használni egyszerre.
- oszthatatlan művelet.

BUSZRENDSZEREK

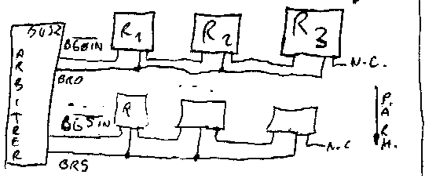
- mechanikai, elektromos, és logikai szabványok összessége.
- kommunikációs út a rendszer elemei között.
- részei: adatút, protokoll, vezérlés (INTERFÉSZ)
- lehetnek
  - KIZÁRÓLAGOSAK (2 elem között FIX)
  - közös használatúak
- LEHET:
  - SOROS (RS232 I2C SPI)
  - PÁRHUZAMOS (VME)
- hierarchia szerint:
  - rendszerbusz
  - kártolék busz
- Használati jog szerint:
  - dedikált: külön utasítás-busz, adatbusz, IO BUSZ.
  - közös
- funkcionális szétosztottság szerint:
  - erőforrásonként osztott, a gép. külön HP, RAM, IO...
  - funkciónként: külön rendszer a digitalizálásnak, a videókártyának (multiprocesszoros rendszerek)

- Használata:

TRANZAKCIÓ lépései:
- BUSZKÉRELEM
- ARBITRÁCIÓ (LEFOGLALÁS)
- CÍMZÉS, KIVÁLASZTÁS
- ADATÁTVITEL
- ELLENŐRZÉS
- ELENGEDÉS

VME-SÍNRENDSZER:

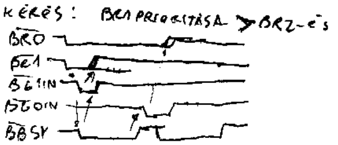
- 8/16BIT ADAT, 8/16/32 CÍM
- ALSÍNEK:
  - DTB-adatsín
  - megszakítási busz (prioritásos)
  - szolgáltató busz
  - arbitrációs busz
- AZ ARBITRÁCIÓ: (ASÍN) SOROS



- JELEI:
  BRn kérés
  BGnIN elfogadójel.

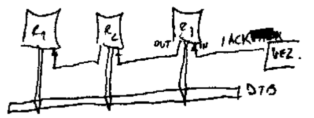
MÁS JELEK:
BBSY - BUSZ BUSY
BCLR - BUSZ ELVÉTEL (jelzés modulnak)

- A KÉRÉS: BR PRIORITÁSA > BR2-es



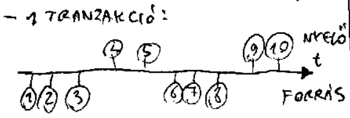
- MEGSZAKÍTÁS MEGSZ. SÍNEN JELEZ.

Elfogadáskor:
- DTB-re rakják az elfogadott kódját
- IACK-vonalon a jelzés
- MÁSIK kiválasztja a vektorcímmel a DTB-n.



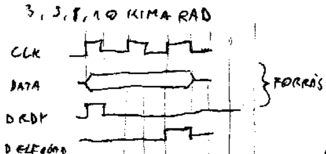
BUSZ PROTOKOLLOK:

- szinkron (órajelre) (lassú)
- aszinkron (kézfogásos)
- részben szinkron: aszinkron, de van egy gyors ütemező szinkronjel
- 1 TRANZAKCIÓ:

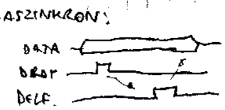


1. ADAT A BUSZRA
2. JEL STABILIZÁLÓDIK
3. ADAT KÉSZ
4. Le felismerte
5. ELVETTEM AZ ADATOT
6. LE FELISMERTE
7. ADAT LEVÉTELE MÁR LEVEHETED
8. VETTEM, ADOK VETTED
9. FELISMERÉS
10. NYUGTÁZÁS + BEZÁRÁS

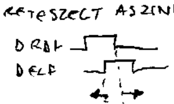
- SZINKRON:
  3, 5, 8, 10 KIMARAD



- ASZINKRON:



- RETESZELT ASZINKRON



- TTP IDŐTRIGGERELT MÓD
  DIZONTOS IDŐSZELETBEN AZ ENGEDÉLYEZETT EGYSÉG BÁRMIT CSINÁLHAT
- FAIL SAFE (HIBATŰRŐ RENDSZER)
  VANNAK EGY RENDSZEREK, amik az elsődleges helyzet hiba esetén átvehetik

VME-SÍNEN BELÜL ALRENDSZER SÍNE a VMX-sín.
pl. kártyán belül.
- VME párhuzamos, VMS-soros sín (kártolék)
- ILYEN AZ SCSI sín is.
- ARBITRÁCIÓ:
  - STATIKUS (IDŐSZELET)
  - DINAMIKUS
- SOK MINDEN A MULTIPROC. rendszernél UGYANEZ.

I/O ESZKÖZÖK (PERIFÉRIÁK)

- IO KEZELÉS
  - ESZKÖZSZINTŰ

A proci közvetlenül a perifériával kommunikál.
Közösen használnak egy buffert.

a) feltétlen alapú kommunikáció
1SZ ff-et a periféria beállít, a proci törli miután elvette az adatot

b) kézfogásos (HANDSHAKING)
amíg a proci „vár" addig tud mást csinálni.

- LOGIKAI KEZELÉS

A proci nem a perifériával kommunikál közvetlenül, hanem egy interfészen keresztül: (ezek neve: I/O PROCI vagy CSATORNA)
Rögzített feladatú modulok bonyolítják a tranzakciókat. Ezek intelligens, programozható eszközök.
Ezeket a proci PARANCSokkal vezérli, és ezek autonóm módon működnek.

a) I/O PROCI: A programja a memóriában van, az UNIV. proci teszi oda, multiproc. rendszer.

b) CSATORNA:
1. SZELEKTOR: A kiválasztott periféria folyamatosan használja amíg kell.
2. MULTIPLEXOR: több lassú periféria felváltva használja, ezek adataiból blokkokat képez, ezeket írja ki/be a RAM-ból/ba.

Tehát: CSATORNA: egyszerű I/O műveletek,
I/O PROCI: min. adatfeldolgozás.

SCSI-SÍN: (perifériasín-típus)

- 1 vagy több számítógép vezérelheti prioritásosan
- 8 perifériavezérlő csatl. maximum.
- mindegyikhez max 8 periféria.
- különálló parancsokat végrik:
  - I/O MŰVELET megadása
  - adott periféria kezelése
  - gyártóspecifikus (adott típus ker.)

HÁTTÉRTÁRAK

- mágnesség kör alakú (lemez) használatra
- koncentrikus sávok.
- ezeken belül szektorok. (blokkos adattároláshoz)
- Sorosan rögzítjük. lassú hozzáférési idő, gyorsabb olvasás. Gyorsabb BLOKK
- ÍRÓ/OLVASÓ fej a mágnesezés VÁLTÁST érzi.
- Szektorok között üres helyek
  Szektorok kezdetét valamilyen jelzés jelzi.

4

Op. rendszerek:

- Feladata: a felhasználó felé olyan (VIRTUÁLIS) számítógépet mutat, amiek a szolgáltatásaihoz kényelmesebben lehet hozzáférni.
- A szolgáltatások:
  - felhasználói szinten
  - felhasználói program szinten
- A felhasználói programok RENDSZERHÍVÁSOKKAL érhetik el a szolgáltatásokat.
- A rendszerhívások:
  - ASSEMBLY nyelven külön utasításokkal
  - magasabb szintű nyelveken eljárásokkal.

  érhetők el.
- A rendszerhívás lépései:
  1. paraméterek átadása
  2. USER MÓD → SUPERVISOR MÓD váltás
  (3. paraméterek másolása)
  4. végrehajtás
  5. vissza paraméterek, vagy hibakód
  6. visszatérés (vezérlésátadás)
- SZOLGÁLTATÁSOK:
  1. folyamatok vezérlése
  2. memóriakezelés
  3. file - kezelés
  4. periféria kezelés
  5. rendszerinformációk biztosítása
  6. hálózat kommunikáció biztosítása
- Rendszermodulok
  A fentiek kívül:
  7. védelmi mechanizmusok (CPU, I/O, MEMÓRIA)
- Rendszerprogramok:
  Ezek sima felhasználói programok:
  fajtái:
  - PARANCSSOR
  - GRAFIKUS PARANCS ÉRTELMEZŐ

Op. rendszerek fajtái

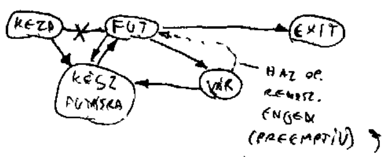
1. MONOLITIKUS
   Az op. rendszer rész-feladatokat megoldó eljárások halmaza. Nem alkotnak struktúrát
2. RÉTEGES rendsz.:

   6 RENDSZER OPERÁTOR
   5 FELHASZNÁLÓI PROG.
   4 I/O MANAGEMENT
   3 VIRTUÁLIS OPERÁTOR KONZOL M.
   2 VIRTUÁLIS MEMÓRIA M.
   1 CPU ALLOKÁCIÓ
   0 HARDVER

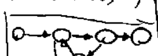
3. PROCESSZ ORIENTÁLT
   2 része van:
   a) KERNEL (magában minden)
   b) RENDSZERPROCESSZEK:
   (I/O, MEMÓRIA, file-kezelés)
4. VIRTUÁLIS GÉPEKRE ALAPOZOTT:
   Minden taszk részére 1 saját virtuális gépet biztosít a rendszer. Ezt a MONITOR-PROGRAM végzi.

FOLYAMATOK

- FOLYAMAT: 1 futó program (TASK, JOB)
- TÖBB FOLYAMAT FUTHAT PÁRHUZAMOSAN. (MULTIPROGRAMOZOTT RENDSZER) A DOS NEM ILYEN
- FOLYAMATOK ÁLLAPOTAI:



- állapotátmenetek:



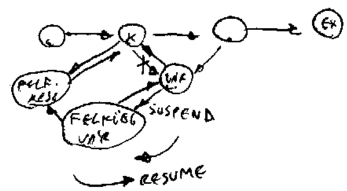
1. KEZD → KÉSZ
   OK: folyamat létrehozása
   tevékenység:
   - BETÖLTÉS (PROG → FOLYAMAT)
   - ... TASK MANAGER
   - ERŐFORRÁS HOZZÁRENDELÉS
2. FUT → EXIT
   OK:
   - utolsó utasítás végrehajtása
   - hiba

   tevékenység:
   - erőforrás felszabadítása
   - folyamat-táblázat-bejegyzés eltávolítása
3. FUT → VÁR
   OK:
   - lassú periféria
   - foglalt erőforrás

   tev:
   - környezet elmentése
   - SORKEZELÉS
4. VÁR → KÉSZ
   OK: akadály megszűnése
   TEV: SORKEZELÉS
5. FUT → KÉSZ
   OK: LEMONDÁS
   - ÖNKÉNT (YIELD PARANCS)
   - ERŐSZAKKAL

   TEV:
   - környezet mentése
   - sorkezelés
6. KÉSZ → FUT
   OK: ő kerül sorra (a várakozók közül neki a legnagyobb a prioritása)
   TEV:
   - sorkezelés
   - környezet visszaállítása

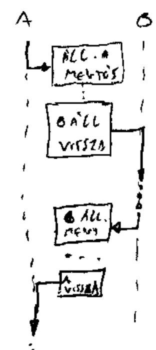
FELFÜGGESZTÉS:



+ MÉG AZ ÖSSZESBŐL AZ EXITBE: ABORTÁLÁS

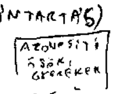
FOLYAMATOK KEZELÉSE

a) környezetváltás



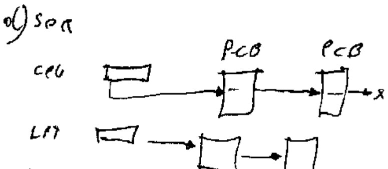
b) KÖRNYEZET
- használt reg.
- kód
- adatok, stack
- virtuális gép állapota
- I/O INFO ERŐFORRÁS.
- rendszerinfo
- újraindításhoz szükséges INFO

c) FOLYAMATLEÍRÓ TÁBLÁZAT: (NYILVÁNTARTÁS)

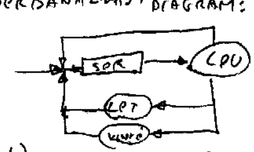


PCB

d) SOR



e) SORBANÁLLÁSI DIAGRAM:



f) ESEMÉNYVEZÉRLÉS
   esemény: IT
   - HW
   - SW
   - HIBA

OPRENDSZEREK

PREEMPTÍV: FOLYAMATOK ÚJRAÜTEMEZÉSE LEHETSÉGES (ELVEHETŐ AZ ERŐFORRÁS 1 FOLYAMATTÓL)

[redacted]

- erőforrásokhozzáférés - működés (A megnyit A 1 fájlt, olvas, akkor B annak olvas, hogy van saját POINTERE)
- STATIKUS/DINAMIKUS FOLY.
  - ki lehet belőle lépni
  - mindig a memóriában van, mindig fut.
- SZÁL: Ha 1 program részekből áll, akkor [redacted] a szálak tudnak párhuzamosan futni. (feldarabolás)
- CSATOLÁS (foly. között)
  - FÜGGETLEN folyamatok: semmi közük egymáshoz, és az egymás erőforrásaihoz
  - VERSENYZŐ f.: közös erő-forrást használnak, de amúgy függetlenek
  - KOOPERÁLÓ folyamatok

KONKURENS

ERŐFORRÁSOK

- ERŐFORRÁS: Minden objektum, amiért folyamatok versenyezhetnek, és ráa (kölcsönös) kizárás érvényesül mire utani kell.
- Van típusa, és vannak PÉLDÁNYAI (PL: RAM/LAP)
- igényelni kell.
- HASZNÁLAT
  - IGÉNYLÉS
  - HASZNÁLAT
  - VISSZAADÁS

HOLTPONT:

- HOLTPONT: (VAN A RENDSZERBEN)
  - HA olyan eseményre vár 1 folyamat, ami sohasem lép fel. 1 folyamat magában nem lehet holtpontban.
  - ha egymásra várnak a folyamatok, és mindegyiknek a továbbhaladása függene a választól.
  - SOHA nem kerül sorra 1 folyamat. A [redacted] nagyobb prioritásúak mindig elveszik előle az erőforrás-okat. : KIÉHEZTETÉS

- FELTÉTELEI: (MIND A 4 EGYSZERRE)
  1. KÖLCSÖNÖS KIZÁRÁS (várakozás)
  2. NINCS ELŐZÉS
  3. FOGLALVA várakozás
  4. KÖRBE VÁRÁS (hurok) egyik a másikra, ...

(ERŐFORR. ALLOKÁCIÓS GRÁF)

Ha több példányosak az erőforrások:
- Ha található olyan hurkot, amelyben van (TÖBB P.) olyan erőforrás aminek/ből mutató nyílak mindegyike a hurkon belül lévő folyamatra nézve mutat.
- Ha van kimutató él, akkor nincs.

Megelőzés:

valamely feltétel megszüntetése.

1: megszüntetni általában lehet...
2: LEGYEN ELŐZÉS:
   - erőforrásokkal elvenni
   - lemondani ha nem kaphatja meg.
3: csak 1 erőforrást birtokolhat 1 folyamat
   - EGYSZERRE megigényelni az összes szükséges erőforrást.
4: csak bizonyos sorrendben lehet az erőforrásokat használni.

ELKERÜLÉS: (ODAÍTÉLÉSKOR ELLENŐRZÉS SZÁMÍTÁS)

a) BANKÁR MÓDSZERREL:
- Minden folyamat előre bejelenti a maximális erőforrás-igényét.
- Nyilván kell tartani folyamatonként, hogy mennyit használhat, mennyit igényelhet.
- pedig igényléskor, elfogadáskor újraírni a táblázatot.
- Nyilvántartani, a szabad erőforrások számát.
- És azt, hogy ki mennyit igényelhet [redacted] még: MAX SZÜKSÉGL.
- Használat:
  - Ha többet igényel, mint amennyit előzőleg deklarált → ABORT → NEM: TOVÁBB
  - Ha többet igényel, mint ~~amennyi~~ amennyi szabad → VÁR, a
    A foglalások listájába fel kell venni az új igényt, a max szükségletből le kell vonni ezt, A szabadot számából is le kell vonni.

- Ezután ellenőrizni, hogy biztonságos-e az állapot. Ha nem jó: [redacted] visszaállítani az eredeti állapotot.

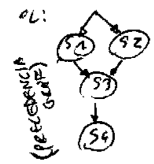
b) ERŐFORRÁS FOGLALÁSI GRÁFBAN CIKLUS DETEKTÁLÁSA
- Nem a nem biztonságos állapotok észlelése.
  - új él a gráfban: „IGÉNYELHETI"
  - szükséges a max igények bejelentése. ugyanis az új él felvételéhez ez is kell.
  - A rendszer folyamatosan karban tartja a gráfot.
  - Kéréskor megvizsgáljuk, hogy van-e ott IGÉNYELHETI-él. ha nincs: ILLEGÁLIS KÉRÉS. Az igényelheti-él átváltozik használattá.
  - Megvizsgáljuk, hogy alakul-e ki így hurok. Ha igen, akkor vissza, a processz pedig VÁR.

c) MEGSZÜNTET Holtpont detektálás (SHOSANI-COFFMAN) Ha független PROGIK vannak. Az op. rendsz. néha ellenőrzi, hogy van-e HOLTPONT. Ha igen, akkor megszünteti. FOZZT KÖV [8]

PÁRHUZAMOS PROGRAMOZÁS

- A párhuzamosság lehet valódi, vagy kvázi.
- indokok: • 1 PROCI VAN.
  • TÖBB PROCI: sebességnövelés
- • folyamatok létrehozása / megszüntet.
  • szinkronizálás
  • kommunikáció
- létrehozás, megszüntetés:

PL:



$R(S_1)$ - READ S_1, $W(S_1)$ - WRITE S_1

HA $R(S_i) \cap W(S_j) = 0$

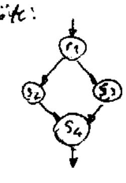
$W(S_i) \cap W(S_j) = 0$

$W(S_i) \cap R(S_j) = 0$

HA IGAZ, AKKOR PÁRHUZAMOSAN FUTTATHATÓAK.

- Ehhez nyelvi eszközök:
  - UTASÍTÁSSZINTŰ:

FORK LIME (MASK 66)
JOIN SZÁMLÁLÓ
SZÁMLÁLÓ = ahány ágat összegyűjt az itt elágazások = 2




```
SZÁML = 2
FORK S3CIMKÉJE        ← 2. SZÁL HOL VAN
S1                    ← 1. SZÁL
GOTO S4CIMKÉJE        ← ÖSSZEKAPCS. PONT.
S3CIMK: S3            ← 2. SZÁL
S4CIMK: JOIN SZÁML    ← ÖSSZEKAPCS.
  S4                  ← TOVÁBB
  ...
```

- KONKURENS UTASÍTÁSOK
  [redacted] az egyszerre párhuzamosítható részeket PARBEGIN PAREND közé kell tenni.

```
PARBEGIN
  S2
  S3
PAREND
S4
...
```

- KRITIKUS SZAKASZ: nem megszakítható, mert hibás adat lesz. EZEKBEN:

```
ENTRI
 S1
EXIT
```

PARAMÉTER NÉLKÜLI ELJÁRÁSOKBAN ÍROM A PROGRAMOT

[5]

A holtpont - MEGSZÜNTETÉSÉHEZ:

c) felbontás...

- feljegyzést vezetünk az erőforrás-allokációkról.
- Megvizsgáljuk, hogy van-e olyan sorozat (allokáció) ami alapján az összes processz igénye kielégíthető. Ha nincs, akkor holtpontban van a rendszer.

b) WAITFOR-GRÁF

- az erőforrás foglalási gráfot WAITFOR GRÁFFÁ ALAKÍTJUK. Itt az az él, hogy ki kire várhat.
- Ha keletkezett ciklus, akkor holtpont van.
- Futás során időnként az op. rendszer ilyen ciklusleosztást csinál.

- Megszüntetés:
  - PROCESSZ TERMINÁLÁSA
  - erőforrás ELVÉTELE (visszaállítás)
- a) TERMINÁLÁS: sorban egyenként, addig, amíg holtpont van. (ÁLDOZATVÁLASZTÁS) alapja lehet:
  - PRIORITÁS
  - hunok száma
  - futási idő (eltelt idő)
  - erőforrásfoglalások száma.
- b) ELVÉTEL:

  Az op. rendszer ellenőrzési pontokat ment el (CHECKPOINT) arról, hogy ki milyen erőforrásokat használt legutóbb. Ha holtpont van, akkor a problémás processzt vissza kell léptetni oda. Biztosítani, hogy ne mindig ugyanazokat léptessük vissza

PÁRHUZAMOS PROGRAMOZÁS (FOLYT.)

– SZINKRONIZÁLÁS (KILÉPÉS/BELÉPÉS ÖSSZEHANG.)

A folyamatok jelereket egymásnak, ha valamit akarnak, pl: kölcs. f., belépés. Kell egy belépési, és egy kilépési PROTOKOLL. A programokat úgy írják, hogy részekre osztják, olyanokra, amiket nem jó megszakítani. Köréjük ki/belépési pontokat tesznek.

Egy FLAG jelzi, hogy megszakítható.

MÓDSZEREK: A) SZOFTVER:

1. 1 FLAG: belépéskor figyeljük, hogy szabad-e. PROBLÉMA: Ha a figyelés után (szabad) belépünk, de pont akkor lesz foglalt: ERROR
2. TÖMB: MINDEN folyamatnak 1 elem. Először ha valaki akar, akkor ellenőrzi a többiek FLAG-jét, és ha szabad, akkor beállítja az övét, majd a HASZNÁLAT következik
3. Előbb beállít, majd ellenőriz, és ha szabad, akkor használ.
4. –"– SORBANÁLLÁSSAL.

B) HARDVERTÁMOGATÁSSAL:

1. IT KITILTÁS. (NO COMMENT)
2. SZEMAFOR: magasabb szintű kommunikáció

A SZEMAFOR: adattípus, szabad erőforrások száma.

Műveletek:

INICIALIZÁLÁS (létrehozás) INIT(S, ért.)

hogy: név = kezdőérték

BELÉPÉS: WAIT(NÉV)

KILÉPÉS: SIGNAL(NÉV)

MŰKÖDÉSE:

- INIT: kezdőérték, pl: szabad erőforrások száma. de más is lehet, telezés, felhasználás, igény szerint.
- WAIT: érték -=1
  Ha érték < 0 akkor nem lehet kielégíteni ⇒ VÁRAKOZÓ LISTÁRA kerül
- SIGNAL: ÉRTÉK += 1
  lekerülés a várakozó listáról

HASZNÁLAT:

1. KÖLCSÖNÖS KIZÁRÁS
   S=1
   ...
   WAIT(S)
   ... a kritikus szakasz
   SIGNAL(S)
2. IDŐBELI SORREND
   S1 S2
   SIGNAL(A) – WAIT(A) } S2 vár, hogy S1 befejezze.
3. EGYIDEJŰSÉG
   S1 S2 a=b=0
   SIGNAL(A) SIGNAL(B)
   WAIT(B) WAIT(A)
   Aki hamarabb ér ide, az itt megvárja a másikat.
4. PÁRHUZAMOSÍTÁS
   (S1) SIGNAL a WAIT (S2)
   itt párhuzamosan lehet megoldani őket, de mégis várnak egymásra.

- EGYPROGRAMOS JÁTÉK SZINKR + KOMM.
- ÜTEMEZÉS (CPU) KÖNYV!
- MEMÓRIA-KEZELÉS
- FILE-KEZELÉS
- DOS
- UNIX

AZ OP. rendszer megszakítja a FOLYAMATOKAT, de ha az még nem megszakítható, akkor az új folyt. ellenőrzés után visszaadja a vezérlést.

5. véges BUFFER
   ADÓ → [B] → VEVŐ
   3 SZEMAFOR KELL: üres, tele. Ü=N (elemszám)
   ADÓ: ad, ha: üres, és szabad. (WAIT(Ü), WAIT(SZ)) jelez, hogy betett (Ü-=1!) és hogy befejezte a műveletet: szabad a buffer (SIGNAL)
   VEVŐ: vár, hogy tele legyen, és szabad legyen (WAIT(T), WAIT(SZ)) jelez, hogy kivett (SIGNAL(Ü)) (Ürülésnek csökkentette) és hogy befejezte: SZABAD (SIGNAL)
6. FÜLKEZELÉS: állandóan a felülírással szemben.

– KOMMUNIKÁCIÓ (ADATCSERE)

1. NINCS KÖZÖS MEMÓRIA
   van csatorna. üzenetváltásos kommunikáció.
   SEND( )
   RECEIVE( )
   - lehet: 1/2 irányú, bufferelt/nem.
   - CÍMZÉS
     a) DIREKT $P_1 \to P_2$ címet adunk + üzenet
     b) MAILBOX mindkét fél ismeri a postaláda helyét, másik nem.
2. VAN KÖZÖS MEMÓRIA
3. BROADCASTING (SZÓRÁS)
   SEND(üzenet)

– KIVÉTELEK:

- másik fél bekapcsoltságának ellenőrzése. ha nem válaszol: TIMED OUT (ERROR)
- ZAJ

MAGAS SZINTŰ ESZKÖZÖK

(PÁRH. PROGRAMOZÁS)

1. KRITIKUS RÉGIÓ
   erőforrás igénylés, felszabadítás deklarálás:
   VAR X SHARED típus
   ...
   REGION X DO utasítások, a HASZNÁLAT
2. FELTÉTELES KRITIKUS RÉGIÓ:
   az előző + feltétel figyelése.
3. MONITOR:
   osztály, ami kölcsönös kizárással védve van.
   OSZTÁLY: műveletek halmaza 1 adatszerkezeten.
   Bizonyos eljárást nem férhetnek hozzá bizonyos esetekben az illető adatszerkezethez
   TÍPUS: CONDITION
4. ÚTKIFEJEZÉS: eljárás végrehajtási sorrend. SORREND, mi lehet párhuzamosan...

CPU ÜTEMEZÉS:

CPU BURST: CPU HASZNÁLATI IDŐ

MÓDSZEREK:

1.) FIFO - SORBANÁLLÁS
   A legrégebben várakozó kapja először.
   Az átlagos KÖRÜLFORDULÁSI IDŐ erősen függ a sorrendtől. (A 2 sorrendi között)
   Egyszerű, nem preemptív
   1 folyamat fel tudja tartani az egész sort,
   átlagos VÁRAKOZÁSI IDŐ: attól függ, hogy mennyien vannak
2.) KÖRBEFORGÓ STRATÉGIA:
   Minden folyamathoz 1 időzítő, ha az idő letelik, a sor végére kerül az illető folyamat.
   (CPU idő letelt, akkor elveszíti a vezérlést)
   Egyébként FIFO - SOR, T: IGÉNYELT IDŐK.
3.) A LEGRÖVIDEBB ELŐSZÖR:
   Előre meg kell határozni a CPU-igényt. (az nehéz)
   körbefordulási idő és várakozási idő itt a legjobb. FIFO-sorhoz hasonlít: n processz van, ahol T idő kell összesen (FIX) de a kezdési idők átlaga alacsony
   eredeti FIFO [A | B | C]
   átrendezett [C | B | A]
4.) LEGRÖVIDEBB HÁTRALÉVŐ IDEJŰ KAP:
   Az előző, csak preemptívek. érkezhetnek feladatok. Időnként visszagöngyük, hogy kinek mennyi idő kell, és a legrövidebb előre.
5.) PRIORITÁSOS:
   Preemptív vagy nem
6.) ÖSSZETETT:
   - több sor van, ezek között prioritás
   - több PROCI van. Ezek között kell elosztani

MEMÓRIA KEZELÉS

Az adatok és a rutinok címeit a PROGRAMOKBAN kellene megadni, de helyette változókat, és címkéket adunk meg FORDÍTÁSKOR RELATÍV címek lesznek

FORRÁS → FORDÍTÁS → PROGRAM.EXE (RELATÍV CÍMEK) → LOADER: BETÖLTÉS RAM-BA → MMU → FIZIKAI CÍM (CÍMFELOLDÁS)

MEMÓRIAKÉP, LOGIKAI CÍM (CÍMTRANSZFORM)

Betöltéskor kalkulálja a végleges RAM-címt, ezért a programok csak onnan futtathatók (EXE), áthelyezve nem működnek. A .COM áthelyezhető.

MEMÓRIA-ALLOKÁCIÓS STRATÉGIÁK:

1.) STATIKUS:
A betöltendő memóriakép abszolút címeket tartalmaz. Ezt adott fix kezdőcímtől töltjük be. (NEM MULTITASKING)

2.) DINAMIKUS:
A program memóriaképe logikai címeket tartalmaz. A végső címet létrehozója a hardver (BÁZISREGISZTER segítségével)
A RUTINOK egy része nem kerül betöltéskor a RAM-ba, csak akkor amikor hivatkozás történik rájuk vagy szubrutinként, vagy DLL-ként.

3) OVERLAY MÓDSZER
A ritkán használt rutinok nem töltődnek be itt sem, csak ha szükség van rájuk. Amikor már nincs, akkor nem mondható ki.

4) Egypartíciós
RAM-ot 2 részre osztjuk: op-rendszer, és felhasználói.

5.) TÖBB PARTÍCIÓS: Minden TASK-nak külön partíciója van, (külön az op. rendsz. is)
lefoglalás: több fix méretű kiosztása, vagy egyenként szabott méret.

FILE-KEZELÉS

1. FILE:
Adattípus, az op. rendszer hozza létre, logikai REKORDOK sorozata.
lehet:
- típusos: + OP. rendszer szolgáltatások (pl. ASSZOCIÁCIÓ)
- NEM: szekvenciális. a programok ellenőrzik, hogy milyen file.

2. KÖNYVTÁR:
Speciális file. rekordjai: bejegyzések az egyes file-okhoz. (NÉV, hossz, hely, jogosultságok, attribútumok, dátumok)
A könyvtárszerkezetek lehetnek:
- Egyszintű (NINCS szerkezet)
- 2 szintű (1 alk. szint.)
- FA
- GRÁF (UNIX) egy adott a FILE több könyvtárból lehet.

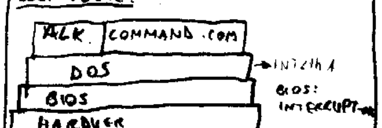
3. BELSŐ szerkezet: (FILE)
- szalag modell:
van 1 kurzor, (FP) mindig csak a következőt (REKORD) lehet olvasni
- DISK modell:
Blokkok külön elérhetőek.
- INDEXELT: kulcs alapján keresés, majd olvasás

4. MŰVELETEK:
- LÉTREHOZÁS; törlés, olvasás, írás, kezelés
Megnyitáskor: létrejön 1 fájl-leíró tábla (F. DESZKR.) a memóriában. Bezáráskor törlődik.
- VÉDELEM:
a) FIZIKAI SÉRÜLÉS:
2 példányban tároljuk, vagy több részre osztjuk szét az adatot +1-2 a hibajavító kódot. Ha 1 sérül: még visszaállítható.
b) téves HOZZÁFÉRÉS:
Felhasználói jogok ellenőrzése, esetenként művelet tiltása.

5. FILE RENDSZER szerkezete:
a) szabad helyek nyilvántartása:
- BITMAP: minden blokk 1 BIT
- LISTA
- LÁNCOLT LISTA: a mutató, a következő blokkban lévő szabad helyre mutat (Minden blokk végén 1 mutató)
b) SZABAD helyek ALLOKÁLÁSA:
- HEAP: folyamatosan. Sok használhatatlan lyuk lesz. Sokszor kell defragolni. Lassú elérés
- HASH: LÁNCOLT elérés. nincs töredezettség. lyukak blokkonként gyorsabb elérés.
- INDEXELT: gyors elérés. nagy index fájl.

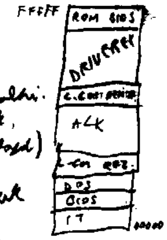
MS DOS (nem multitask)

SZERKEZETE:



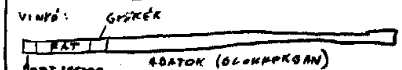
- RENDSZERHÍVÁS: INT21h, AH-ba a szolgáltatás kódját kell tenni.
- Lehet közvetlenül az alk. rétegből irányítani a HW-t.
- Szabályos gépen működik. 8086 (8088) proci 8/16 IT. vonal.
- SW:
ROM BIOS, IO.SYS, MSDOS.SYS, (ezek rendszerfájl) CONFIG.SYS (BOOT info: mit kell betölteni még) COMMAND.COM, AUTOEXEC.BAT.
- BOOT:
- címtartomány végéről indul. (FFFF0)
- itt ROM. Ebbe JMP → ROM BIOS
- teszt: konfiguráció meghatározás.
- BOOT sector keresése A, C meghajtón
- BOOT program betöltése (BOOT sector)
- Ez betölti a rendszerfájlokat, az egyéni beállításokat.
- COMMAND.COM kapja a vezérlést (parancssori + értelmező)

MEMÓRIAKEZELÉS: (1MB)



00000 - MON. VEZÉRLŐ
B8000 - KÉPERNYŐ - ADAT
Darabokat lehet foglalni. Ezeknek van jellemzőik, (szegmenscím, szabad, foglalt)
BŐVÍTÉS: (MAX 8M)
Memóriát felosztjuk részekre, az alsó részbe a felső 7MB-os részből lehozzuk azt, amelyikre szükség van. (16K-s LAPOK)
RAM-DRIVER végzi. + HW támogatással.

FILE KEZELÉS

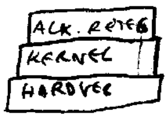


FAT:
- Fájl allokációs táblázat.
- A fájlok láncolt listaként léteznek, kezdőcím, végcím, POINTEREK.
- 2 PÉLDÁNYBAN VAN: Biztonsági másolat.
- Minden BLOKK-hoz tartozik leírás a FAT táblában. FAT32 → 32BITEN.
- FAT12 (FLOPPY):
tartalma: (nagy - nagy: 000 ... FFF)
SZABAD/FOGLALT/KENNTARTOTT/HIBÁS/LÁNCVÉG
- KÖNYVTÁRI BEJEGYZÉS:
(32 BÁJT) név (max 8) üres/törölt/ rejtett könyvtár (.) szülő (..), kiterj. attribútumok.

UNIX

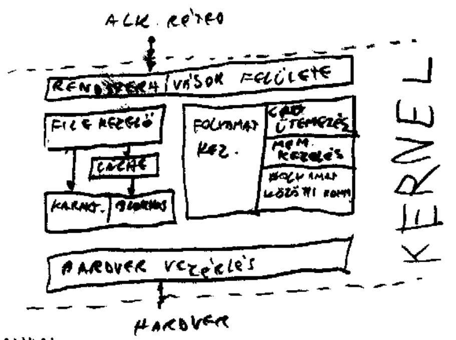
- „1969-TÓL KÉSZÜLT EL"
(BELL, MIT, GM)
- C-BEN ÍRTÁK (kis része ASSEMBLY)
- SOKAN fejlesztik, ezért sok féle egymással nem kompatibilis UNIX van.
- SZABAD forráskódú
- PARANCSSOROS
- Eltakarja a HARDVERT teljesen
- MULTITASKING (MULTIUSER)
- IDŐOSZTÁSOS RENDSZER

FELÉPÍTÉS:



Alkalmazási réteg:
rendszerhívások + rendszerfunkciók.
(rendszerhívás pl: a forrásprogramokban
a FORK, WAIT, EXEC.
SHELL: PARANCSSOR

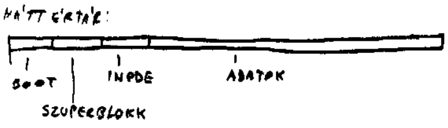
- KERNEL:
kapcsolat (elválasztó :)) a HW és az alk. réteg között.
Szoftver-INTERRUPT-okon keresztül kommunikálnak a rétegek.



- HW:
IT rendszer legyen, memóriakezelő legyen.
USER/KERNEL mód váltás legyen (VÉDELEM)

FILE-KEZELÉS:

HÁTTÉRTÁR:



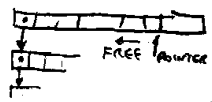
- INODE:
Benne bejegyzések fájlonként.
1 bejegyzés:
- tulajdonos
- tulaj csoport
- típus (könyvtár/sima/kar./blokkos.
- jogosultságok
- hivatkozások (rá) száma
- hol vannak a blokkjai

ERRE 13 BEJEGYZÉS; 10 DIREKT DISZK CÍM, 3 különböző (1x, 2x, 3x) indirekciós index.
(Ez sűrű + ritka index keveréke)
Az első 10 BLOKK címe direkten van megadva, a többi indirekten.
Ha a fájl ≤ 10 BLOKK akkor nincs szükség az indirekt részekre.
3X-os indirekció is megengedett ⇒ MAX 16 GB.

- AZ INODE LISTA leggyakrabban használt részei egy CACHE-ben vannak a RAM-ban. Ez az IN-CORE lista. Az op. rendsz. alkalmanként szinkronizálja a 2 INODE listát (+ADATOK az INODE-hoz képest)
- A FOLYAMATOK rendelkeznek külön FILE-LEÍRÓ táblával, amiben az általuk használt fájlok információira mutató indexek (LOKÁLIS)
- Ezek az információk a GLOBÁLIS fájl-leíró táblában vannak. (Az összes folyamaté)
Ezek: FILE-POINTER, (olvasási/írási kurzor)
(1 fájlhoz 1 míg ha 2 folyamat használja is)
INODE-bejegyzésre mutató INDEX, hány folyamat hivatkozik rá, jogosultságok.

- KÖNYVTÁRAK:
Sima fájlok, de rögzített a belső szerkezetük.
(a többi fájlnak nem rögzített)
Ezek csak TRANSZLÁCIÓS TÁBLÁK. a FILE-adatokat az INODE tartalmazza.
1 BEJEGYZÉS: NÉV + INODE INDEX.
ELÉRÉS: KÖNYVTÁR MEGNYITÁS HA Ő KÖNYVTÁR AKKOR AZ INODE-INDEXÉHEZ tartozó fájlt megnyitjuk ha ő is könyvtár, akkor tovább...

- SZUPERBLOKK:
Szabad adatterület nyilvántartása, INODE-nyilvántartás.
- INODE nyilvántartás:
Van 1 lista POINTEREKKEL, és 1 POINTER, ami a lista 1 elemére mutat. ALLOKÁCIÓ/DEALL.: POINTER eltolása.
Ettől balra mind foglalt, jobbra mind szabad.
ha POINTER → MAX ⇒ NEM LEHET allokálni.
- ADATBLOKK nyilvántartás: A szabad adatblokkok indexeit tartalmazó blokkok láncolt listába vannak fűzve. Láncolás: BLOKK első helye. Az első BLOKK a szuperblokkban van.
ALLOKÁCIÓ: az első indexblokkból levesz 1-et;



Majd a pointert BALRA tolja, a szabadok száma csökken. ha a POINTER az első elemhez ér, akkor a lánc utolsó blokkjának a tartalmát áthelyezi az elsőbe.

FOLYAMATKEZELÉS:

- PREEMPTÍV
- aktív folyamat saját kérésre, vagy HIBA esetén zombi állapotba megy át: OP.R. felszabadítja az erőforrásait, és törli a programot.
- FOLY. USER/KERNEL állapotban lehet. Ha rendszert hív akkor KERNEL állapotú, ilyenkor nem PREEMPTÁLHATÓ.
- Mindkét PRI. osztályon belül több szint van. Ezekhez külön várakozási sor tartozik. Ezeken belül forgó prioritás van. Sorok között mereven PRI.
- Van egy FOLYAMAT TÁBLA:
Minden folyamathoz 1 bejegyzés. (állapot, aktuális prioritás, azonosító, várt események, használt memóriaszegmensek címei)

FORMÁLIS NYELVEK:

ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK:

Σ - nyelv szimbólumkészlete (alfabéta, terminális ...)

Σ^i - i hosszúságú karaktersorozat; $i=0$: ε - üres, semmi

Σ^* - JELSOROZATOK HALMAZA Σ-BÓL

W - szimbólumsorozat

W^R - fordított sz.sorozat, R-tagú

P - levezetési szabályok

S - mondatszimbólum (a levezetés ebből indul ki)

$\alpha \to \beta$ levezetési szabály

α, β jelsorozat

NYELVOSZTÁLYOK:

VEREMAUTÓMATÁK (P)

- 2-ES, KÖRNYEZETFÜGGETLEN NYELVEKHEZ, TARTALMAZÁSI PROBL. FELDERÍTÉSÉRE
- itt van STACK, amivel a tetejére szimbólumot tehetünk be/vehetünk ki
- feltétel: CSAK ÁLL. ELF.

$P(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F)$ ugyanaz, mint a véges automata, csak:

Γ: verem ABC-je (ami benne lehet)

z_0: VEREM KEZDETI TARTALMA

- MŰKÖDÉS: elolvassa a következő szimbólumot, és ettől, a pillanatnyi állapottól, és a stack tetején lévő szimbólumtól függően:
  - ÚJ ÁLLAPOTBA MEGY AT
  - A VEREM TETEJÉN LÉVŐT KILÖKI (RECICLE)
  - VEREM TETEJÉRE ÚJ SZIMBÓLUMSOROZATOT TESZ (EZ TETSZŐLEGES, NEM FÜGG A SZÖVEGTŐL)
- MOZGÁSI SZABÁLYOK: $\delta_i(q_i, x, Y) = (q_{i+1}, Z)$
  - x: ÉPPEN BEOLV. SZIMB.
  - Y: STACK TETEJE
  - Z: VEREMBE VISSZAÍRT SZIMBÓLUMSOROZAT

- levezetési szabály akkor alkalmazható egy mondatforma, ha annak van olyan része, ami = a szabály bal oldalával.
- levezetés S-ből indul
- terminális sz.: BETŰK... (kis betűkkel jel.)
- nem termin. sz.: olyan valami, amiből le kell vezetni valamit (nagybetűvel jelöljük)

- KONFIGURÁCIÓ: $K(W, q, \chi)$
  - W: EL NEM OLVASOTT
  - q: ÁLLAPOT
  - χ: VEREM TELJES TARTALMA
- ELFOGADOTT NYELV: $\mathcal{L}(P)$

$\mathcal{L}(P) = \{W \mid (W, q_0, z_0) \vdash^* [(\varepsilon, p, \chi) \wedge (p \in F)]\}$

W-T OLVASVA, (W, q_0, z_0) KONFIGBÓL INDULVA (ε, p, χ)-BE JUTUNK (F-ELF)

- 2 FÉLE VEREMAUTÓMATA VAN:
  - ÁLLAPOTTAL ELFOGADÓ
  - ÜRES VEREMMEL ELFOGADÓ (nincs elfogadó állapot)
- EZEK ÁTALAKÍTHATÓAK EGYMÁSBA.

1) ÁLL $\to \varepsilon$
- ÚJ, VEREMÜRÍTŐ ÁLLAPOT
- ÚJ MOZGÁSI SZABÁLY, AMIVEL AZ ELFOGADÓ ÁLLAPOTBÓL ÁTMEGYÜNK A VEREMÜRÍTŐ ÁLL.-BA
- ÚJ MOZG. SZABÁLY: ÜRÍTI A VERMET: $\delta(q_e, \varepsilon, x) = (q_e, \varepsilon)$ z_0-t is ürítjük

FOLYT. KÖV.

NYELVEK 4 OSZTÁLYBA:

3-AS-NYELVOSZTÁLY (REGULÁRIS)

csak $A \to a$, $A \to aB$ szabályok lehetnek benne.

ha $A \to aB$ - JOBBREGULÁRIS

ha $A \to Ba$ - balreguláris

ILYEN NYELVET A VÉGES AUTÓMATÁK fogadják el.

2-ES-NYELVOSZTÁLY (CF)

ITT KELL BIZONYOS SZABÁLYOKAT KIKÜSZÖBÖLNI

csak $A \to \alpha$ szabályok (S helyett $\to \varepsilon$)

Ezek a KÖRNYEZETFÜGGETLEN nyelvek, és a VEREMAUTÓMATÁK ismerik fel

1-ES NYELVOSZTÁLY

KÖRNYEZETFÜGGŐ NYELVEK

$\beta A \gamma \to \beta \alpha \gamma$

tehát $A \to \alpha$, ha A egy meghatározott környezetben fordul elő.

NINCS AUTÓMAT

0-ÁS NYELVOSZTÁLY

tetszőleges szabályok. (természetes nyelvek)

AUTÓMATÁK

- feladatuk: tartalmazási kérdés eldöntése, szó eleme-e a nyelvnek.
- 4 NYELVOSZTÁLYHOZ 4 AUTÓMATA-OSZTÁLY. csak a 3-AS, 2-ES-SEL foglalkozunk.

VÉGES AUTÓMATÁK: 3-AS TIP. nyelvekhez.

M - automata

$M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q - állapotok halmaza

Σ - ABC,

δ - MOZGÁSI SZABÁLYOK: MILYEN ÁLLAPOTBAN, MILYEN BEMENETRE (OLVASOTT KARAKTER) MILYEN ÁLLAPOTBA JUT AZ AUTÓM.

q_0 - KEZDŐ ÁLLAPOT

F - elfogadó állapotok

- Elfogadás feltétele: végig olvasni, és utolsó szimb. után elfogadó állapotba kerül.
- leképezés: teljes - (MINDEN ÁLLAPOTHOZ MOZG. SZAB.); nem teljes
  - egyértelmű → DETERMINISZTIKUS (1 ÁLLAPOT → 1 MOZGÁSI SZABÁLY)
  - nem egyértelmű
- KONFIGURÁCIÓ: a pillanatnyi állapot, és a még el nem olvasott karaktersorozat.

$K = (q_i, W)$ ÁLLAPT, MI JÖN MÉG

W - SZÓ JÖN, ÉS (q_0, W)-vel indul: akkor M lépés után eljutunk (p, ε) konfigurációhoz, ahol p szükség elfogadó állapot.

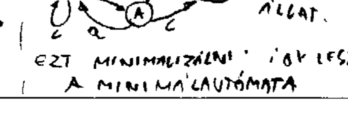
TEHÁT: OLYAN W-K, AMIKRE IGAZ ...

- automata nyelve: $\mathcal{L}(M)$ azon szimbólumsorozatok halmaza, amit az automata elfogad.

$\mathcal{L}(M) = \{W \mid (q_0, W) \vdash^*_M [(p, \varepsilon) \wedge (p \in F)]\}$

- MOZGÁSI SZABÁLYOK (LEVEZ.) $\delta_i(q_i, x) = q_{i+1}$

automata felírása gráffal



EZT MINIMALIZÁLNI: ÍGY LESZ A MINIMÁLAUTÓMATA

2.) ε verem → áll. elf.

- eredeti aut. üres veremének feltételezzük meg valamely Z'-t, ill. reprezentálnak.
- Ezt indításkor rakjuk le a verembe
- Ha az eredeti automata kiürítette a vermet: átmegy 1 elfogadó állapotba
- új elfogadó állapotba
- kell új mozgási szabály: $\delta(q_i, \varepsilon, Z') = (q_n, \varepsilon)$

Egyéb műveletek automatákkal:

Véges aut.: - állapotösszevonás

Veremaut.: - Biz. szabály-mentesítés (szűrés, így biz. normál formára hozás, ε-szabály mentesítés, egyszeres szabály-mentesítés, bal-rekurzió eltüntetés) anyelvtannal!

Veremautómata szerkesztése baloldali levezetéshez

STACK TETEJE

Baloldali levez.: mindig a legbaloldalibb nemterminálist alakítom (helyettesítem)

- Ha a beolvasott szimbólum terminális, és megegyezik a verem tetején lévővel: elfogadjuk, és töröljük a stack-ből
- Ha nemterminális kerül a verem tetejére, akkor azt az összes lehetséges módon helyettesítjük a veremben
- Mondat elfogadása, és verem ürítés: kész

Mozg. szabályok:

$\delta(q_i, x, x) = (q_i, \varepsilon)$ (olvasás stb. ürít)

$\delta(q_i, \varepsilon, A) = (q_i, \alpha)$ (nem terminális → helyettesít)

előbb-utóbb terminális kerül a tetejére $\boxed{Z_0 = S}$

mindig éppen DERÍTSÜK A VEREMBE, AMI SZERINT HELYETTESÍTÜNK, MEGNÉZZÜK, HOGY A LEVEZ. SZABÁLYOK ... JÖN-E

Nyelveket nyelvtanok generálják

Nyelvtan (grammatika): $G = \{N, \Sigma, P, S\}$

N - gramm. szimbólumok
Σ - áb
P - szabályok
S - mondatszimbólum

Szűrések:

1.) - adott a, b, c, ... nemt.
- a, b, c... miből?
- amiből nem azt elhagyjuk

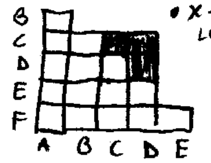
2. Ami S-ből nem elérhető semmiképp sem (többlépéses), azt elhagyjuk

Állapotösszevonás → minimálautomata

3. tip. nyelv

Pont úgy, mint a aszinkron sorrendi hálózatoknál (Moore modell)

—ekvivalens állapotpárok keresése lépcsős táblán



- X - ha nem lehetnek párok, mert az egyik elfogadó, a másik nem.

V - ha egymásnak a bemenetre egymás a következő állapot

- egyébként feltétel (mi kell ahhoz, hogy ekvivalensek legyenek, az, hogy a köv. állapotok is ekvivalensek ez a feltétel)

. Ahol olyan feltétel van, ami X-es, az szintén X-es lesz. Ahol csak olyan van, ami V-s, akkor az V-s.

Új jelek keletkeznek, ezeket is megvizsgálni, amíg nem marad feltételes

—megvannak az ekv. párok

—max. ekvivalencia osztályok: (abcdef) össze kell.

a ekv. a többivel?
- igen: marad
- nem: a új csoportot alapít, ezekkel összevonhatók, akikkel ekv.

b ekv. a többivel?

végig

- amíg 1 csoportban vannak, azok 1 osztály
- új állapotok: osztályok, köv. áll.: kiválasztjuk az egyik tagot, és annak a következő állapotai melyik osztályban vannak, az az osztály lesz a köv. állapot
- amelyikben elfogadó van: az elf.

Kész — minimálautomata

Nyelvtan szabályok módosítása 2. tip. nyelveknél

—valószínűsíthetően szükséges N, és Σ minden eleme?

Ha ilyen dolgoktól megszabadultunk:

- lehet Chomsky-normál formájú akkor, ha $A \to BC$, $A \to a$ van csak
- lehet Greibach NF. ha csak $A \to aW$, ahol W: A, B, C, D.. közül ...

Ezek eléréséhez módszerek (akár többet is)

1.) Alulról felfelé szűrés (szimbólum szűrés)

- kiindulva a terminális szimbólumok halmazából: hozzávesszük azokat a nemterminális szimbólumokat, amikből levezethetők olyan terminális karakterek, amik eredetileg benne voltak.
- A keletkezett szimbólum halmazra ugyanígy.
- másmódon: olyan szimbólumok, amik nem szerepelnek semelyik szabály jobb oldalán, azokat elhagyhatjuk

2. Felülről lefelé szűrés — hasonló

3.) ε-szabályok kiküszöbölése

ε-szabály nem jó, mert az újabb mondatszerű formákat rövidíti.

- alulról felfelé szűréssel kiküszöbölni
- $A \to \varepsilon$ - jellegű szabályokat elhagyni. ha van olyan szabály, aminek a jobb oldalán A van, akkor lesz egy olyan is, ahol a A helyén ε - van, tehát semmi sincs.

pl. $A \to \varepsilon$, $B \to Aa$ ⇒ $B \to Aa$, $B \to \varepsilon a$, $B \to a$ ami

4.) Egyszeres szabályok kiküszöbölése

$A \to B$ (lehetséges lesz a végtelen ciklust) helyettesítem kell az ilyeneket ill. nem egyszeres szabályokkal:

- Ha van $A \to B$ $B \to cd$
- A, és B miből vezethetők le - A, és B helyettesítéssel?
- $A \to B$-t elhagyom.

$A \to$ valami.
valami: cd - amit B-ből le lehet vezetni legalább 1 nem egyszeres szabállyal

5.) Balrekurzió eltüntetése

$A \to A\alpha$

- A szabályait 2 csoportra vesz: $A \to A\alpha_1 | A\alpha_2 | A\alpha_n \ldots$ $A \to \beta_1 | \beta_2 \ldots$

Ezek helyett

$A \to \beta_1\hat{A} | \beta_2\hat{A} | \beta_1 | \beta_2$

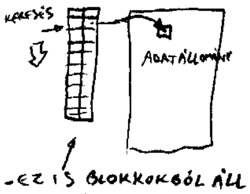
az $\hat{A}$: $\hat{A} \to \alpha_1\hat{A} | \alpha_2\hat{A} | \alpha_1 | \alpha_2$

(új karakt. és új szabályok)

INDEXELT SZERVEZÉS:

(FIZIKAI ADATBÁZISSZERVEZÉS)

- A KERESÉS AZ ADATBÁZIS HELYETT AZ INDEX-FÁJLBAN TÖRTÉNIK, AMI KISEBB SOKKAL MINT AZ ADATBÁZIS.
- AZ INDEX: CÍMTÁBLÁZAT
- INDEXREKORDOK VANNAK BENNE: [KULCS | POINTER]



- EZ IS BLOKKOKBÓL ÁLL (KEVESEBBŐL)
- EZZEL KELLENEK BLOKKMŰVELETEK
- RENDEZETT KULCSÉRTÉK SZERINT (ÍGY GYORS LEHET A KERESÉS)
- INDEXELÉS (INDEXREKORDOK SZÁMA HOGY VISZONYUL A Z ADATREKORDOK SZÁMÁHOZ)
  - SŰRŰ (INDEXREKORD-SZÁM=AD.REK. SZ)
  - RITKA (KEVÉS INDEX REKORD)

① RITKA INDEXEK

- AZ INDEX MUTATÓI BLOKKOKAT CÍMEZNEK.
- ÁLTALÁBAN A KERESETT KULCSÉRTÉK NINCS AZ INDEXFÁJLBAN, CSAK EGY AHHOZ KÖZEL LEVŐ. (MINT A SZÓTÁRBAN FENT A SARKOKBAN)
- RENDEZETT AZ INDEXFÁJL
- KIVÁLASZTÁS (KERESÉS) A KULCSOKNÁL A KISEBBEK KÖZÖTT A LEGNAGYOBB LEGYEN, AZ AZ ÁLTAL MUTATOTT BLOKKBAN LINEÁRISAN KERESÜNK.

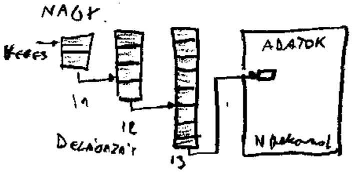
BESZÚRÁS: - HA VAN HELY: EGYSZERŰ
- HA NINCS ELÉG HELY: (A BLOKKBAN) KETTÉOSZTJUK 2 EGÉSZRE, AMIK FÉLIG ÜRESEK. ITT MÁR LESZ HELY. AZ INDEXFÁJLT IS FRISSÍTENI KELL.

TÖRLÉS: SIMÁN. DE ÍGY
- KIÜRÜLHET BLOKK: FELSZÁMOLNI
- MEGRITKULHATNAK: ÖSSZEVONHATÓAK LESZNEK

MÓDOSÍTÁS: ÉRINTI-E AZ INDEXFÁJLT? - NEM: EGYSZERŰ; - IGEN: TÖRLÉS + BESZÚRÁS

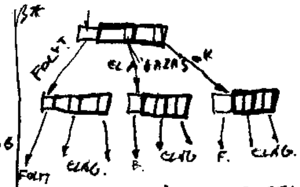
② TÖBBSZINTES RITKA INDEXEK

- HA MÉG AZ INDEXFÁJL IS TÚL NAGY.



$\log_D N$ - BLOKKMŰVELET.

- KERESÜNK HASONLÓT (KICSIK KÖZÖTT A LEGNAGYOBB) AZ ELSŐBEN, MAJD AZ A. ÉLA MUTATOTT INDEXBLOKKOT BETÖLTJÜK. EBBEN UGYANÍGY KERESÜNK. BETÖLTJÜK A KÖV. INDEXFÁJL BLOKKJÁT ... VÉGÜL AZ ADATBLOKKOT
- SPEC. B*-FA: Z-ES ELÁGAZÁSOKKAL + ($\log_Z N$) 1. FOLYTONOS VONAL



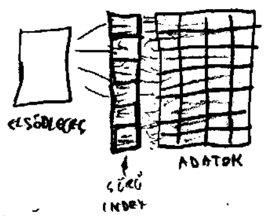
AZ INDEXREKORD - POINTEREK INDEXREKORDOKRA MUTATNAK (CSOPORTOKRA, Z-ES)

③ SŰRŰ INDEXEK

ANNYI INDEXREKORD, MINT ADATREKORD

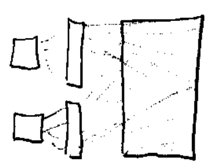
2 SZINTŰ - ELSŐDLEGES: HASH, VAGY RITKA INDEX
- MÁSODLAGOS: A SŰRŰ INDEX.

- AZ ADAT MOZGATÁS → CSAK MUTATÓ ÁTÍRÁS
- TÖBB KULCS SZERINT KERESHETŐ
- GYORS
- NAGY HELYIGÉNY
- SŰRŰ INDEXET ÚJ KELL ÍRNI MÓDOSÍTÁSKOR
- +1 BLOKKMŰVELET.



KÜLÖNBÖZŐ KULCS ALAPJÁN KERESÉS

AZ INDEXFÁJLOKAT MEGDUPLÁZZUK (TEHÁT ...)



VÉGES AUTOMATA

DETERMINISZTIKUSSÁ TÉTELE:
- FÁT BÁZISOLUNK
- S-BŐL INDULUNK
- S-től a-ra mik lehetnek (halmaz)
- b-re mik?
- Minden új halmazra megvizsgáljuk, hogy az elemeiből mik érhetőek el, milyen beolvasott karakterre. új halmazok.
- végig így
- átfedések lehetnek az egyes halmazok között, de KIT ÉRDEKEL?!!
- A HALMAZOKNAK NEVET ADUNK → ÚJ ÁLLAPOTOK
- Ha a új halmaz elemei = a régivel. nem kell új.
- ha már van ilyen akkor az =

~~JOBB...~~

VEREMAUTÓMATA

JOBB OLDALI LEVEZETÉSHEZ:

MŰKÖDÉS: (BELELÁTÓ VEREMAUTÓMATA)

KIINDULÁS: SZÓ

szó → S → ÜRÍTÉS

(NEM! FORDÍTOTT SORRENDŰ)

A legjobboldalibb nemterminálist helyettesítjük (EZ A LEVEZETÉS CSAK)

- A verem tetején lévő szimbólumsorozatot helyettesítjük az azt generáló NEMTERMINÁLISSAL

adott szabály $A \to \alpha \Rightarrow \alpha$-ból A lesz.

$$\delta(q, \varepsilon, \alpha) = (q, A)$$

(nem csak a verem tetejét figyeljük: BELELÁTÓ AUTÓMATA)

- A veremben össze kell állítani a beolvasott szimbólumsorozatot:

$$\delta(q, a, X) = (q, aX)$$

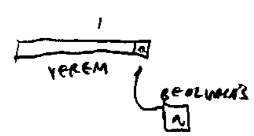
betöltés a verembe } BEOLVASÁS

- végén veremürítés kell:

$$\delta(q, \varepsilon, SZ_0) = (q, \varepsilon)$$

- Tehát:

- Kezdetben STACK üres (Z_0)
- Addig olvasunk be (BEMÁSOLÁS STACKBE) amíg helyettesíthető nem lesz
- Akkor helyettesítjük.
- Előbb utóbb S-t kapunk
- Akkor ürítés.



A figyelembe vett összes szimbólumot kiütjük a veremből. (nem csak helyettesítéskor)

VEREMAUTÓMATÁK

- ÁLLAPOTTAL ELFOGADÓ

Megadjuk az elfogadó állapotot, ha oda jutunk - ok.

- üres veremmel elfogadó: ha semmi sincs a veremben, akkor fogad el. VEREMÜRÍTŐ MOZGÁSI SZABÁLY van, az csak akkor az állapotban működik, amikor az utolsó karakter elolvasása után jutunk. (tehát q_0-ban nem, q_n-ben már ürít)

Az ürítő szabályt minden lehetséges szimbólumra (és elf. állap.) felírjuk.

VÉGES AUTÓMATA

DETERMINIZÁLÁS

— TÁBLÁZAT:

Milyen ÁLLAPOTOK VANNAK? (sorok)

karakterek / OSZLOPOK

	a	b
A		
B		
C		

— kitölteni:

pl: A-BÓL a-ra: mikre? – azokat adni

b-re? ...

— Milyen új állapotok lettek

Ezeknek új sorok.

Ezek állapotaiból MIKBE lehet eljutni? sorokat ad

— –||–

addig amíg nem lesz más új állapot.

— lehúzni azokat a sorokat, amikbe nem jutunk el sehonnan (kivéve a kezdőállapot).

Ezt ismételgetni, (mert újabb állapotok is ilyen sorra jutnak.) – addig amíg nincs mit lehúzni

— állapotok: RUBRIKÁK + korábbi á.

(lehúzni azt amiből több van, de 1-et meghagyni közülük)

pl: $\boxed{AB}$

~~AB~~

~~AB~~

— Megszámolni ami maradt!

Ezek az új állapotok.

Ezek kimeneteli ÁLLAPOT:

a táblázat megfelelő sorával

ADATBÁZIS TERVEZÉSE

SZÖVEG ÉS MEGFOGALM. → ER MODELL (ELŐMODELL) → RELÁCIÓS ADATMODELL → 1NF → 2NF → 3NF → BCNF → KÉSZ → FIZIKAI TÁROLÁS

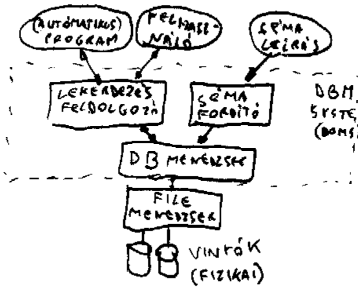
(1 ITT MÁR A REDUNDANCIA = 0)

(VAGY) FILE MAN.

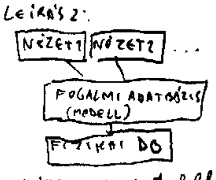
FELBONTÁSOK RÉSZSÉMÁKRA (RELÁCIÓKRA) REDUNDANCIA CSÖKKENTÉSE

ELM.:

- ADATBÁZIS: valamely 1 részhalmazának leírásához adatok összefüggő rendezett halmaza.
- ADATBÁZISKEZELŐ RENDSZER: LEHETŐVÉ TESZI AZ ADATBÁZIS HASZNÁLATÁT. (DBMS)



- SÉMA: adatok tárolásának logikai rendje. (METAADATOK) EZT ADATDEFINÍCIÓS nyelvvel készítjük, ENNEK mindig rendelkezésre kell állnia, az adatbázis használatához.
- HASZNÁLAT: adatmanipulációs, és lekérdező nyelv. (DML) SQL – a leg elterjedtebb.
- FILE MENEDZSER: biztosítja a hozzáférést a fizikai adatbázishoz. (op. rendszerekben)
- DBMS feladatai:
  - ADATVÉDELEM
  - ADATBIZTONSÁG
  - INTEGRITÁS (téves adat elleni v.)
  - SZINKRONITÁS (többi felhasználó egyszerre, tranzitás)
- DB használói
  - USER
  - DB PROGRAMOZÓ
  - ADMINISZTRÁTOR
- LEÍRÁS 2:



- NÉZET: 1 adott felhasználó 1 adott pillanatban lát.
- FOGALMI: a modellezett DB
- FIZ: VINYÓ.

CÉL: A 3 RÉTEG EGYMÁSTÓL FÜGGETLENÜL MEGVÁLTOZTATHATÓ LEGYEN. (ADATFÜGGETLENSÉG) FIZIKAI/LOGIKAI

E | AKKOR (JEL)

RELÁCIÓS AD. MOD.:

R_1	ATTR. 1	ATTR. 2	ATTR. 3
ENT A →	PÉLDA1	PÉLDA2	PÉLDA3
ENT B →	PÉLDB1	PÉLDB2	PÉLDB3
	...		

- ILYEN RELÁCIÓKAT csinálunk az: – ENTITÁS típusokból, – kapcsolat típusokból AZ ER-MODELLBŐL
- HA NINCSENEK különbségek benne: akkor a relációs séma.
- RELÁCIÓ: nagybetű, eleme: kisbetű
- SOR: N-ES A NEVE, ENT PÉLDÁNY, VAGY KAPCS. PÉLDÁNY.
- 1 ENT. RELÁCIÓ: OSZLOP: ÖSSZES ATTR. SOR – PÉLDÁNYOK
- 1 KAPCS. RELÁCIÓ: OSZLOPAI: (attribútumai) kapcsolatban résztvevő entitás típusok kulcs(típus)ai.
- MÁS ENT. TÍPUSNAK ne legyen azonos nevű attribútuma.
- AZ EGYEDEKET ÚGY kezeljük, mint a kapcsolatokat, és az attr.-okat jellemezzük.
- TEHÁT AZ ER modellből relációs modellt állíthatunk elő: ENTITÁSOK → RELÁCIÓK, KAPCSOLATOK → RELÁCIÓK
- EZUTÁN A REDUNDANCIÁT kell csökkenteni felbontással, magasabb normál formára hozással.
- redundancia: bizonyos információk több példányban szerepelnek. túl nagy helyigény, lassúság
- KULCS: minden, ami szerint keresni akarunk
  - HA CSAK 1 ATTR.-ból áll: EGYSZERŰ KULCS
  - HA NEM: ÖSSZETETT KULCS.
  - HA X KULCS, ÉS NINCS olyan részhalmaza, ami szintén kulcs: AKKOR X SZUPERKULCS
  - HA TÖBB KULCS VAN: az egyik ELSŐDLEGES, A TÖBBI KULCSJELÖLT.
  - HA X R ATTRIBÚTUMA, de Q-ban kulcs, akkor: IDEGEN KULCS.

FUNKCIONÁLIS FÜGGŐSÉGEK:

X attr. halmaz meghatározza Y halmazt (X → Y) (A KULCSTÓL FÜGG AZ ENTITÁS HALMAZ)

F.F: ÉRDEMI (MINDIG) / ESETI (LEHET)

HA X → Y halmazok, és NINCS X' ⊂ X, X' → Y: X DETERMINÁNSA (meghatározója) Y-NAK / EGYÉBKÉNT Y RÉSZLEGESEN FÜGGNE X-TŐL

TRANZITÍV FÜGGÉS: X → Y → Z, Z – X-től tr.

RELÁCIÓK NORMÁL FORMÁI:

1NF: (ELSŐ NF) ha csak atomi ATTR. vannak. (nem részhalmazok)

2NF: ha 1NF, és nincs benne részleges függés kulcstól.

3NF: HA EGYIK MÁSODLAGOS ATTR. sem függ tranzitívan KULCSTÓL:
- X szuperkulcsa R-nek, vagy A elsődleges attribútum (X → A)

BCNF: (BOYCE-CODD) (4NF) ha benne függőség csak szuperkulcstól van. (2 ATTR. ...)

0NF: NEM 1NF

k-NORMÁL FORMÁJÚ RELÁCIÓ FELBONTHATÓ (k+1) NORMÁL FORMÁJÚAKBA

MINÉL NAGYOBB NORMÁL FORMÁJÚ, ANNÁL KEVESEBB A REDUNDANCIA AZ ADATBÁZISBAN.

A FELBONTÁSOKAT VESZTESÉGMENTESEN, ÉS FÜGGŐSÉGŐRZŐRE KELL VÉGEZNI. NEM MINDIG SIKERÜL ÍGY ELJUTNI A TELJES BCNF-IG. MÁSIK OLDALON

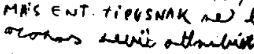
A MÁSIK oldal (OTHER SIDE)

OSZLOPOK SZÁMA: ARITÁS
SOROK SZÁMA: SZÁMOSSÁG

ER-MODELL:

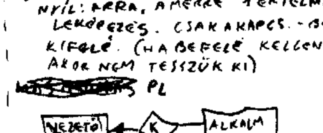
ELEMEI:
- EGYEDEK – EGYED/ENTITÁS: MINDEN SAJÁT LÉTTEL RENDELKEZŐ DOLOG (TULAJDONNÉVVEL)
- ATTRIBÚTUMOK – TULAJDONSÁG, EGYEDET/KAPCS.-OT JELLEMEZ
- KAPCSOLATOK – EGYEDEK KÖZÖTT (NÉVVEL ELLÁTOTT VISZONY) PL. Ő ODA JÁR; 1:1, 1:N, N:M
- KULCS: ATTR. AZON HALMAZA, AMI AZ ENTITÁS EGYES PÉLDÁNYAIT EGYÉRTELMŰEN AZONOSÍTJA

KAPCSOLATOK



NYÍL: ARRA, AMERRE 1 ÉRTELMŰ A LEKÉRDEZÉS. CSAK A KAPCS.-BÓL KIFELÉ. (HA BEFELÉ KELLENE, AKKOR NEM TESSZÜK KI)

~~...~~ PL



MÁS MEGADÁS:

ENTITÁS1(ATTR.1, ATTR 2 ...)
KAPCS1 (ATTRK1, ATTR K2 ...)

VAGY TÍPUSOK MINDENÜTT, VAGY PÉLDÁNYOK.

FÜGGŐSÉGEK FELDERÍTÉSE: – SZÖVEG ALAPJÁN

RELÁCIÓS SÉMÁK FELBONTÁSA

VESZTESÉGMENTES FELBONTÁS:
(INFORMÁCIÓ VESZTÉS NÉLKÜLI VISSZAÁLLÍTHATÓ)
CÉLJA: a részsémák magasabb normál formában kerüljenek
- AZ EGYES RÉSZSÉMÁK SORAI nem változnak, csak bizonyos ATTRIBÚTUMOK hiányoznak belőlük.

MIT VÁLASSZUNK: KÖZÖSNEK: valamely függőség determinánsát (MEGHATÁROZÓJÁT) amik különbözőek: azok nem függenek egymástól.
- VAN AMI KÖZÖS, A TÖBBIT 2 FELÉ VÁLOGATJUK.

FÜGGŐSÉGŐRZŐ felbontás:
veszteségmentes felbontásban lehet, hogy az eredeti függőségeket nem tudjuk alkalmazni. ANALÍZIS:
- VETÍTJÜK VALAMENNYI FÜGGŐSÉGET VALAMENNYI RÉSZ-SÉMÁRA (ÚJ RELÁCIÓK)
- EZEK LEZÁRÁSÁT MEGHATÁROZZUK
- HA EZ AZONOS AZ EREDETI FÜGGÉSHALMAZ LEZÁRÁSÁVAL: OK, EGYÉBKÉNT NEM FÜGG. ŐRZŐ

LEZÁRÁS: ATTRIBÚTUM HALMAZ RÉSZHALMAZA AMI FÜGG AZ X-TŐL $X \to A$ X ... A

3NF ALAKRA HOZÁS:
(FÜGGŐSÉGŐRZŐ, veszteségmentes)
- ELŐSZÖR FÜGGŐSÉGŐRZŐRE: MINDEN $X \to Y$ FÜGGŐSÉGHEZ képezzünk 1 részsémát. ez 3NF.
- tegyük veszteségmentessé képezzünk 1 felbontást: amin megleívő unióját az eredeti (UNIVERZÁLIS) relációt 1 KULCSÁVAL.
- KÉSZ

BCNF ALAKRA HOZÁS
- séma sémák függőségeinek meghatározása (VETÍTETT REL.)
- válasszuk ki azokat, amik nem BCNF-ek. (HA NINCS AKKOR KÉSZ)
- KERESSÜK AZT A FÜGGŐSÉGET, AMI MIATT NEM BCNF. ($X \to A$)
A részsémát kettébontjuk: S_1 - X, és A attribútumai
S_2 - A kivételével az összes.
- EZEK (S_1, S_2) BCNF ?
  - IGEN → KÉSZ
  - NEM

MŰVELETEK RELÁCIÓKKAL:
RELÁCIÓ → RELÁCIÓ

ALAPMŰVELETEK:
- HALMAZALGEBRAI ($\cup \cap \setminus$)
- DIREKTSZORZAT (DESCARTES) $R \times S$
  MINDEN ELEM MINDEN MÁS CSOPORT MINDEN ELEMÉVEL PÁROSÍTVA
- VETÍTÉS
  $\pi_{A_1 A_2}(R)$ AZOK AZ OSZLOPOK MARADNAK (ATTR) AMIKET KIJELÖLTÜNK
- KIVÁLASZTÁS (KERESÉS)
  $\sigma_{\text{LOGIKAI KIF.}}(R)$ R-NEK AZOK AZ ELEMEI MARADNAK, AMIKRE IGAZ A LOGIKAI KIFEJEZÉS.

SZÁRMAZTATOTT:
- TERMÉSZETES ILLESZTÉS
  $R \bowtie S$
  HA R-NEK ÉS S-NEK VAN AZONOS NEVŰ ATTRIBÚTUMA
  OSZLOPOK: AZ ÖSSZES ATTRIBÚTUM
  SOROK: AZOK, AHOL A KÖZÖS ATTRIBÚTUMHOZ TARTOZÓ ÉRTÉKEK AZONOSAK A KÉT (R, S) RELÁCIÓBAN.
  - R, S → $R \times S$ KIVÁLASZTJUK AZOKAT A SOROKAT, AHOL A KÖZÖS ATTR. ÉRTÉK =
- THETA JOIN (Θ) $R \underset{i\Theta j}{\bowtie} S$
  R j. ATTRIBÚTUMA ÉS S j. ATTRIBÚTUMA Θ RELÁCIÓBAN ÁLLNAK. EZEKET A SOROKAT KIVÁLASZTANI A DESCARTES SZORZATBÓL

DESCARTES SZORZAT:

R

A	B
a	b
a	c
b	b

S

A	C
a	c
b	c

ÖSSZES ATTR.

A_R	B	A_S	C
a	b	a	c
a	b	b	c
a	c	a	c
a	c	b	c
b	b	a	c
b	b	b	c

- HÁNYADOS RELÁCIÓ
  $R \div S = Q$ $(Q \times S \subseteq R)$
  S ATTR. $\subset$ R ATTR. HALMAZ.
- R-BŐL AZOK A SOROK, AHOL S-SEL KÖZÖS ATTRIBÚTUMOKHOZ TARTOZÓ ÉRTÉKEK MEGEGYEZNEK R-NÉL ÉS S-NÉL
- AZOK AZ OSZLOPOK R-BŐL, AMIK NINCSENEK BENNE S-BEN
- AMELYIK SOR TÖBBSZÖR SZEREPEL: CSAK 1SZER LEGYEN

FIZIKAI ADATBÁZIS:
- AZ OP. RENDSZER AZ ADATBÁZIS adatait file-okban tárolja. A file-ok azonos méretű blokkokból épülnek fel. (0,5K – 4K – 32K)
- MINDEN BLOKKNAK VAN FIZIKAI címe
- MŰVELETEK:
  - KERESÉS
  - BESZÚRÁS
  - TÖRLÉS
  - MÓDOSÍTÁS

  cél: ezeket minél gyorsabban.

a műveletek (BLOKK): 1. BLOK BE A MEMÓRIÁBA t_1
2. KERESÉS, ÍRÁS, OLVASÁS t_2
3. BLOKK VISSZA A VINYÓRA t_3

$t_1, t_3 \gg t_2$ ezért a blokkműveletek számát minimalizálni kell mindig: úgy kell tárolni, hogy minél kevesebb blokkművelettel legyenek megoldhatók a feladatok.
- BLOKKOK:
  részei: header + rekordok
  (általában nincsenek teljesen kihasználva)
  header: • mezők értelmezése (int, real ..)
  • rekordok száma
- REKORDOKAT KERESÜNK, BLOKKOKAT mozgatunk. rekord címe: BLOKKCÍM + ELTOLÁS kereséssel, hogy kulccsal.

ADATSZERVEZÉSEK
(N = ÖSSZES BLOKK SZÁMA)

- **HEAP** legegyszerűbb, nem hatékony rekordok elhelyezése sorban, egymás blokkokba BLOKKOK SORBAN, KÜLÖN CÍMMEL

1. KERESÉS:
VALAMENNYI REKORD OLVASÁSA FOLYAMATOSAN ADDIG, AMÍG MEG NEM TALÁLJUK A KERESETTET. KULCS ALAPJÁN KERESÜNK. MINDEN REKORDMEZŐVEL ÖSSZEHASONLÍTJUK A KULCSOT AMÍG MEG NEM TALÁLJUK BLOKKRÓL BLOKKRA, REKORDRÓL REKORDRA. MŰVELETEK: $\frac{N+1}{2}$

2. TÖRLÉS
- MEGKERESSÜK A TÖRLENDŐT
- HEADERBEN (REKORD) JELEZZÜK, HOGY FELSZABADULT (TÖRÖLT BIT)

3. BESZÚRÁS
ELŐSZÖR A TÖRLÉSEK ÁLTAL FELSZABADÍTOTT HELYEKEN PRÓBÁLKOZUNK. HA NINCS ELÉG NAGY EGYBEFÜGGŐ TERÜLET, AKKOR AZ ÁLLOMÁNY VÉGÉN, AZ UTOLSÓ BLOKKNÁL PRÓBÁLKOZUNK. HA OTT SINCS HELY: SZÓLUNK AZ OP. RENDSZERNEK, HOGY KELL MÉG BLOKK, ODA ÍRUNK

4. MÓDOSÍTÁS
- HA UGYANAKKORÁRA MÓDOSÍTUNK, AKKOR EGYSZERŰ (KERESÉS + FELÜLÍR)
- HA NAGYOBBRA:
  - TÖRLÉS
  - BESZÚRÁS MÁSHOVA

- **HASH** VAN EGY B ELEMŰ POINTERTÁBLA.
MINDEN BLOKK VALAMELY POINTER ÁLTAL MUTATOTT LÁNCBAN VAN. B DB ILYEN CÍM VAN A
- REKORDOK ELHELYEZÉSE: KULCS ALAPJÁN KISZÁMOLUNK EGY SZÁMOT (0..B-1) EZ EGY POINTER A HASH TÁBLÁBAN (HASH FÜGGVÉNY ALAPJÁN VISZONYLAG EGYENLETESEN SZÉTSZÓRVA) AZ AZON POINTER ÁLTAL MUTATOTT BLOKKOKBAN KAP HELYET (ELÉRHETŐ) AZ ADOTT REKORD. EZEN BLOKKOK 1 VÖDRÖT ALKOTNAK. EHHEZ LEHET ÚJABB BLOKKOKAT HOZZÁRENDELNI.
KULCS → TÁBLAELEM (POINTER) → VÖDÖR
- ÍGY CSAK A KIJELÖLT VÖDÖRBEN KELL KERESNI, NEM AZ EGÉSZ VINYÓN. $\frac{1+N/B}{2}$

1. KERESÉS MINT A HEAP-NÉL, HA MÁR MEGVAN A VÖDÖR
2. TÖRLÉS SZINTÉN
3. BESZÚRÁS: AZ ADOTT BLOKKBA, VAGY A VÖDÖR MÁS BLOKKJÁBA, VAGY A VÖDÖR ÚJ BLOKKOT KAP, ÉS ODA
4. MÓDOSÍTÁS: KULCSOT ÉRINTI
   - NEM – EGYSZERŰ
   - IGEN:
     - MEGKERESNI RÉGI KULCS ALAPJÁN
     - KITÖRÖLNI
     - ÚJ KULCS ALAPJÁN BESZÚRNI.

INDEXELT SZERVEZÉS:
ITT NEM FÉR EL. MÁSHOL VAN

(KÖVETKEZŐ OLDAL)

SZÁMÍTÓGÉP HÁLÓZATOK

- AUTONÓM SZÁMÍTÓGÉPEK ÖSSZEKAPCSOLT RENDSZERE. ADATCSERE CÉLJÁBÓL
- LÉTREHOZÁS CÉLJAI:
  - KORREKT MEGOSZTÁS (ADAT, NYOMTATÓ)
  - MEGBÍZHATÓSÁG növelése: alternatív erőforrások biztosítása
  - teljesítménynövelés: kihasználtság - elosztás jobb lehet
  - KOMMUNIKÁCIÓ.

- FELÉPÍTÉS:

ELEMEI:

- HOST - hálózatba kapcsolt számítógép, amit a felhasználó használ.
- ÁTVITELI VONALAK (kábelek, érzékelők, erősítők ...)

  ÁTVITEL ← 2 PONT KÖZÖTT / ÜZENETSZÓRÁSOS

- KAPCSOLÓELEMEK ~~...~~ adatcsomagok útját meghatározzák.

STRUKTÚRA:

- ALHÁLÓZATOK: a fő hálózattal egy kapcsolóelemen keresztül kapcsolódnak a HOST-ok

KAPCSOLÓ: IMP (INTERFACE MESSAGE PROCESSOR)

A KAPCSOLÓK KAPCSOLÓDÁSA:

- KÖZVETLENÜL MINDENKI MINDENKIVEL (SOK KÁBEL, CSOMAGKAPCSOLT ..?)
- 1 KÖZÖS CSATORNÁRA MINDENKI

  Mindenki hallgatja, de csak az válaszol, akinek az szól. CÍMZÉS kell

TERVEZÉS: STRUKTÚRÁLTAN.

- RÉTEGENKÉNT KÜLÖN, az adott rétegnél jelentkező problémákat figyelembe véve.
- Minden réteg az előzőre épül
- Az egyes rétegek egymástól függetlenül legyenek megvalósíthatóak
- 1 réteget 1 funkcionális egység valósít meg
- 1 réteg olyan információt kiad, azt a vevő oldalon ugyanaz a réteg „értelmezi".

  tehát az n. réteg az n. réteggel kommunikál, használva a lentebbi rétegeket.
- A kommunikációjukhoz tartozik 1 protokoll: SZABÁLYOK ÉS KONVENCIÓK.
- Ez a kommunikáció virtuális, valójában a rétegek egymással kommunikálnak. (FIZIKAI KOMMUNIKÁCIÓ)
- INTERFÉSZ: az alsóbb rétegnek a felsőbb számára nyújtott szolgáltatása
- RÉTEGENKÉNTI ADATÁRAMLÁS: ADÓ: minél lejjebb megyünk, minden réteg hozzácsap az eredeti adathoz egy fejlécet.

VEVŐ: minden réteg értelmezi a neki szóló fejlécet, és levágja az adatról, úgy továbbítja felfelé

- az egyes rétegek különböző absztrakciós szinteket képviselnek
- Megvalósítás elvei (OSI)
  - rétek különböző ABSZTR...
  - Minden réteg jól definiált feladatot hajtson végre.
  - rétegek feladatainak szabványoknak kell eleget tenniük.
  - rétegek közötti információcsere minimalizálása.

7 RÉTEG VAN:

ALKALMAZÁSI → ALK. PROTOKOLL
MEGJELENÍTÉSI → MEGJ. PROTOKOLL
...
VISZONY
SZÁLLÍTÁSI
HÁLÓZATI
ADATKAPCSOLATI
FIZIKAI

- A RÉTEGEK LEFELÉ darabolhatják az adatot.

- RÉTEGEK KÖZÖTTI KOMMUNIKÁCIÓ:
  - SAP: szolgáltatáselérési pont.
  - IDU adategység, amit átküldünk egyik rétegből a másikba.

    részei: vezérlő (SERVICE) info
    - adat. (AKÁR TÖBB DARABBAN)

HÁLÓZATOK SZOLGÁLTATÁSAI:

- TÍPUSAI:
  - ÖSSZEKÖTTETÉS alapú:
    1. felépítés
    2. használat
    3. bontás
  - ÖSSZEKÖTTETÉS MENTES: ADATCSOMAGOKKAL, mint 1 levél. Más-más úton is mehet. (DATAGRAMM)

A) Ö.K. ALAPÚ:
- MEGBONTHATATLAN (PL BESZÉD)
- MEGBONTHATÓ
  - ÜZENET SOROZAT (DARABOK)
  - BITFOLYAM

B) Ö.K. MENTES:
- MEGBONTHATÓ
- MEGBONTHATATLAN

- SZOLGÁLAT: Ezeken keresztül kommunikálnak a szintek.

  RÉSZEI: SZOLGÁLAT PRIMITÍVEK

  PL:

  KÉRÉS - végrehajtást - ADÓ
  BEJELENTÉS - eseményről info } VEVŐ
  VÁLASZ - válasz eseményre }
  MEGERŐSÍTÉS - elfogadásról értesít - ADÓ

OSI MODELL GLOBÁLISAN:

- igazodni kellett a nem meglévő szabványokhoz.
- bizonyos rétegeket nem használtak (viszony ..)
- nem hatékony, nehezen megvalósítható
- kimaradt: adatbiztonság, titkosítás
- különböző OSI implementációk sokszor nem kompatibilisek: nem tudnak kommunikálni.

  Mert a PROTOKOLLOK nincsenek benne az OSI modellben.
- primitívek végrehajtódása megszakításorientált.

JELLEGZETES HÁLÓZATOK: (PROTOK.)

a) NYILVÁNOS hálózatok: kénelhető hozzáférés. ~~...~~, intézmények, cégek adják. VAN / PUBLIC network

b) ARPANET kutatók együttműködéséhez hozták létre. 1969-ben ~~...~~
- Terminológia megalapozása, protokollok megalapozása:

  TCP/IP FTP TELNET SMTP (MAIL)
- NEM OSI, mert régebbi

c) MAP (MANUFACTURING AUTOMATION PROT.)
- OSI
- GM kezdeményezte
- vezérjeles sín, (tokenbus) közeghozzáférési protokoll.
- NAGY CÉG részegységei közötti kommunikáció

d) TOP (IRODAAUTOMATIZÁLÁSI ...)
- OSI
- NINCS VALÓS IDEJŰ KÖVETELMÉNY

e) USENET
- ..

IEEE HÁLÓZATI SZABVÁNYOK:

- PL: PRIMITÍVEK meghatározása, PROTOKOLLOK

FAJTÁI:

1. CSMA/CD
   - 1 PERZISZTENS
   - őse az ETHERNET szabvány
   - MANCHESTER kódolás
   - 50Ω-OS KOAX, (MAX 500m) 1-10MBIT/S ISMÉTLŐKKEL MAX 2,5KM.
   - HÁLÓKÁRTYA kell.
   - Kiosztás miatti ütközések kivédése.
     - a) MINDENKI VÁR 1 RÉSIDŐNYIT
     - b) AZ ÜTKÖZÉS SZÁMMAL EXPONENCIÁLISAN NŐ A KIVÁRÁSI IDŐ. 16 UTÁN HIBAJEL
   - KERETFORMÁTUMA:

ELŐTAG	START	CÍM (CÉL)	CÍM (ADÓ)	/	ADAT MAX ...	KITÖLTÉS	HIBAJAVÍTÓ KÓD (CHECKSUM)

2. VEZÉRJELES SÍN
   - IDŐOSZTÁSOS CSATORNA (FORGÓ PRIORITÁSSAL)
   - 75Ω-OS KOAX MAX 10Mb/s

• MINDENKI ISMERI A SZOMSZÉDJAI CÍMÉT
A PRIORITÁS FORGÁS HOZ KELL
• CSAK AZ ADHAT, AKINÉL A VEZÉRJEL VAN. (TOKEN)
• IDŐ KERET: küld a keretet
akkor aki jön: hogy ő jön.
• KERET:

ELŐTAG	START	VEZÉRLŐ	CÉL CÍM	FORR. CÍM	ADAT	HIBAJAVÍTÓ	END

③ VEZÉRJELES GYŰRŰ:

• KIS HÁLÓZATOKBAN
• VEZÉRJEL: SPEC. BITMINTA, AMI KÖRBE KERING (ADÁSSZÜNET)

• HA VALAKI ADNI AKAR: megvárja, míg hozzájut a vezérjel, és nem adja tovább, hanem kommunikál
• VEZÉRJEL TOVÁBBÍTÁSA, forgalmat kiiktathatna. Ezért elég sok host kell, hogy a teljes vezérjel elférjen benne.
• VEZÉRJEL KERET:

START	CÉLAZONOSÍTÓ / AZ VEZÉRLŐ	END

• ADAT KERET:

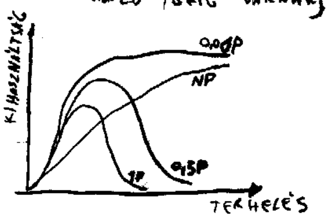
START	CÉLAZON. CÉLSEL.	S	CÉL CÍM	FORR. CÍM	ADAT	HIBAJAV. KÓD	EN D	F S

FRAME STATUSZ:
pl.: CÉL FOGADTA...
HANDSHAKING

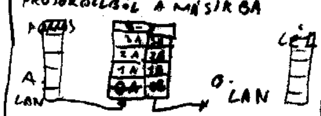
• CENTRALIZÁLT VEZÉRLÉS
1 IK A FELÜGYELŐ ÁLLOMÁS
HA valaki érzékelni, hogy nincs felügyelő, akkor ő ugrik be helyette.
• FELÜGYELŐ FELADATA:
vezérjelelvesztés (kábelszakadás), érvénytelen formátum figyelése,
• TÖBB FÉLE VEZÉRLŐKERET:
prioritásos felügyelői választás, újrainditás, szakadás felderítése, címek ellenőrzése, felügyelő van-e aktív/potenciális)

ALHÁLÓZATI ADATVONAL OSZTOTT HASZNÁLATA: KÖZEGHOZZÁFÉRÉSI PROTOKOLLOK
– TÖBBEN HASZNÁLJÁK (HOSTOK) UGYANAZT AZ ADATVONALAT
– HA FELSZABADUL A CSATORNA, AKKOR KI MIKOR KEZD ADNI?
(HALLGATJÁK, HOGY MIKOR SZABAD) EZ ALAPJÁN:
• 1 PERZISZTENS (1P)
HALLGATJA A CSATORNÁT, ÉS ADDIG VÁR AMÍG SZABAD NEM LESZ
HA SZABAD, AKKOR EGYBŐL AD
HA ÜTKÖZIK, AKKOR KICSIT VÁR, MAJD ÚJRA AD

• NEM PERZISZTENS (NEM 1) (NP)
HA FOGLALT, AKKOR VÁR BIZONYOS IDEIG (NEM ADDIG AMÍG SZABAD NEM LESZ)
MAJD AD.
HA ÜTKÖZIK, AKKOR ÚJRA VÁR.
• P-PERZISZTENS (1-P)
BELEHALLGAT. HA FOGLALT AKKOR VÁR, AMÍG SZABAD NEM LESZ
HA SZABAD, AKKOR P-VALÓSZÍNŰSÉGGEL KEZD ADNI. (KÜLÖNBÖZŐ IDEIG VÁR: KÜLÖNBÖZŐ HOST-OK KÜLÖNBÖZŐ IDEIG VÁRNAK)



HÁLÓZATKÖZI EGYÜTTMŰKÖDÉS: HÁLÓZATI RÉTEG
– HA A 2 GÉP MÁS HÁLÓZATBAN VAN, AKKOR BONYOLULTABB: FORGALOMIRÁNYÍTÁS, ELTÉRŐ PROTOKOLLOK, ELTÉRŐ RÉTEGEK, KÜLÖNBÖZŐ SZOLGÁLTATÁSOK ÖSSZEHANGOLÁSA (PL CÍMZÉSEK)
– RÉTEGEK, PROTOKOLLOK KÜLÖNBÖZŐSÉGET A GATEWAY-EK (ÁTJÁRÓK) HIDALJÁK ÁT.
– A GATEWAY-EK TARTALMAZZÁK MINDKET HÁLÓZATHOZ TARTOZÓ RÉTEGEKET, FELSŐBB RÉTEGEN, AHOL AZ ADATOK MÁR MEGFOGHATÓAK OTT MEGY ÁT AZ ADAT AZ EGYIK PROTOKOLLBÓL A MÁSIKBA



RÉTEGEK (OSI)

FIZIKAI RÉTEG
– ADATÁTVITEL, MATÁROLÁS
– 1 VEZETÉKEN TÖBB INFORMÁCIÓ:
• IDŐMULTIPLEX – STATIKUS
• FREQ MULTIPLEX – DINAMIKUS CSATORNAKIOSZTÁS
– ADATÁTVITELI MÓDOK:
• SODROTT ÉRPÁR pl telefon. nagyobb távolság ... erősítés
• KOAX KÁBEL zárt, zavarvédett 50/75 Ω
kisebb távolság nagy út a jel.
MANCHESTER kódolás,
AMPL. FREQ, FÁZIS-moduláció
1 GHz-ig 500 MHz
• OPTIKAI
– LEVEGŐN
– KÁBELEN
HAZÓ LED/LÉZER adó, fotodióda /FT. vevő.
nagy távolságú üzlapszállal kis csillapítás, nincs zavarás

• MIKROHULLÁMÚ ÁTVITEL (rádió)
nem kell vezeték, zavarérzékeny, freq spektrum véges, sok energia.
átjátszadókat is használhat:
földi vagy műholdas átjátszók.
Sávszélesség kihasználása:
freq multiplexelés, (kevés, modulált)
jellemző a moduláció típusa (analóg vagy digitálisból: időosztás.
statikus / dinamikus (Ordering)
ANALÓG ÁTVITEL
MODEMET kell alkalmazni (eredetileg digitális jelet a reg. vezeték)
modem és a reg. között adat vonalak (TRANSM./RECEIVER), és HANDSHAKING jelek vannak (adáskérés, kész nyugtázás, elfogadás, adat vonalon vétel, vétele az adatot. DTR RTS DSR CTS)
DIGITÁLIS ÁTVITEL
digitális jelsorozatok 1/0 nem tornak hibajavító kódot használhatók.
DIGITÁLIS INTERFÉSZ: (MODEM HELYETT HÁLÓZATI INTERF.)

SZ.	D	≡	D
G.	É	≡	É

MINT PL AZ USART (HASONLÓ)
HANDSHAKING JELEK VANNAK.
LEHETŐSÉG ADATTÖMÖRÍTÉSRE: pl: csak a különbségeket viszik át, az előzőhöz képest)
VONALAK: ADÁS, VÉTEL, VONALKERES,

ADATKAPCSOLATI RÉTEG:
HÁLÓZATOK — PONT-PONT — ÜZENETSZÓRÁSOS
MÁSKÉPP: (KÖZEGHOZZÁFÉRÉS)
a) STATIKUS CSATORNAKIOSZTÁS
az adott sávszélességet (időt) fixen rögzítjük a HOST-ok között.
kihasználtság nem jó, de egyszerű.
b) dinamikus csatornakiosztás:
a sáv (időszelet) adatközlésre dinamikusan adatkeretekkel
ideiglenesen az alhálózat osztott használata: (korábban)
TERVEZÉSI KÉRDÉSEK:
a) SZOLGÁLAT: A SZOMSZÉDOS RÉTEGGEL KOMMUNIKÁCIÓ
– ÖSSZEKÖTTETÉS ISMERETESEN
• NYUGTÁZÁSSAL
• ANÉLKÜL
– ÖSSZK-SES
• SZABVÁNYOS OSI primitívekkel: kérés, bejelentkezés, válasz, megerősítés.
b) KERETKÉPZÉS:
– a fizikai réteg nem bitfolyamokkal dolgozik. a keretek itt képződnek az adatokból
– hibajavítás, kódok...
c) kódvédelem:
hibajavítás. vezérlőkaraktereket kell visszaküldeni, hogy hibásan megérkezett az adat.
hibajavító kódok hozzáadása az adatokhoz. külön karakt. mező. pl CRC
adatot egy függvény alapján leképezi, egy kódolt adatot (az a hib. kód) az alapján ellenőrizni lehet, hogy az adat alapján az a kód lesz-e. (ellenőrzés)

d) forgalomszabályozás
nehogy túl gyorsan küldjük az adatokat. pl: n db keretet elküld, majd visszajelzésre vár. ha ez jött, akkor küldhet újabb n darabot. (TORLÓDÁS ELKERÜLÉS)
kell hozzá BUFFER.

e) KAPCSOLATMENEDZSELÉS
K. adminisztráció, K. konfiguráció (struktúra), forgalmazás rendje

HÁLÓZATI RÉTEG

TERVEZÉSI KÉRDÉSEK:

a) SZOLGÁLATOK a szállítási rétegnek:
- ÖSZEKÖTTETÉS MENTES:
PRIMITÍVEK: vedd, küld. adok, kérek. (felfelé)
- ÖSSZEK. ALAPÚ:
PRIMITÍVEK: HANDSHAKING: kérés, bejelentkezés, válasz, nyugtázás

b) CÍMZÉS
Meg kell különböztetni az egyes HOST-okat. De nem saját címmel, (OSI-BAN TÖBBEZER) hanem NSAP-cím:

országkód típusa	hatóság cím	hat. kiadta cím

- DATAGRAMMOS hálózatnál:
Minden adatcsomag fejléce tartalmazza a teljes célhoz-juttatáshoz az információt.
- VIRTUÁLIS ÁRAMKÖRÖS:
A kapcsolat kezdetekor egy adatcsomag tartalmazza az összes infót a célbajuttatáshoz. Utána is adatcsomagok vannak, de azok fejlécében már nincs benne a címinformáció, hanem csak pl: sorszám.
Az első FRAME felépíti az útvonalat

c) BELSŐ SZERVEZÉS
- az alhálózat szervezésével ez a réteg foglalkozik.
- SZERVEZÉS:
  - datagrammos
  - V.Á.

ÖSSZEHASONLÍTÁSUK:
VÁ: rövid CSOMAGOKRA jó

d) FORGALOMIRÁNYÍTÁS:
- csomagok útjának a kijelölése. (melyik csomag melyik vonalon...)
- követelmények: egyszerűség, robosztusság (érzéketlen a hibákra), stabilitás, hatékonyság (minél nagyobb forgalom)
- TORLÓDÁSKEZELÉS:
TORLÓDÁS: túl sok csomagot ír felül valaki más, egymásra ráfutnak a csomagok. pl: lassú vonalak
kiküszöbölés: megfelelő útválasztás...

e) HÁLÓZATKÖZI EGYÜTTMŰKÖDÉS: más leírásban nincs (másik lapon)

SZÁLLÍTÁSI RÉTEG!

FELADATOK:
- multiplexálás
- adatcsomag-méret optimalizálás (darabolás)

a) SZOLGÁLAT (minőségi rétegek)
- ÖK. alapú
- ÖK. mentes
ELFEDI a hálózat működésének részleteit: hibák, javítás, hálózati protokoll.
PRIMITÍVEK:
kérés, bejelentkezés, válasz, megerősítés, KAPCSOLÓDÁS, KAPCSOLAT BONTÁSA, ADAT

b) JELLEMZŐK:
- ÖK létesítési / lebontási késleltetés / hibavalószínűség
- átviteli késleltetés / hibaarány.

c) PRIMITÍVEK HASZNÁLATA:
csak megfelelő sorrendben hívhatók.
ÁLLAPOTOK:
- tétlen
- összeköttetés (kimenő/bejövő) függőben
- ÖK létrejött

d) SZÁLLÍTÁSI PROTOKOLLOK:
sokkal bonyolultabbak, mivel gyengébb a hálózati réteg szolgálata.
ELEMEI:
- ÖK. létesítése
- ÖK. visszautasítása
- üzenet továbbítása
- kapcsolat lebontása.

VISZONYRÉTEG: (ELŐTÉTNÉ KÖZÉS)

- felhasználóorientált szolgálatok
- párbeszéd szervezése, szinkronizáció...
FELADATOK:
a) SZOLGÁLATOK:
TIPIKUSAN ÖK. alapú.
- ÖK. megszakadása esetén újraélesztés...
b) ADATCSERE
kapcsolat létesítés / bontás.
c) KÖLCSÖNHATÁS MENEDZSELÉS:
pl váltott irányú kommunikáció szervezése
d) SZINKRONIZÁCIÓ:
SZINKRONIZÁCIÓS pontokat jelöl meg, ahová hiba esetén visszalép, és újrapróbálja. BUFFER.
e) tevékenységmenedzselés:
TRANSZFER-szervezés, megszakadás után újra kapcsolódás
f) KIVÉTELES HELYZETJELENTÉS:
pl: megszakadás, mert fél lefagyott ...

MEGJELENÍTÉSI RÉTEG:

- adatstruktúrák kezelése, titkosítás, tömörítés, kódolás, file-típusok...

ALKALMAZÁSI RÉTEG:

felhasználói magasszint, ezek miatt hozták létre a hálózatot
FELADATOK:
a) ÁLLOMÁNYTOVÁBBÍTÁS (FTP, HTTP...)
b) LEVELEZÉS
c) VIRTUÁLIS terminálok: gépek távoli kezelése (más HOST-ról)
d) több résztvevő munkájának összehangolása

9. fejezet

Hálózatok és rendszerek

4PÓLUS KARAKTERISZTIKÁK

TÍPUS, FAJTA	EGYENLET	PARAMÉTEREK	HA (kikötés)	MEGJEGYZÉS	RECIPROK	SZIMMETRIKUS
(ELLENTÉTES OLDALI ADATOK) ELLENÁLLÁS (R) (z)	$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{R}}\cdot\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}$ $U_1=R_{11}i_1+R_{12}i_2$ $U_2=R_{21}i_1+R_{22}i_2$	$R_{11}=U_1/i_1$ $R_{12}=U_1/i_2$ $R_{21}=U_2/i_1$ $R_{22}=U_2/i_2$	SZAKADÁSOS KIMENET ($i_2=0$) SZAKADÁSOS BEMENET ($i_1=0$) SZAKADÁSOS KIMENET SZAKADÁSOS BEMENET	BEMENŐ ELLENÁLLÁS → TRANSZFER ELLENÁLLÁS ← TRANSZFER ELLENÁLLÁS KIMENETI ELLENÁLLÁS	$R_{12}=R_{21}$	$R_{12}=R_{21}$, $R_{22}=R_{11}$
VEZETÉS (G)	$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{G}}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}$ $i_1=G_{11}U_1+G_{12}U_2$ $i_2=G_{21}U_1+G_{22}U_2$	$G_{11}=i_1/U_1$ $G_{12}=i_1/U_2$ $G_{21}=i_2/U_1$ $G_{22}=i_2/U_2$	RÖVIDREZÁRT KIMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET RÖVIDREZÁRT KIMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET	BEMENET VEZETÉS → TRANSZFER VEZETÉS ← TRANSZFER VEZETÉS KIMENETI VEZETÉS	$G_{12}=G_{21}$	$G_{12}=G_{21}$, $G_{11}=G_{22}$
HIBRID: HIBRID (H)	$\begin{bmatrix}U_1\\i_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{h}}\cdot\begin{bmatrix}i_1\\U_2\end{bmatrix}$ $U_1=h_{11}i_1+h_{12}U_2$ $i_2=h_{21}i_1+h_{22}U_2$	$h_{11}=U_1/i_1$ $h_{12}=U_1/U_2$ $h_{21}=i_2/i_1$ $h_{22}=i_2/U_2$	RÖVIDREZÁRT KIMENET SZAKADÁSOS BEMENET RÖVIDREZÁRT KIMENET SZAKADÁSOS BEMENET	BEMENETI ELLENÁLLÁS FESZÜLTSÉGVISSZAHATÁS ÁRAMERŐSÍTÉS KIMENETI VEZETÉS	$h_{12}=-h_{21}$	$\Delta h=\pm 1$
HIBRID: INVERZ HIBRID (K)	$\begin{bmatrix}i_1\\U_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{K}}\begin{bmatrix}U_1\\i_2\end{bmatrix}$ $i_1=K_{11}U_1+K_{12}i_2$ $U_2=K_{21}U_1+K_{22}i_2$	$K_{11}=i_1/U_1$ $K_{12}=i_1/i_2$ $K_{21}=U_2/U_1$ $K_{22}=U_2/i_2$	SZAKADÁSOS KIMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET SZAKADÁSOS KIMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET	BEMENETI VEZETÉS 1/ÁRAMERŐSÍTÉS (CSILL.) FESZÜLTSÉGERŐSÍTÉS KIMENETI ELLENÁLLÁS		
LÁNC (AZONOS OLDALI ADATOK): LÁNC (A)	$\begin{bmatrix}U_1\\i_1\end{bmatrix}=\underline{\underline{A}}\begin{bmatrix}U_2\\i_2\end{bmatrix}$ $U_1=A_{11}U_2+A_{12}i_2$ $i_1=A_{21}U_2+A_{22}i_2$	$A_{11}=U_1/U_2$ $A_{12}=U_1/i_2$ $A_{21}=i_1/U_2$ $A_{22}=i_1/i_2$	SZAKADÁSOS KIMENET RÖVIDREZÁRT KIMENET SZAKADÁSOS KIMENET RÖVIDREZÁRT KIMENET	1/FESZÜLTS.ERŐS. (CSILL.) 1/ÁRAMERŐS. (CSILL)	$\Delta A=\pm 1$	$A_{11}=A_{22}$
LÁNC: INVERZ LÁNC (B)	$\begin{bmatrix}U_2\\i_2\end{bmatrix}=\underline{\underline{B}}\begin{bmatrix}U_1\\i_1\end{bmatrix}$ $U_2=B_{11}U_1+B_{12}i_1$ $i_2=B_{21}U_1+B_{22}i_1$	$B_{11}=U_2/U_1$ $B_{12}=U_2/i_1$ $B_{21}=i_2/U_1$ $B_{22}=i_2/i_1$	SZAKADÁSOS BEMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET SZAKADÁSOS BEMENET RÖVIDREZÁRT BEMENET	1/FESZÜLTSÉGVISSZAHATÁS 1/ÁRAMVISSZAHATÁS		

EGYÉB: $R_{BE}=R_{11}-\dfrac{R_{12}R_{21}}{R_t+R_{22}}$

PASSZIVITÁS:

$\sqrt{R_{11}R_{22}}\geq\dfrac{R_{12}+R_{21}}{2}$

$P\geq 0$ PASSZ

<0; >0 $P<0$ AKTÍV

HASZNÁLT Φ-K ≠ A KERESETTEKKEL

ÉRTÉKEK →

$\Phi_4-\Phi_6$

$\dfrac{\Phi_A-\Phi_B}{R_x}$

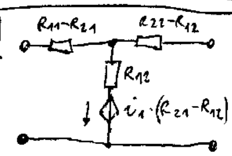
GIRÁTOR

$\underline{\underline{R}}=\begin{bmatrix}0&-r\\r&0\end{bmatrix}$

TRAFÓ

$\underline{\underline{h}}=\begin{bmatrix}0&n\\-n&0\end{bmatrix}$

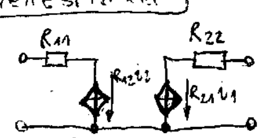
$\underline{\underline{R}}$



~~Ezt-be ezt kontrolláltatni!~~

HELYETTESÍTŐ KÉP

$\underline{\underline{R}}$



$\underline{\underline{R}}$

$\underline{\underline{G}}$

$\underline{\underline{h}}$

REZISZTÍV HÁLÓZATOK

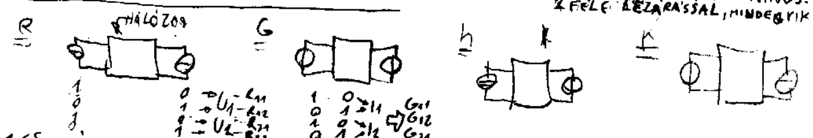
FESZÜLTSÉGEK SZÁMÍTÁSA:
- SZUPERPOZÍCIÓ
- EGYENLETRENDSZER
  - CSOMÓPONTI
  - HUROKÁRAMOK
  - GRÁFFAL
  - VEGYES
- ÁRAMOSZTÁS, FESZ. OSZTÁS
- FOLYAMATOS NORTON-THEVENIN ÁTALAKÍTGATÁSOK

SZUPERPOZÍCIÓ:
ANNYI HÁLÓZATTAL SZÁMOLUNK, AHÁNY FORRÁS VAN. MINDEN HÁLÓZATBAN CSAK 1 FORRÁS VAN, A TÖBBI DEZAKTIVIZÁLVA VAN:
ÁRAMF. ⇒ $o\!-\!X\!-\!o$ (0A)
FESZ ⇒ $o\!-\!o$ (0V)
A MARADÉK HÁLÓZAT FOLYAMATOS NORTON-TH, $\star$-Δ után számítható.
MINDEN SZÁMÍTÁSBÓL 1 ÉRTÉK: $U_1, U_2 \cdots U_n$
$$U_{IGAZI} = U_1 + U_2 + \dots U_n$$

CSOMÓPONTI EGYENLETRENDSZER:
- ELŐSZÖR MINDEN CSOMÓPONTRA 1 EGYENLET, MINDEGYIK CSP.-NAK 1 NÉV $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$
  KELL REFERENCIA PONT GND MINDENKI-EHHEZ KÉPEST VAN!
  pl: $\varphi_1 \dots$
$$\frac{\varphi_1 - \varphi_{szomszéd}}{R_{közte}} + \dots + I_{Ag} = 0$$
- ahol MINDEN ÁGHOZ 1 TAG KELL.
- HA 2 CSP. KÖZÖTT feszültségforrás VAN, AKKOR AZ EGYIKRE NEM KELL EGYENLET (CSÖKKEN AZ EGYENLETSZÁM)
- MAJD ÁTALAKÍTANI: $\left(\Sigma\left(\varphi \cdot \Sigma \frac{1}{R_i}\right) = -\Sigma I\right)$
$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_{köz1}} + \frac{1}{R_{köz2}} \dots\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{R_x}\dots\right) = 0 - I_{Ag1} \dots$$
$$\underbrace{\qquad}_{A} \quad \underbrace{\qquad}_{B} \quad \underbrace{\qquad}_{C}$$
MAJD AZ ÖSSZES EGYENLETBŐL
$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\varphi} = \underline{b} = \begin{pmatrix} A & B & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2 \\ \varphi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 - I_{Ag} \\ \dots \end{pmatrix}$$
EZT MEGOLDANI φ-RE:
$$\underline{\varphi} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b} \Rightarrow \varphi \Rightarrow \boxed{U_{AB}}$$
- HA 2 CSP. KÖZÖTT ÁRAMFORRÁS VAN, AKKOR AZT EGYSZERŰEN BEVESSZÜK AZ ELEJÉN AZ EGYENLETBE $\frac{\varphi - \varphi}{R}$ HELYETT

HUROKÁRAMOK MÓDSZERE:
- MINDEN HUROKNAK 1 NÉV $(J_1 \dots J_n)$
- ÚGY VESSZÜK MINTHA MINDEN HUROKHOZ 1 ÁRAM TARTOZNA $(J_1 \dots J_n)$
- 1 ALKATRÉSZ 2 (TÖBB) HUROKHOZ IS TARTOZHAT UGYANKOR:
  pl R_1-en
  $I_1 = J_1 - J_2$
- AZ EGYENLETEK:
  HUROKTÖRVÉNY: $\Sigma U = 0$
  $$\Sigma R \cdot I = \Sigma(R \cdot \Sigma J) = 0$$
- HA ÁRAMFORRÁS VAN: R_1-helyén (az előbbi rajz) akkor $I_b = J_1 - J_2$ az egyikre nem kell egyenlet. CSÖKKENT AZ EGYENLETSZÁM
- HA FESZFORRÁS VAN, AKKOR EGYSZERŰEN BEVESSZÜK AZ EGYENLETBE $R \cdot \Sigma J$-helyett.
- ALAK: $R_1(J_1 - J_2) + R_2(J_1 + J_3) + \dots + U_1 = 0$
- ÁTALAKÍT MINT IT
  $J_1(R_1 - R) + J_2(R_1 + R_3 + R_4) = -U_1$
  $\Sigma(J_i \Sigma R) = -\Sigma U$
- MÁTRIXOSAN ÉS MEGOLDANI
  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{J} = \underline{b} \Rightarrow J \Rightarrow \boxed{I}$

KARAKTERISZTIKA MEGHATÁROZÁSA:
MINDIG OLYAN FORRÁST ODA, AMI A TERMÉSZETES HELYETTESÍTŐKÉPEN NINCS. ÉRTÉKE: 1A, 1V, 0A, 0V
2 FÉLE LEZÁRÁSSAL, MINDEGYIKNÉL 2 ADAT LESZ (U, I), EZUTÁN A PARAM.



$\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ PARAMÉTERENKÉNT

1 0 ; 0 1 ; → $U_1 \to R_{11}$, $U_2 \to R_{21}$, R_{12}, R_{22}
1 0 ; 0 1 → I_1, I_2 ⇒ G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}

1 CSOMÓPONTI EGYENLETRENDSZERT, MAJD KÜLÖNBÖZŐ FORRÁSNEMEKET SÉGEKET BEHELYETTESÍTENI. (0 és $1 = U_1$)

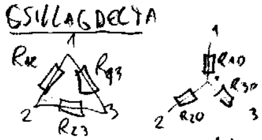
MILMAN TÉTEL (PÁRHUZAMOS FESZÜLTSÉGGENERÁTOROK)
$$U_0 = \frac{\Sigma \frac{U}{R}}{\Sigma \frac{1}{R}}$$

GENERÁTOR ÁTALAKÍTÁS:
HA SOROSAN VANNAK: $U_T = \Sigma U_S$ vagy $\Sigma R_b I_S$; $R_b = \Sigma R_b$ ⟶ EBBŐL I_N
HA PÁRHUZAMOSAN: $I_N = \Sigma I_S$ vagy $\Sigma \frac{U_S}{R_b}$; $R_b = 1/\Sigma \frac{1}{R_b}$

$$P_{max}(R_t) = \frac{U_S^2}{4R_b}$$
ha $R_b = R_t$

GEN. MEGHATÁROZÁS:
U_T: CSOMÓPONTI POT, SZUPERPOZ,
R_b: DEZAKTIVIZÁL VAGY LEZÁRJUK SZAKADÁSSAL ÉS RÖVIDZÁRRAL, VAGY SZAKADÁSSAL ÉS R_t-VEL.
$$R_b = \frac{U}{I} = \frac{U_S - U_{Rt}}{U_{Rt}/R_t}$$

CSILLAG DELTA



$$R_{10} = \frac{R_{31}R_{12}}{R\Delta}$$
$$R_{12} = \frac{R_{10}R_{20}}{R_Y}$$
$R\Delta = R_{12} \times R_{23} \times R_{31}$
$R_Y = R_{10} \times R_{20} \times R_{30}$
$R\Delta = 3R_Y$

FESZOSZTÁS
$$U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1 \times R_2 \times R_3}{R_2 R_3}$$
$$U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

ÁRAMOSZTÁS!
$$I_1 = \frac{R_1 \times R_2 \times R_3}{R_1}$$
$$R_1 \times R_2 \times R_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$
$$I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

GRÁF:
FAÁG: U, R
KÖTÉL: I, R

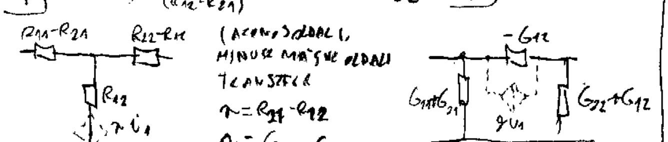
HELYETTESÍTŐ KÉP
T → Π
CSILLAGDELTÁVAL

KARAKTERISZTIKA VÁLTÁS
pl. - MIVEL VAN MEGADVA?
- $U_1 U_2$ MIVEL KELL?
- $I_1 U_2$ U_1 I_1-MMEL,
$U_1 I_1$ AZ EREDETIBŐL KIFEJEZNI, HOGY U_1 $I_1 U_2$-VEL LEGYEN KIF.
VAGY CSAK SIMÁN KIFEJEZNI AZ ELSŐBŐL

RECIPROCI / SZIMM.
R $\underline{\underline{Z}}$: $R_{12} = R_{21}$
G: $G_{12} = G_{21}$
h: $h_{12} = -h_{21}$; $\Delta h = \pm 1$
A: $\Delta A = \pm 1$
FELTÉTELEK

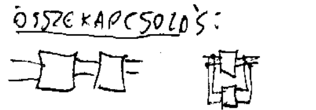
LEZÁRÁS
$R_{BE} =$
$$R_{11} - \frac{R_{12}R_{21}}{R_t + R_{22}}$$
KIMENETRŐL HELYETTESÍTVE AZ EGÉSZET:
R_{BE}? THEVENIN GENERÁTOR KELL?
$$U_{T2} = \frac{R_{21} U_T}{R_{11} + R_b}$$
$$R_{b2} = R_{22} - \frac{R_{21}R_{12}}{R_{11} + R_b}$$

T) - RECIPROKNÁL NEM KELL ($R_{12} = R_{21}$)   Π)



(A CONTROLLED OLDAL, MINUSZ MÁSIK OLDAL TRANSZFER)
$r = R_{21} - R_{12}$
$g = G_{21} - G_{12}$

ÖSSZEKAPCSOLÓS:



$\underline{\underline{A}}_e = \underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_2$
$G_e = G_1 + G_2$

HA FORRÁS IS VAN BENNE, AKKOR HIBRID T, VAGY HIB. Π
REC: T, Π SZIM. X → MIDKAPCSOLÓS
NEMREC: hT, hΠ, TERMÉSZETES (RECIPROK LESZ)

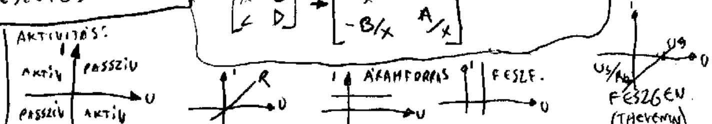
R → G INVERTÁLÁS $x = AD - BC$
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} D/x & -B/x \\ -C/x & A/x\end{bmatrix}$$

ÁRAMGEN (NORTON)

HA I_R és U_R =?
AKKOR LEHET ÍGY SZÁMOLNI: I - RÖVIDZÁRRAL, U - SZAKADÁSSAL ABBÓL NORTON/TEH → U, I

EKVIVALENCIÁK:
$o\!-\!o$ = (0V feszforrás) = (0 Ω ellenállás)
$o\!-\!X\!-\!o$ = (0A áramforrás) = (∞ Ω ellenállás)

AKTIVITÁS:



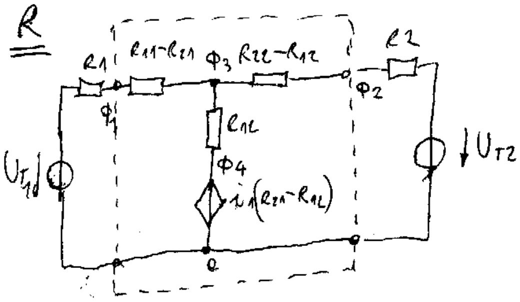
LEZÁRT 4PÓLUSOK

FESZÜLTSÉGEK KISZÁMÍTÁSA

T-KÉP

A RÁKAPCSOLT DOLGOKNAK A TEVENIN HELYETTESÍTŐ KÉPÉT KELL VENNI!

R



$$I_1 = \frac{\Phi_1-\Phi_3}{R_{11}-R_{21}}$$

CSP:

$\boxed{\Phi_1\text{-re}}$

$$\frac{\Phi_1-U_{T1}}{R_1}+\frac{\Phi_1-\Phi_3}{R_{11}-R_{21}}=0$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{11}-R_{21}}\right)+\Phi_3\cdot\left(\frac{-1}{R_{11}-R_{21}}\right)=\frac{U_{T1}}{R_1}$$

$\boxed{\Phi_2\text{-re}}$

$$\frac{\Phi_2-U_{T2}}{R_2}+\frac{\Phi_2-\Phi_3}{R_{22}-R_{12}}=0$$

$$\Phi_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_{22}-R_{12}}\right)+\Phi_3\cdot\left(\frac{-1}{R_{22}-R_{12}}\right)=\frac{U_{T2}}{R_2}$$

HA VAN VISSZACSATOLÁS, AKKOR A CSP-BE AZT IS BE KELL VENNI!

$\boxed{\Phi_3\text{-ra:}}$

$$\frac{\Phi_3-\Phi_1}{R_{11}-R_{21}}+\frac{\Phi_3-\Phi_4}{R_{12}}+\frac{\Phi_3-\Phi_2}{R_{22}-R_{12}}=0$$

$$\Phi_1\left(\frac{-1}{R_{11}+R_{21}}\right)+\Phi_2\cdot\left(\frac{-1}{R_{22}-R_{12}}\right)+\Phi_3\left(\frac{1}{R_{11}-R_{21}}+\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{22}-R_{12}}\right)+\Phi_4\cdot\left(\frac{-1}{R_{12}}\right)=0$$

$\boxed{\Phi_4\text{-re}}$

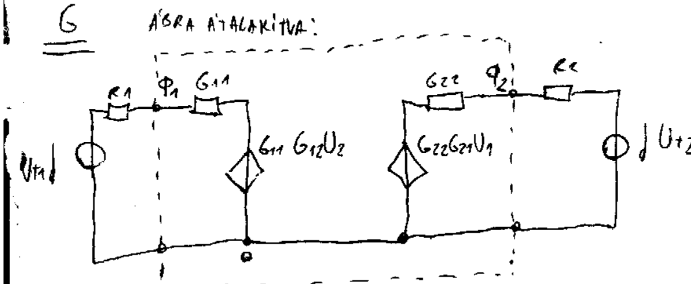
$$\frac{\Phi_4-\Phi_3}{R_{12}}+i_1(R_{21}-R_{12})=0=\frac{\Phi_4-\Phi_3}{R_{12}}+\frac{\Phi_1-\Phi_3}{R_{11}-R_{21}}(R_{21}-R_{12})=0$$

$$\Phi_1\left(\frac{-(R_{21}-R_{12})}{R_{11}-R_{21}}\right)+\Phi_3\left(\frac{-(R_{21}-R_{12})}{R_{11}-R_{21}}+\frac{-1}{R_{12}}\right)+\Phi_4\cdot\frac{1}{R_{12}}=0$$

ÁRAMOK: R_1-EN, ÉS R_2-LÉVŐ FESZÜLTSÉGEBŐL.

EZEKET MÁTRIXBA, ÉS KÉSZ AZ EREDMÉNY

G ÁBRA ÁTALAKÍTVA:



$\boxed{\Phi_1\text{-re}}$

$$\frac{\Phi_1-U_{T1}}{R_1}+\frac{\Phi_1-G_{11}G_{12}\Phi_2}{G_{11}}=0$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{G_{11}}\right)+\Phi_2\left(-\frac{\cancel{G_{11}}G_{12}}{\cancel{G_{11}}}\right)=\frac{U_{T1}}{R_1}$$

$\boxed{\Phi_2\text{-re}}$

$$\frac{\Phi_2-U_{T2}}{R_2}+\frac{\Phi_2-G_{22}G_{21}\Phi_1}{G_{22}}=0$$

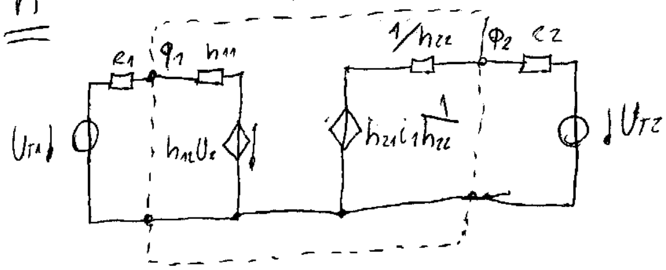
$$\Phi_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{G_{22}}\right)+\Phi_1\left(-\frac{\cancel{G_{22}}G_{21}}{\cancel{G_{22}}}\right)=\frac{U_{T2}}{R_2}$$

EZEKET MÁTRIXBA, ÉS KÉSZ.

ÁRAMOK: R_1, R_2, U_{R1}, U_{R2}-BŐL

h

ÁGRA ÁTALAKÍTVA:



$$i_1 = \frac{U_{T1} - \Phi_1}{R_1}$$

$\boxed{\Phi_1\text{-re:}}$

$$\frac{\Phi_1 - U_{T1}}{R_1} + \frac{\Phi_1 - h_{12}\Phi_2}{h_{11}} = 0$$

$$\Phi_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{h_{11}}\right) + \Phi_2 \cdot \left(\frac{-h_{12}}{h_{11}}\right) = \frac{U_{T1}}{R_1}$$

$\boxed{\Phi_2\text{-re:}}$

$$\frac{\Phi_2 - U_{T2}}{R_2} + \frac{\Phi_2 - h_{21}\hat{h}_{22} \cdot \frac{U_{T1} - \Phi_1}{R_1}}{h_{22}} = 0 = \frac{\Phi_2 - U_{T2}}{R_2} + \frac{\Phi_2 - \frac{h_{21}\hat{h}_{22}}{R_1} U_{T1} + \frac{h_{21}\hat{h}_{22}}{R_1}\Phi_1}{h_{22}}$$

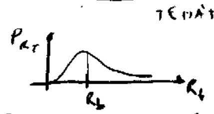
$$\Phi_1 \cdot \left(\frac{h_{21}\cancel{h_{22}}}{R_1 \cancel{h_{22}}}\right) + \Phi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{h_{22}}\right) = U_T \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{h_{21}\cancel{h_{22}}}{R_1 \cancel{h_{22}}}\right)$$

$$\Phi_1 \left(\frac{h_{21}}{R_1}\right) + \Phi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{h_{22}}\right) = U_T \left(\frac{1}{R_2} + \frac{h_{21}}{R_1}\right)$$

EZT BELE A MÁTRIXBA, ÉS K☺.

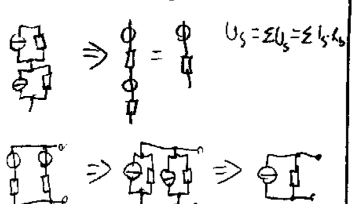
TELJESÍTMÉNYILLESZTÉS

TEHÁT $P = MAX$, HA $R_t = R_b$ $\left(\frac{dP}{dR_t} = 0\right)$



$$P_{RT_{MAX}} = \frac{U_S^2}{4R_b}$$

GENERÁTORÁTALAKÍTÁS

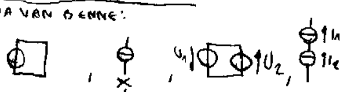


$U_S = \Sigma U_S = \Sigma I_S \cdot R_b$

$I_S = \Sigma I_S = \Sigma \frac{U_S}{R_b}$

MEGOLDHATATLAN HÁLÓZAT:

HA VAN BENNE:



EZEK STRUKTURÁLISAN NEM REGULÁRISAK PARAMETRIKUSAN:

$R + -R = 0$

GRÁFOLÁS (FÁZÁS)

- KAPCSOLÁS ALAPJÁN FELRAJZ. 1 GRÁFFÁT
- RÉSZEI:
  CSOMÓPONT, FA ÁG (FESZFORRÁS, R, RÖVIDZ.) KÖTÉL (ÁRAMFORRÁS, R, SZAKADÁS
- ÚGY KELL FELRAJZOLNI ÁGAKKAL ÉS CSOMÓPONTOKKAL, HOGY ZÁRT HURKOK NE LEGYENEK.
- CSOMÓPONTOKAT ÉS ÁGAKAT ELNEVEZNI!
- MINDEN ÉLNEK 1 KARAKTERISZTIKA

- EGYENLETEK!
  1 (VAGY TÖBB) CSOMÓPONTOT KÖRBERAJZOLUNK (VÁGÁT) ÚGY, HOGY 1 VÁGÁT CSAK 1SZER METSZ ÉS A CSOMÓP. EGY.-HEZ HASONLÓAN MINDEN METSZETT ÁG 1 TAG 1 VÁGÁT EGYENLETÉBEN
  AZ ÁGAKON ÁRAM FOLYIK: $\Sigma I = 0$

  $\boxed{\text{KIFOLYÓ ÁRAM A} +}$

  TAGOK:

  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{KÖZTI}}$ AHOL φ_1 BENT VAN, φ_2 KINT VAN

  ÉS AZ ADOTT ÁGHOZ EZ A 2 TARTOZIK
- ANNYI EGYENLET, AHÁNY ÁG MÍNUSZ A FESZFORRÁSOK SZÁMA!
- NE A FESZFORRÁS ÁGÁT METSSZÜK!
- LEHET HUROKÁRAMOSAN IS

4PÓLUS PARAMÉTEREK:

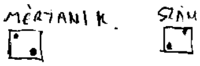
- MIRE JÓK?:
  Ha 2 ADATOT ADUNK, pl RÖVIDZÁR, UBE, akkor A másik 2 segítségükkel meghatározható.
- hogy határozzuk meg?!
  a 2 adatot megadjuk, és a másik 2-t keressük, hogy a belső kapcsolás alapján kiszámoljuk.
- ADAT MEGHATÁROZÁSA:
  felrajzoljuk a helyettesítő képet, most az alapján (CSAK OHM TÖRVÉNY KELL) meghatározhatjuk az adatokat.
- KARAKTERISZTIKAVÁLTÁS:
  pl: kell R_{11}, akkor $R_{11} = \frac{U_1}{i_1}$ $i_2 = 0$ átkapcsoljuk az [redacted] ADOTT KARAKTERISZTIKÁNAK MEGFELELŐ HELYETTESÍTŐ KÉPRE, $i_2 = 0$-t, $i_1 = 1A$-t rákapcsoljuk, U_1-et meghatározzuk. $R_{11} = \frac{U_1}{i_1}$ KISZÁMOLJUK.
  ÍGY A TÖBBIT IS.
- KARAKTERISZTIKAMEGHATÁROZÁS:
  MINDEN PARAMÉTERHEZ 3 ADAT TARTOZIK pl $R_{11} = \frac{U_1}{i_1}$ $i_2 = 0$ ebből 2-t megadunk: 1A, 1V, 0A, 0V (a 3.-at mindenképpen) és 1 adatot így kiszámolunk: CSP. H.Á, OHM TÖRV.

4PÓLUS PASSZÍV, HA:

R-helyett ugyanez h-val is!

$$\sqrt{R_{11}R_{22}} \geq \frac{R_{12} + R_{21}}{2}$$

MÉRTANI K. SZÁMTANI K.



MÉRTÉKEGYSÉGRENDSZEREK: $\frac{1}{\omega^2} = \frac{\tau}{L} = \frac{1}{LC}$

V, A, Ω, F, H, Hz,

V, mA, kΩ, μF, kHz, ms, H, krad/s

OHM TÖRV. $R \cdot C = \tau$ $1/x$ $L = \tau \cdot R$

SZINUSZOS HÁLÓZATOK

$Hz \Rightarrow \frac{RAD}{s}$

$\bar{U} ? = \bar{Z}\bar{I}$ $\quad z = R + jX$

$I = \hat{I} = \hat{I} e^{j\varphi} \to \hat{I}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = a + jb \Rightarrow \bar{U} = (R + jX)\cdot(a + jb)$

FESZÜLTSÉG, ÁRAM:

HA $u_{(t)} = \hat{U}\cos(\omega t)$ akkor $i_{(t)} = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$

$\hat{U}$ – U KOMPLEX CSÚCS: $\hat{U} = \hat{U} e^{j\varphi}$

U – U EFFEKTÍV $\quad U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ (EFF)

U KOMPLEX EFFEKTÍV: $\bar{U} = \frac{\hat{\bar{U}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$

$$u_{(t)} = Re\{\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}\} = Re\{\sqrt{2}\,\bar{U} e^{j\omega t}\} = Re\{\hat{\bar{U}} e^{j\omega t}\}$$

$\boxed{\hat{U} = |\hat{\bar{U}}|}$ $\quad \bar{Z} = |\bar{Z}| e^{j\varphi}$

MEGOLDÁS:
- HARMONIKUS ANALÍZIS:
  HUROK, CSOMÓPONTI TÖRVÉNYEK: $R \cdot i + L \cdot \dot{i} + U_c \ldots = \Sigma U$; $\dot{U}/R + C \cdot \dot{U} \ldots = \Sigma I$
- KOMPLEX.

$i_{(t)} = Re\{\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}\}$

DERIVÁLÁS: $\left(Re\{\hat{\bar{U}} e^{j\omega t}\}\right)' = Re\{j\omega \hat{\bar{U}} e^{j\omega t}\} = U_t'$

$Re\{e^{j\omega t}\} = \cos\omega t$ $\quad (\ )' \to j\omega(\ )$ $\quad \boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$

KOMPLEX SZÁMOK: $Re^{j\varphi} = R(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R\cos\varphi + jR\sin\varphi = a + jb$ $\quad \frac{\hat{A}}{j\omega C} = -j\frac{A}{\omega C}$

$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + j(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\quad \frac{1}{Z} = \frac{Z^*}{|Z|^2}$

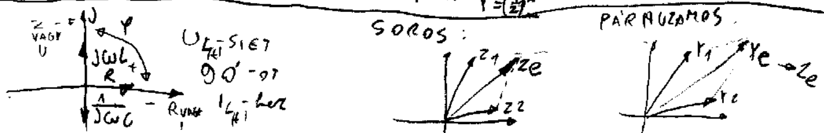
HÁLÓZATI EGYENLETEK: $\bar{U} = \bar{Z}\cdot\bar{I} \to \hat{\bar{U}} = \bar{Z}\cdot\hat{\bar{I}}$ $\quad \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$

TÖRVÉNYEK:
- KIRCHOFF: ~~[illegible]~~ $\bar{U}, \hat{\bar{U}}, U_t$
- OHM: U_t, $\hat{\bar{U}}, U_t, \hat{U}, U$

} ~~EREE~~ ÉRVÉNYES

ELEMEI: $\bar{U}, \bar{I}, R, j\omega L, \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ $\quad Z_{e\,soros} = \Sigma Z$

$Z_{e\,párhuzamos} = Z_1 \times Z_2 \times Z_n \to |Y|_e = \frac{1}{|Z|_d}$ $\boxed{\varphi_Z = -\varphi_Y}$ $\quad Y = \frac{1}{|Z|^*}$ $\quad Y_e = Y_1 + Y_2 + Y_n$ $\quad Z_e = \frac{1}{\Sigma\frac{1}{Z}}$ $\quad \Sigma\frac{Z^*}{|Z|^2} = Z_x \to \frac{Z_x^*}{|Z_x|^2} = Z_e$



$\bar{U}_L = \bar{X}_L \bar{I} = j\omega L\bar{I}$

$\bar{U}_C = \bar{X}_C \bar{I} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$

$U_{C_t} = \frac{1}{C}\int_0^t i_C\, dt = 0$

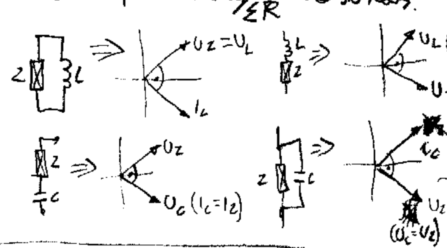
$Z + Z^* = 2Re\{Z\}$; $j = e^{j90}$; $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90)$; $Z \cdot Z^* = |Z|^2$

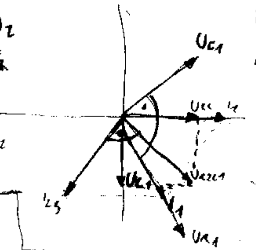
$X_C = \frac{1}{j\omega C}$ $\quad X_L = j\omega L = 0 + j\omega L$ $\quad \bar{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}_C$

$Z = R + X = \Sigma R + \Sigma X$

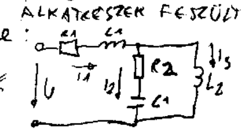
$\to \varphi = arctg\frac{\Sigma X}{\Sigma R}$ ha soros. $\quad$ HA PÁRHUZAMOS: $\varphi = arctg\frac{\Sigma 1/X}{\Sigma 1/R}$

FAZORÁBRA (TETSZŐLEGES ELEMHEZ) (FORGÓVEKTOR) VISZONYÍTANI (ÁRAMOSZTÓ?) ALKATRÉSZEK FESZÜLTSÉGEI, $\bar{Z}$, $\bar{I}$.





pl.:



R_2-től: IR_2, UR_2, UC_1 (A) UR_2C_1 (B), IL_2 (B), I_{S,L_2} (B) → I_1, (B), UR_1, UL_1 (B) $U = U_{R1} + U_{L1} + U_{L2}$

2 ALKATRÉSZ KÖZÖTT EGYIK (U,I) KÖZÖS, A MÁSIK NEM (R,L → 0°, ±90)

EGYENLETRENDSZEREK:

Z_e $\quad Z_e = R_2 \times j\omega L + R_1$ $\quad R_1 = 10 \quad R_2 = 10 \quad \omega L = 10$

$Z_1 = R_2 \times j\omega L = \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} =$ [redacted]

$= \frac{0,5j}{10 + 10j} = \frac{Z_K}{Z_1} = \ldots$

CSATOLT TEKERCSEK:

$\begin{bmatrix}\bar{U}_1 \\ \bar{U}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{I}_1 \\ \bar{I}_2\end{bmatrix} j\omega \quad M \to \pm M$

KAPCSOLÁSBAN: AZ $\bar{U}_{L1}$ helyére (HUROKÁRAMOK): $L_1\bar{I}_1 + M\bar{I}_2$, AHOL $\bar{I}_1, \bar{I}_2$ AZ OTT TÉNYLEGESEN FOLYÓ ÁRAMOK: $(J_i - J_k)$

KOMPLEX EFF, R, REAKTANCIÁK

HUROKÁRAMOS: ÖSSZEGZÉS: $\bar{U}_S, R(\bar{I}_i + \bar{I}_k), j\omega L(\bar{I}_i + \bar{I}_k), \frac{I_i + I_k}{j\omega C}$

CSOMÓPONTI: ÖSSZEGZÉS $\bar{I}_S, \frac{\varphi_i - \varphi_k}{R}, j\omega C(\varphi_i - \varphi_k), \frac{(\varphi_i - \varphi_k)}{j\omega L}$

LEHET 1 HÁLÓZATRA VEGYES EGYENLETRENDSZERT IS.

WHEATSTONE HÍD: KIEGYENLÍTÉS: $|\bar{Z}_1||\bar{Z}_4| = |\bar{Z}_2||\bar{Z}_3|$, $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$

RÉZGŐKÖRÖK:

SOROS $\quad \varphi = arctg\frac{\Sigma X}{\Sigma R}$

$i_L = i_R = i_{C(t)}$ $\quad |\bar{Z}_e| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

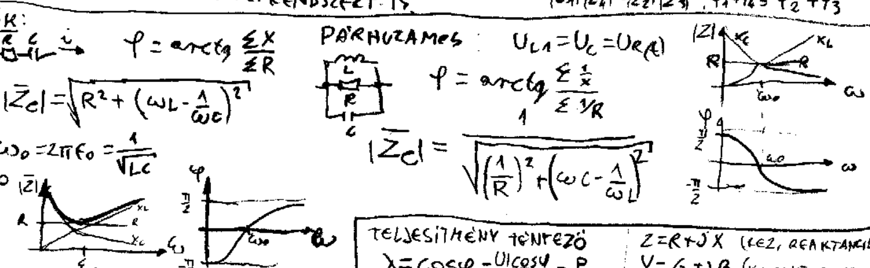
REZONANCIA $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\to Z = R$, $\varphi = 0$

PÁRHUZAMOS $\quad U_{L1} = U_C = U_{R(t)}$

$\varphi = arctg\frac{\Sigma\frac{1}{X}}{\Sigma 1/R}$

$|\bar{Z}_e| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$



MINDIG:

SOROS: $|\bar{Z}| = \sqrt{(\Sigma R)^2 + (\Sigma X)^2}$

$\varphi = arctg\frac{X}{R}$

PÁRH.: $|\bar{Z}| = \frac{1}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\Sigma\frac{1}{X}\right)^2}}$

$\varphi = arctg\frac{\Sigma 1/X}{\Sigma 1/R}$

TELJESÍTMÉNY TÉNYEZŐ $\quad \lambda = \cos\varphi = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \frac{P}{S}$

$Z = R + jX$ (REZ, REAKTANCIA) $\quad Y = G + jB$ (KONDUKT, SZUSZCEPT)

TELJESÍTMÉNY: ϑ – BEKAPCSOLÁSKOR U PILLANATNYI FÁZISA

PILLANATNYI: $P_{(t)} = UI\cos\varphi + \cos(2\omega t + 2\vartheta - \varphi)$ $\quad \varphi$ – U eltolódott

$P_{(t)} = U_{(t)}\, i_{(t)}$ $\quad U, I$ EFFEKTÍV

MEDDŐ (Q) [VAr]

$\cos(2\omega t + 2\vartheta - \varphi) = \cos(2\omega t + 2\vartheta)\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\vartheta)$

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$

$P_{(t)} = UI\cos\varphi \cdot (1 + \cos(2\omega t + 2\vartheta)) + UI\sin\varphi \sin(2\omega t + 2\vartheta)$

KAPUK DARMÉTEREK IS KOMPLEXEK: $\bar{Z}_{12} = R_{12} + jX_{12}$

PASSZÍV, HA: $\sqrt{R_{11}R_{22}} \geq \frac{R_{12} + R_{21}}{2} + \frac{X_{21} - X_{12}}{2}$

HATÁSOS: $P = UI\cos\varphi = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T P_{(t)}\, dt$ $\quad$ A FENTIBEN A 2. TAG 1T-RE: 0

$T = \frac{1}{f}$ $\quad$ [W] $\quad \Sigma P = 0$ (TELEGEN)

LÁTSZÓLAGOS: $S = UI$ (EFF) [VA]

$S = \hat{U}\hat{I}/2 = |\bar{S}|$

KOMPLEX [VA] $\quad \bar{S} = P + jQ$

$\bar{S} = \frac{\hat{U}\hat{I}^*}{2} = \bar{U}\bar{U}^*/\bar{Z}^* = \bar{U}\bar{I}^*$

$Q < 0$ KAPACITÍV $\quad P > $ PASSZÍV

$Q > 0$ INDUKTÍV $\quad P = 0$ $Q \neq 0$ REAKTÁNS

$P = |\bar{I}|^2 Re\{Z\} = |\bar{U}|^2 Re\{Y\}$ $\quad P = 0$ $Q = 0$ NON ENERGIKUS

TELJESÍTMÉNY ILLESZTÉS: P_{max}, HA $\bar{Z}_t = \bar{Z}_b^*$

$P_{max} = |\bar{U}|^2/4R_b$

HÁLÓZATI EGYENLETEK (CSP., HÁ)

- rezisztív hálózatnál csak R- volt, de most van R, $\frac{1}{j\omega C}$, $j\omega L$ is.
- Az áramok és feszültségek, amikkel számolunk KOMPLEX effektív értékek.
- A Kirchhoff egyenletek helyett lehet FAZORÁBRÁZOLNI, DE JÓK ITT IS, CSAK KOMPLEXEK
- Z_C levezetése:

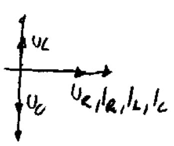
$i_C = C \cdot \dot{U}_C = C \cdot j\omega U_C \Rightarrow Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C}$

- $\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$
- 4 PÓLUS HA VAN AZ ÁRAMKÖRBEN: MINDIG A KARAKTERISZTIKÁT, VAGY A HELYETTESÍTŐ KÉPET HASZNÁLJUK !!!
- EZ A SZINUSZOS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT
- EGYENLETEK:
  1. ÖSSZEKAPCSOLÁSI KÉNYSZEREK (KIRCHOFF) $\Sigma I = 0$ $\Sigma U = 0$
  2. ÁGTÖRVÉNYEK (OHM) $\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$
- U_L siet I_L-hez képest, U_C késik I_C-hez képest

$I_C \equiv I_R$ fázisban el

$I_L \equiv I_L$ –"–

R L C



- $|\overline{Z}| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{Z\})^2 + (\mathrm{Im}\{Z\})^2}$

$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{Re}\{Z\}}{\mathrm{Im}\{Z\}}$

$Z = R + jX$ ← REAKTANCIA
REZISZTANCIA

- KONDIN, TEKERCSEN $W = 0$ EGÉSZ PERIÓDUSRA

- U_1 [W] U_2 $\quad W = \frac{U_2}{U_1}$

ÁTVITELI TÉNYEZŐ

- MINDIG ADOTT FREKVENCIÁN
- MEGOLDÁS
  1. KVALITATÍV: FÁZORÁBRA
  2. KVANTITATÍV KOMPLEX EGYENLETRENDSZER
- ÖSSZEGZÉS

Z_1 Z_2 $\quad Z_e = Z_1 + Z_2$

Y_1 Y_2 $\quad Y_e = Y_1 + Y_2$

- TELJESÍTMÉNYEK: ρ - INDULÓ FÁZISSZÖG (RAD)

$p(t) = u(t) \cdot i(t)$

$= U \cdot \sqrt{2} \cos(\omega t + \rho) \cdot I \cdot \sqrt{2} \cos(\omega t + \rho - \varphi)$

$= 2UI \cos(\omega t + \rho) \cdot \cos(\omega t + \rho - \varphi)$

$(2\cos\alpha \cos\beta = \cos\alpha - \beta$ EZÉRT:)

$\boxed{p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + 2\rho - \varphi)}$

$= UI\cos\varphi + \cos[2(\omega t + \rho)]\cos\varphi + \sin[2(\omega t+\rho)]\sin\varphi$

$= \underbrace{UI\cos\varphi}_{P} \langle 1 + \cos[2(\omega t + \rho)] \rangle + \underbrace{UI\sin\varphi}_{Q} \sin[2(\omega t + \rho)]$

$= P\langle 1 + \cos[2(\omega t + \rho)] \rangle + Q \cdot \cos[2(\omega t + \rho - 90°)]$

- TELLEGEN: $\Sigma Q = 0$

$Q < 0$ KAPACITÍV $\quad Q > 0$ (INDUKTÍV)

- $Z = R + jX \qquad Y = G + j \cdot B$
- PASSZIVITÁS (2 PÓLUS)

$P > 0$ PASSZÍV

$P = 0$ { $Q \neq 0$ REAKTÁNS; $Q = 0$ NON ENERGIKUS }

$P < 0$ AKTÍV

2 KAPURA

$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{R}} + j\underline{\underline{X}}$

PASSZÍV, HA:

$\sqrt{R_{11} \cdot R_{22}} > \frac{R_{12} + R_{21}}{2} + \frac{X_{21} - X_{12}}{2}$

- TELJESÍTMÉNYILLESZTÉS:

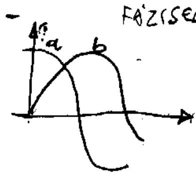
P_{max}, HA $\overline{Z}_t = \overline{Z}_b^*$

$P_{max} = \frac{\overline{U}_T^2}{4R_b} \sim (\mathrm{Re}\{U_t\})^2$

- HÍD KIEGYENLÍTÉS

Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 $\quad |\overline{Z}_1||\overline{Z}_4| = |\overline{Z}_2||\overline{Z}_3|$ ÉS $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$

FÁZISELTOLÁS



$a = A\cos(\omega t)$

$b = B\cos(\omega t + 90)$

$= B\sin(\omega t)$

RC) $\quad \tau = R \cdot C$

RL) $\quad \tau = \frac{L}{R}$

Ezek ismételendők

C) $\quad X_C = \frac{1}{j\omega C}$

L) $\quad X_L = j\omega L$

DINAMIKUS HÁLÓZATOK - ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS (2 változóra)

EGYENLET FORMÁLALAKJA:

$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{B}s$ vagy $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{s}$

$\det|A - \lambda E| = 0 \rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (HURWITZPOLINOM) — A-ból λ-kat (SAJÁTÉRTÉKEK) $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ (λ_n) $\boxed{\operatorname{Im}\lambda = \omega}$

MEGOLDÁS ALAKJA

$$\boxed{\begin{aligned} x_{1(t)} &= k_1 S_{11} e^{\lambda_1 t} + k_2 S_{21} e^{\lambda_2 t} + X_{g1} \\ x_{2(t)} &= k_1 S_{12} e^{\lambda_1 t} + k_2 S_{22} e^{\lambda_2 t} + X_{g2} \end{aligned}}$$

MEGOLDÁSI MÓDOK: (válasz)
- ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS: $x_t + x_g$, $x_t = M e^{\lambda t}$
- MÁTRIXFÜGGVÉNNYEL: $x_t = e^{\underline{A}t} M$ — ugyanaz
- VIZSGÁLÓJELEK MÓDSZERE: $\varepsilon_{(t)}$, $\delta_{(t)} \rightarrow y_{(t)}$

$\underline{S_1} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix}$ $\underline{S_2} = \begin{bmatrix} S_{21} \\ S_{22} \end{bmatrix}$ SAJÁTVEKTOROK $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{S_1} = \lambda_1 \underline{S_1}$ $\quad \boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{S_i} = \lambda_i \underline{S_i}}$

ELVÉGEZNI A MÁTRIX-SZORZÁST! ÍGY EGYENLETRENDSZERT KAPUNK

$A_{11}S_{11} + A_{12}S_{12} = \lambda_1 S_{11}$
$A_{21}S_{11} + A_{22}S_{12} = \lambda_1 S_{12}$ $\rightarrow S_{11}, S_{12}$

A MEGOLDÁSNÁL: AZ EGYIKBE BEHELYETTESÍTENI 1-ET, ÉS ÚGY MEGOLDANI.

(A TÖBBI SAJÁTVEKTORNÁL UGYANÍGY) HA λ_i KOMPLEX, AKKOR KOMPLEX EGYENLETRENDSZEREK LESZNEK.

(2 ÁLLAPOTVÁLTOZÓSNÁL EGYIK $S_{xx} = 1$, A MÁSIKAT MÁR KÖNNYEBB KISZÁMOLNI)

X_g-VEKTOR $\quad \boxed{\underline{\underline{A}}\,X_g = -\underline{B}}$ vagy $\underline{\underline{A}}\,\underline{X_g} = -\underline{B}$ — SIMA EGYENLETRENDSZER X_g-re (MEGOLDANI)

K-SORVEKTOR — AZ ~~[illegible]~~ EGYENLETRENDSZERBE BEHELYETTESÍTENI $t=0$-át
ÍGY EGYENLETRENDSZERT KAPUNK K-RA ~~[illegible]~~

ÍGY:

$x_{1(0)} = 0 = k_1 S_{11} + k_2 S_{21} + X_{g1}$ $\quad (e^{b\cdot 0} = 1)$ $\quad 0 = \sum_{i=1}^{n} k_i \underline{S}_{ik} + \underline{X_g}$
$x_{2(0)} = 0 = k_1 S_{12} + k_2 S_{22} + X_{g2}$ $\rightarrow \underline{k}$ $\quad \boxed{\underline{X}_{(t=0)} = k_1 \underline{S_1} + k_2 \underline{S_2}}$

ÍGY MEGKAPTUK AZ ÁLLAPOTVÁLTOZÓS EGYENLETRENDSZER ÖSSZES DARABJÁT.

A MÁR FELÍRT $\underline{Y_t} = [C_1\ C_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D s$ EGYENLETBE BEHELYETTESÍTENI A FENTIEKET. (HA ESETLEG $\dot{x}_i$-AT IS BE KELL, AKKOR SEMMI BAJ, MERT AZ FELÍRHATÓ X-EKKEL, ÉS S-EKKEL)

AZ EGYENLETET KOMPLEX-MENTESÍTENI KELL: EHHEZ A KOMPLEX EGYÜTTHATÓKAT EXPONENCIÁLIS ALAKBAN KELL FELÍRNI: $\boxed{aj = a e^{j90^\circ} \quad -aj = a e^{-j90^\circ}}$.
HA ILYEN JÖN KI: $aj e^{jb} - aj e^{jb}$ akkor $a \neq 0$, NEM EGYSZERŰSÍTÜNK!
HANEM: $= a e^{j90^\circ} e^{jb} + a e^{-j90^\circ} e^{jb}$

$\boxed{\cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}}$ $\quad \boxed{\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}}$ $\quad a<0$

MÁS: $e^{j90} e^{(a+jb)} + e^{-j90} e^{(a-jb)}$
$= e^{a} e^{j(b+90)} + e^{a} e^{-j(b+90)} = e^{a} \cdot 2\dfrac{e^{j(b+90)} + e^{-j(b+90)}}{2} = e^{a} \cdot 2\cos(b+90)$

$A e^{(a+jb)t} + A e^{(a-jb)t}$ $\Rightarrow 2Ae^{a}\cos(bt\ [illegible])$

UGRÁSVÁLASZ $\quad y_{(t)} = \varepsilon_{(t)} \cdot y_{(t)}$
$s_i\ \varepsilon_t \rightarrow Y_t = v_{(t)}$

IMPULZUSVÁLASZ: $s_{(t)} = \delta_{(t)} \rightarrow Y_{(t)} = w_{(t)}$ $\quad Y_{(t)} = w_{(t)} = \varepsilon_{(t)}(v_{(t)})' + (v_{(t_0)})\delta_{(t)}$ — ÁLTALÁNOSÍTOTT DERIVÁLT: f: f_1 ha $t<0$, f_2 ha $t>0$, $S_{(t)}$ ha $t=0$

STABILITÁS $\quad w(t) \rightarrow k \in R$

ASSZIMPTOTIKUS ST.: $\lim_{t\to\infty} x_n = K$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$
HA EZ IGAZ, AKKOR GERJESZTÉS VÁLASZ STABILIS IS.

GERJESZTÉS-VÁLASZ STAB.: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $\int^{\infty} w_{(t)}\,dt < K < \infty$
KORLÁTOS GERJESZTÉSRE KORLÁTOS VÁLASZ $\boxed{w(t) \rightarrow 0}$

ÁLTALÁNOS GERJESZTÉSRE A VÁLASZ: (BELÉPŐRE EGYÉBKÉNT)
$y_{(t)} = \int_0^t w_{(\tau)} s_{(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^t \dot{v}_{(t-\tau)} s_{(\tau)}\,d\tau + v_{(+0)} s_{(t)}$
τ - ÚJ (IDŐ) VÁLTOZÓ, HOGY 2 KÜLÖNBÖZŐ LEGYEN (t, τ)

ELSŐ RENDŰ HÁLÓZAT
$\dot{x} = Ax + bs \rightarrow y_{(t)} = (y_0 - y_\infty)e^{-t/\tau} + y_\infty$ $\quad \boxed{\lambda = -\frac{1}{\tau}}$
$\lambda = A$

MÁTRIXFÜGGVÉNNYEL VALÓ MEGOLDÁS

$$\underline{x}_{(t)} = e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{x}_{(-0)} + e^{\underline{\underline{A}}t}\int_{-0}^{t} e^{-\underline{\underline{A}}\tau}\underline{\underline{B}}\underline{s}_{(\tau)}\,d\tau \qquad e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t}\underline{\underline{L}}_k$$

LAGRANGE MÁTRIX

$$\underline{y}_{(t)} = \underline{\underline{C}}\underline{x}_{(t)} + \underline{\underline{D}}\underline{s} \qquad L_k = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{E}}}{\lambda_k - \lambda_i}$$

VIZSGÁLÓJELEK MÓDSZERE

UGRÓS VÁLASZ

HA MÁR ISMERJÜK SPECIÁLIS GERJESZTÉSRE, ABBÓL SZÁMÍTJUK MÁS GERJESZTÉSRE

ε EGYSÉGUGRÁS → BELÉPŐ FÜGGVÉNY $(t<0 \; s=0, \; t>0, \; s=f_{(t)})$

ÁLTALÁNOSÍTOTT DERIVÁLT $\quad \varepsilon_{(t)} \to \varepsilon_{(t,\tau)} = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ t/\tau & 0 < t < \tau \\ 1 & \tau < t < \infty \end{cases}$

$$\boxed{y_{(t)} = \dot{v}_{(t)} * s_{(t)} + v_{(0)} s_{(t)}}$$

TÖBB GERJESZTÉS ÉS VÁLASZ ESETÉN SZUPERPOZÍCIÓ

$\dot{v}_{(t)} = w_{(t)}$

$v_{(t)}$ - UGRÁSVÁLASZ $\quad w_{(t)}$ - IMPULZUSVÁLASZ

IMPULZUSVÁLASZ:

λ_i? s_1, s_2? $\quad \underline{\underline{M}} = s_1 s_2 \quad x_g = 0 \quad x_g = 0$

$\sum k_i \underline{s}_i = \underline{b}$

K - MÁS LESZ. $\quad \underline{\underline{M}}\underline{K} = \underline{b} \quad k? \quad \underline{\underline{M}}\underline{K} + \cancel{\underline{x}_g} = \underline{b}$

x_g NINCS BENNE, ÉS

NEM 0-VAL EGYENLŐ, MINT AZ UGRÁSVÁLASZNÁL, HANEM B-VEL

BELÉPŐ GERJESZTÉS $\quad \varepsilon \; \boxed{\varepsilon_{(t)} S \cos(\omega t)} \; (S, \varphi \text{ adott}) \neq s e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$

x_f - UGYANAZ $\quad \underline{x}_g = \underline{x}_c \cos\omega t + \underline{x}_s \sin\omega t \qquad \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{\underline{B}}\underline{s}$

λ_i, s_i

UGYANÚGY SZÁMÍTHATÓ $\quad \underline{x}_c? \; \underline{x}_s? \; (\text{SZÁMOK}) \quad -\omega \sin\omega t + \omega \sin\omega t = \underline{\underline{A}}(\underline{x}_c \cos\omega t + \underline{x}_s \sin\omega t) + b \cdot \cos\omega t$

$$\omega \underline{x}_s - \underline{\underline{A}}\underline{x}_c = \underline{b}s$$

$$-\underline{\underline{A}}x_s - \omega \underline{x}_c = 0$$

k? $\quad x_s, x_c \quad \underline{\underline{M}} = s_1 s_2 \; (\text{NEM SZORZÁS})$

$\quad 0 = \underline{\underline{M}}\underline{k} + \underline{x}_c \quad x_c \cos\omega t + x_s \sin\omega t$

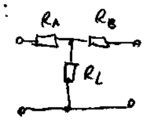
$\to k \quad \underline{x} = k_1 \underline{s}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \underline{s}_2 e^{\lambda_2 t} + \underline{x}_g$

HELYETTESÍTŐKÉPEK

– HA RECIPROK, LEHET T VAGY Π KÉP

– HA SZIMMETRIKUS, LEHET X – KÉP

T):



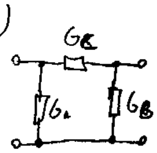
$$\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_A+R_L & R_L\\ R_L & R_B+R_L\end{bmatrix}$$

$R_C = R_{12} = R_{21}$

$R_A = R_{11} - R_L$

$R_B = R_{22} - R_L$

Π)



$$\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}G_A+G_C & -G_C\\ -G_C & G_C+G_B\end{bmatrix}$$

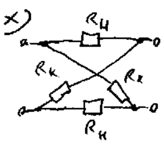
$G_C = -G_{12} = -G_{21}$

$G_A = G_{11} - G_C$

$G_B = G_{22} - G_C$

EGYIKBŐL A MÁSIK: ✱ – Δ

X)



$R_{11} = \frac{R_H + R_K}{2}$

FELTÉTELEK:

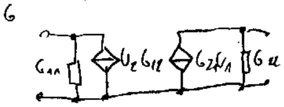
	RECIPROK	SZIMMETRIA
R	=	= =
G	=	= =
h	= –	$\Delta h = \pm 1$
A	$\Delta A = \pm 1$	=

– HA NEM ILYEN SZÉP: TERMÉSZETES, h_T, h_Π

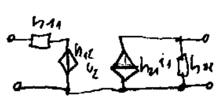
TERM.)

R

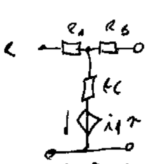
G



h



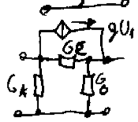
h_T)



R-ek úgy mint a sima T-nél

$r = R_{21} - R_{12}$

h_Π)



G-k mint a sima Π-nél

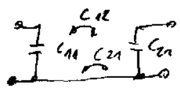
$g = G_{21} - G_{12}$

DINAMIKUS

– $i_{C(t)} = C\dot{u} = C\frac{dU}{dt}$ $U_{L(t)} = L\dot{i} = L\frac{di}{dt}$

$W = \frac{1}{2}CU^2$ $W = \frac{1}{2}Li^2$

– CSATOLT KONDIK:

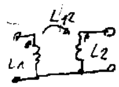


$i_1 = C_{11}\dot{U}_1 + C_{12}\dot{U}_2$

$i_2 = C_{21}\dot{U}_1 + C_{22}\dot{U}_2$

$\underline{G} = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\cdot j\omega$

– CSATOLT TEKERCS



$U_1 = L_1\dot{i}_1 + L_{12}\dot{i}_2$

$U_2 = -L_{12}\dot{i}_1 + L_2\dot{i}_2$

$\underline{Z} = \begin{bmatrix}L_1 & M\\ -M & L_2\end{bmatrix}\cdot j\omega$

k csatolási tényező: $k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$

$L_{12} = L_{21} = M$

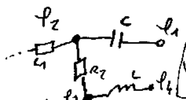
– HÁLÓZATI EGYENLETEK $\boxed{\text{DINAMIKUS}}$

– a kondik U_C, $C\cdot\dot{U}_C$ formában, a tekercsek i_L, $L\cdot\dot{i}_L$ formában szerepelnek

– Minden dinamikus elemből legyen 1 deriváltas egyenlet

– U_C, i_L az állapotváltozók

– CSP.: pl. erre a csomópontra



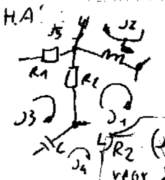
L) $\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_2} - i_L \cdots = 0$

VAGY: $\varphi_4 = \varphi_3 + L\dot{i}_L$

C) $\frac{\varphi_2 - \cdots}{R_1} + \frac{\varphi_2 - \cdots}{R_2} - C\dot{U}_C = 0$

VAGY: $\varphi_2 = \varphi_1 + U_C$

– HÁ:



C) $J_3 = J_4 + C\cdot\dot{U}_C$

VAGY: $(J_3 - J_4)R_{\cdots} \cdots U_C = 0$

L) $R_2\cdot(J_4 - J_3) + \cdots + \underbrace{L\dot{i}}_{U_L} = 0$

VAGY $J_4 = i_L$

– Tehát így kell egyenleteket felírni (CSP/HÁ)

ahol sok a kondi: CSP.

ahol a tekercs sok: H.Á.

Ha mindkettő van: VEGYESEN (H.Á. és CSP.) hogy mindkét változónak legyen diffegyenlete.

AZ a baj, ha van x, és $\dot{x}$ is 1 egyenletben, de 1 egyenletben csak 1 derivált állapotváltozó lehet!

– FÁS megoldással: FA-ÁG [illegible] KÖTŐÉL

– EZEKBŐL DIFF. EGYENLETET (RENDSZERT) kell csinálni:

ilyen alakban:

$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{s}}$

tehát $\dot{x}$-et kifejezni minden egyenletből. Majd a keresett $y_{(t)}$, $\underline{y}_{(t)}$

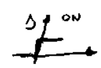
$\boxed{\underline{y} = \underline{C}^T\underline{x} + \underline{D}\,\underline{s}}$

– et kell kifejezni a kapcsolás alapján

ÁLLAPOTEGYENLETEK NORMÁL ALAKJA

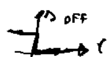
KÉRDÉS: $\underline{x}_{(t)}$, $y_{(t)}$ $\boxed{\text{φ-ket is el kell tüntetni!}}$

– KEZDETI FELTÉTELEK:



ilyenkor $U_{C,t-0} = U_{C,t+0} = 0$

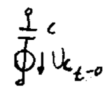
$i_{L,t-0} = i_{L,t+0} = 0$



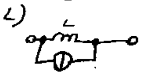
ilyenkor

mert hirtelen nem változhat, folytonos

C)



L)



ezzel kell helyettesíteni.

és persze C (úgy)-re $U_{C_0} = 0$ $i_{L_0} = 0$

– ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS MEGOLDÁSA:

– HA OLYAN EGYENLETEINK VANNAK, HOGY pl. $\dot{x}_1 = a\cdot x_1 + b\cdot s$

$\dot{x}_2 = e\cdot x_2 \cdots$

tehát 1 egyenletben csak 1 állapotváltozó, akkor az nem egyenletrendszer, hanem külön kezelhető egyenletek

ÖSSZETEVŐKRE BONTÁSSAL:

$\boxed{\underline{X}_{(t)} = \underline{X}_{f(t)} + \underline{X}_g}$

SZABAD VÁLASZ (TRANZIENS)

GERJESZTETT VÁLASZ (SZÁMOK) (ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT)

$\boxed{y_{(t)} = \underline{C}^T\underline{X}_{(t)} + D\cdot s}$

– TOVÁBB: ELSŐRENDŰ / MÁSOD(3...N) RENDŰ HÁLÓZATOKNÁL MÁS.

A) ELSŐRENDŰ HÁLÓZATOK

$$\boxed{y_{(t)} = (y_0 - y_g)e^{t\cdot\lambda} + y_g}$$

KÖZVETLENÜL SZÁMOLHATÓ

AHOL y_0, y_g A KAPCSOLÁSBÓL: (KEZDETI FELTÉTELEK)

$\lambda = -\frac{1}{\tau}$ ahol τ IDŐÁLLANDÓ,

és $\dot{x} = \lambda\cdot x + b\cdot s$ VOLT! $\boxed{\lambda \text{ NEGATÍV!}}$

$\boxed{y_\infty = y_{t=\infty}}$

B) MÁSOD (3...n) RENDŰ HÁLÓZATOK

IT előbb $X_{(t)}$-ket kell kiszámolni, majd abból $y_{(t)}$-t

$\underline{X}_{(t)} = \underline{X}_{f(t)} + \underline{X}_g$

$y_{(t)} = C^T \cdot \underline{X}_{(t)} + y_g$

EZT MÁSIK LAPON LEÍRTAM!

$y_{(t)}$-t fel kell írni a kapcsolás alapján X_t-kkel, és $\dot{X}_t$-kkel, ($\dot{X}_t$ felírható X_t-kel) és D-vel (U_s, I_s)

X_t-ket behelyettesíteni: KÉSZ.

– HA KOMPLEXEK A SAJÁTÉRTÉKEK, akkor KOMPLEX MENTESÍTENI KELL. (EZ VAN ÍRVA EZ IS A MÁSIK LAPON)

HOL KELL:
a végén a valósszal, $(y_{(t)})$ hogy valós
IDŐFÜGGVÉNYLEGYEN.
Ha komplex sajátérték
van, akkor azok KONJUGÁLT PÁROK, és azt jelenti, hogy a kimenetben 1 kis OSZCILLÁCIÓ VAN $(\omega = \mathrm{Im}\,\lambda)$

ÁLTALÁBAN

A $e^{(a+jb)t} + A e^{(a-jb)t}$ alak van,

EBBŐL

$2Ae^{a}\cos(bt + \varphi)$

MÁS: $Aj e^{(a+jb)} - Aj e^{(a-jb)t}$ – LESZ.
$= 2Ae^{a}\cos(b+90)$

ebből is látszik, $j = e^{j90}$

hogy ha $a < 0$, $(= Re\{\lambda\})$ akkor GV stabilis, mert így cseng le az oszcilláció

– A VÁLASZ meg kell szorozni $\varepsilon_{(t)}$-vel, és ez lesz az ugrásválasz (BEKAPCS.)

– MÁS GERJESZTÉSRE VÁLASZ:

$y_{(t)} = \dot{v}_{(t)} * \delta_{(t)} + v_{t0}\,\delta(t)$

VAGY

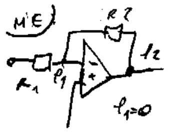
$y_{(t)} = W(t) * \delta(t)$

($V(t)$ – UGRÁSVÁLASZ: ... erre a válasz
$W(t)$ – IMPULZUSVÁLASZ: ... $\delta(t)$ ERRE A VÁLASZ)

(az $+ v_{t0}\,\delta(t)$: $\delta(t)$-t olyan szorzóval kell hozzáadni, mint amilyen ugrásnyi y_g és a $\varepsilon_{(t=\infty)} = 1$ tehát tehát $v(t=\infty)$)

EGYÉB ALKOTRÉSZEK: (SPEC 4 pól)

MŰE)



i_2-re nem írunk fel CSOMÓPONTI EGYENLETET!

A 2 BEMENET POTKÓ AZONOS, $I_{BE} = 0$

$\underline{\underline{h}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R1}{R2} \\ 0 & -\frac{1}{R2} \end{bmatrix}$

AKTÍV
$\begin{pmatrix} R_1 & -\frac{R1}{R2} \\ \infty & \ast\frac{1}{R2} \end{pmatrix}$

TRAFÓ)

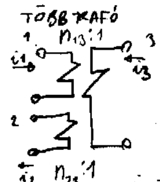
$\nu = \frac{1}{n}$ a ÁTTÉTEL

$n = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$

HELYETTESÍTŐ KÉP:

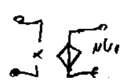
$\underline{\underline{h}} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}$

TÖBB TRAFÓ



$U_1 = n_{13}U_3$
$U_2 = n_{23}U_3$
(ugyanaz felírva)
$i_3 = -(n_{13}i_1 + n_{23}i_2)$

FESZ VEZÉRELT FESZFORRÁS)

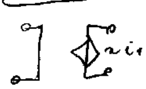


$U_2 = \mu U_1$
$i_1 = 0$

$\underline{\underline{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$

csak $\underline{\underline{k}}, \underline{\underline{A}}$ $\exists$

ÁRAMVEZ FESZFORR)



$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$

FESZVEZ ÁF.)

$i_2 = gU_1$

$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$

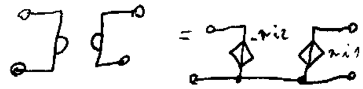
ÁV ÁF)

$i_2 = i_1\alpha$

$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$

de láncparaméteri-kája mindnek van

GIRÁTOR)



$g = \frac{1}{r}$

$R = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$

g-GIRÁCIÓS TÉNYEZŐ

$i_C = C \cdot \dot{U}_C = C \cdot \frac{d}{dt} U_C$

$U_L = L \cdot \dot{i}_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$

IDŐÁLLANDÓSZÁMÍTHATÓ ÚGY IS, HOGY (HA 1 DIN ELEM VAN) HOGY DEZAKTIVIZÁLJUK A FORRÁSOKAT, A DIN. ELEMET, ÉS AMI MARAD, ANNAK AZ EREDŐ ELLENÁLLÁSÁVAL SZÁMOLUNK

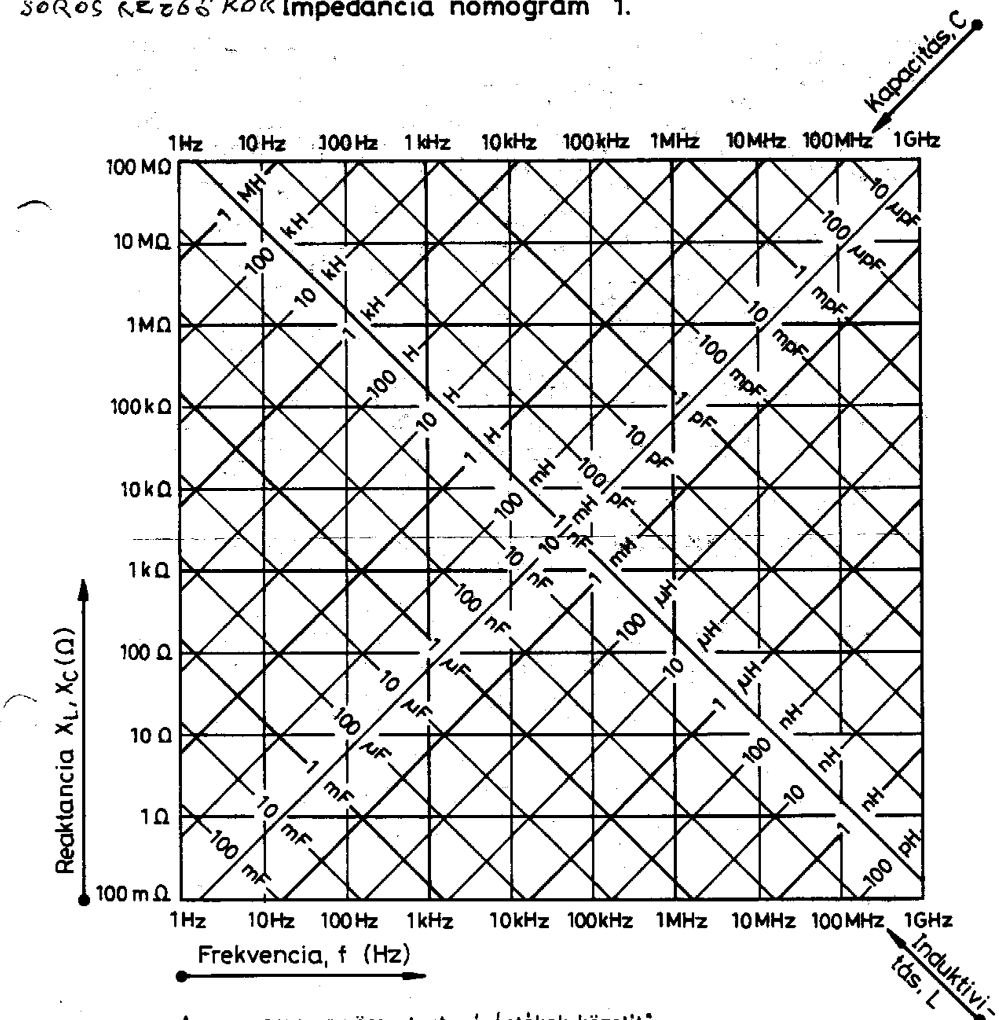
$\tau = R_e \cdot C = \frac{L}{R_e}$

mek reaktanciáját is. Nem kell mást tennünk, mint a frekvenciához tartozó függőleges és az elemértékhez tartozó egyenes metszéspontjának koordinátáját leolvasni a bal szélső függőlegesen.

Például a 255 μH-s tekercs reaktanciája a következőképpen adódik. Az előző példánál megállapítottuk, hogy a 255 μH-nek megfelelő pont hova esik a 2. nomogramon, ehhez és a 26 kHz-

PÁRHUZAMOS REZGŐKÖR (LC)
SOROS REZGŐ KÖR

Impedancia nomogram 1.



A nomogram az összetartozó értékek közelítő meghatározására alkalmas. A pontosabb értékek meghatározásához a 2.sz. nomogram szükséges.

A nomogramban felhasznált összefüggések: $X_L = 2\pi f L$;

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}\ ;\quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

-----126.oldal-----

FOURIER

$s_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} s_{(j\omega)} \xrightarrow{\text{SZORZÁS}} y_{(j\omega)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_{(t)}$ VAGY

$W_{(j\omega)}$ - ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA

HÁLÓZAT CSOMÓPONTI EGYENLET RENDSZERE $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ TRANSZF. EGY. RENDSZ. $\rightarrow$ KERESETT $y_{()}$ KIFEJEZÉSE, KISZÁMOLÁSA (KIMENETI SPEKTRUM) $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ KIMENETI JEL IDŐFÜGGV.

$\mathcal{F}$:
PERIÓDIKUS JELEKNÉL: FOURIER SORBAFEJTÉS
NEM PERIÓDIKUSNÁL F. TRANSZFORMÁCIÓ

F. SORFEJTÉS

$s_{(t)} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} s_{k(j\omega)} \xrightarrow{\text{TAGONKÉNT SZORZÁS}} \sum_{k=1}^{n} y_{k(j\omega)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\ \text{(GRAFIKF.) TAGONKÉNT}} \sum_{k=1}^{n} y_{(t)}$

$W_{(j\omega)}$

$s_{(t)} \rightarrow \sum_{k=1}^{n} s_{k(j\omega)} = s_{j\omega}$

Trigonometrikus alak:

$$D_{j\omega} = \sum_{k=1}^{n}\left(s_k^A \cos k\omega_0 t + s_k^B \sin k\omega_0 t\right) + s_0$$

ELŐFORDULHAT, HOGY A COS vagy a SIN tag hiányzik

$$s_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s_{(t)}\, dt$$

T - A PERIÓDUSIDŐ
n - TETSZŐLEGES

V_t páros: $s_k^B = 0$
PÁROSFÜGG. PÁRATLAN

$$s_k^A = \frac{2}{T}\int_0^T s_{(t)} \cos k\omega_0 t\ dt$$

$$s_k^B = \frac{2}{T}\int_0^T s_{(t)} \sin k\omega_0 t\ dt$$

F. TRANSZFORMÁCIÓ

$$s_{j\omega} = \mathcal{F}\{s_t\} = \int_{-\infty}^{\infty} s_t e^{-j\omega t}\, dt$$

INVERZ F.T.

$$y_{(t)} = \mathcal{F}^{-1}\{y_{(j\omega)}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y_{j\omega} e^{j\omega t}\, d\omega$$

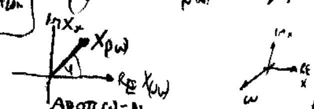
TRANSZFORMÁLHATÓ, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x_t| < \infty$

AMPLITÚDÓ SPEKTRUM: $X_{(j\omega)} = K_{(\omega)} \cdot e^{j\varphi_{(\omega)}}$

$$x_{(\omega)} = |X_{j\omega}| = \sqrt{(\mathrm{Im}\, X_{j\omega})^2 + (\mathrm{Re}\, X_{j\omega})^2}$$

FÁZISSPEKTRUM:

$$\varphi_{(\omega)} = \mathrm{arc}\, X_{j\omega} = \mathrm{arctg}\, \varphi$$



HÁLÓZATI EGYENLETEK FELÍRÁSA: - MINT A SZINUSZOS HÁLÓZATOKNÁL!

AZ IMPEDANCIÁK: $X_C = \frac{1}{j\omega C}$ $X_L = j\omega L$ $R = R$

1 FORRÁS $\rightarrow$ 1 KIMENET

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{s}$ $y \in \underline{X}$

AZ EGYENLETEKBE s-ET BEHELYETTESÍTEM.

TÖBB EGYENLET, EZÉRT $\mathcal{F}$ + VEKTOR

EGYENLETREND- SZERT KÖZVETLENÜL MEGOLDANI.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \qquad \Phi_1 ?$$

$$\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$$

$G \cdot \Phi_1 = i$

$\Phi_{1(j\omega)} = \frac{1}{G} \cdot i$ $i = f_{(s)}$ $i = as + b$

$\frac{\Phi_{(j\omega)}}{s_{(j\omega)}}$ $\Phi_{(j\omega)} = \frac{a}{G}s + \frac{b}{G}$

$A, B, C, \ldots = \{R, j\omega L, 1/j\omega C\}$

FOURIER TRAFÓ SZABÁLYAI: $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$

$\mathcal{F}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{F}\{x_1\} + \mathcal{F}\{x_2\}$ SZUPERPOZ.

$\mathcal{F}\{x_{(t-\tau)}\} = e^{-j\omega\tau}\mathcal{F}\{x_t\}$ ELTOLÁS

$\mathcal{F}\{x_t e^{j\omega_0 t}\} = F_{(j(\omega-\omega_0))}$ MODULÁCIÓ

x_t MEG VAN SZOROZVA SZINUSZOS JELLEL ($e^{j\omega_0 t}$) AKKOR A SPEKTRUM ELTOLÓDIK ω_0-VAL JOBBRA.

$\mathcal{F}\{f'_{(t)}\} = j\omega F_{(j\omega)}$ DERIVÁLT

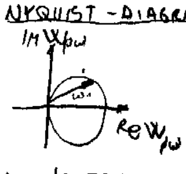
$\mathcal{F}\{\int f_\tau\, d\tau\} = \frac{1}{j\omega}F_{(j\omega)} + F_{(0)}\delta_{(\omega)}$ INTEGRÁL

$\mathcal{F}\{x_t e^{\alpha t}\} = F_{(j\omega+\alpha)}$

ENERGIASPEKTRUM:

$$E_{(j\omega)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |X_{j\omega}|^2\, d\omega$$

NYQUIST - DIAGRAM

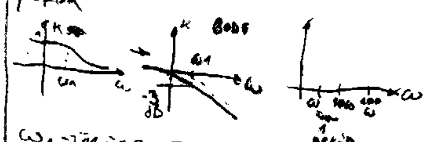


A VALÓS TENGELYRE SZIMMETRIKUS

ÖSSZES ω-ra $W_{(j\omega)}$ értékeket (KOMPLEX) legyezőjük

LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNY ALAKJA KÖR

BODE - DIAGRAM (ÁTVITELI KAR.)
LOGARITMIKUS SKÁLÁJÚ
AMPLITÚDÓ, ÉS FÁZIS KARAKTERISZTIKA
K - dB - BEMENETHEZ KÉPEST A KIMENET.
φ - FOK



ω_1 - TÖRÉSPONT,
ITT 3dB MÁSHOL A Z ASZIMPTOTÁHOZ TART AZ ÁBRA. $1 \rightarrow 0$ dB!

ALAPFÜGGVÉNYEK $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$

$\boxed{x_t e^{\alpha t} \rightarrow X_{(j\omega+\alpha)}}$

$\delta_{(t)} \rightarrow 1$

$\varepsilon_{(t)} \rightarrow \pi\delta_{(\omega)} + \frac{1}{j\omega}$

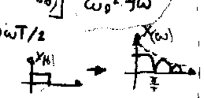
$\varepsilon_{(t)} e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$ $(\alpha > 0)$

$\varepsilon_{(t)} e^{j\omega_0 t} \rightarrow \pi\,\delta_{(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{j(\omega-\omega_0)}$

$\varepsilon_{(t)} \cos\omega_0 t \rightarrow \frac{\pi}{2}\left[\delta_{(\omega-\omega_0)} + \delta_{(\omega+\omega_0)}\right] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - j\omega^2}$

$\varepsilon_{(t)} \sin\omega_0 t \rightarrow \frac{\pi}{2j}\left[\delta_{(\omega-\omega_0)} + \delta_{(\omega+\omega_0)}\right] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - j\omega^2}$

$\varepsilon_{(t)} - \varepsilon_{(t-T)} \rightarrow \frac{\sin(\omega T/2)}{j\omega T/2} e^{-j\omega T/2} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega}$



$e^{-\alpha|t|} \rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$1 \rightarrow 2\pi\delta_{(\omega)}$

$e^{j\omega_0 t} \rightarrow 2\pi\delta_{(\omega-\omega_0)}$

$\cos\omega_0 t \rightarrow \pi\left[\delta_{(\omega-\omega_0)} + \delta_{(\omega+\omega_0)}\right]$

$\sin\omega_0 t \rightarrow -j\pi\left[\delta_{(\omega-\omega_0)} - \delta_{(\omega+\omega_0)}\right]$

$\mathrm{sgn}\, t \rightarrow \frac{2}{j\omega}$

LAPLACE

$$D_{(t)} \xrightarrow[\text{1}]{\mathcal{L}} D_{(s)} \xrightarrow[\text{3}]{\cdot W_{(s)}} Y_{(s)} \xrightarrow[\text{4}]{\mathcal{L}^{-1}} Y_{(t)}$$

W_s-átviteli függvény $\quad W_t \xrightarrow{\mathcal{L}} W_s$ (2) $\quad \boxed{\text{S-FÜGGV. MÓDSZER}}$

(2) $W_{(s)}$ – ÁTVITELI FÜGGV. RAJZOLÁSBÓL

KIMENETET KIFEJEZNI $D_{(s)}$-sel, és s-sel. (bemenet és s)

ahol: $\bar{U}_j = \bar{Z}_{ji} \bar{I}_{(s)}$ és

$\bar{Z}_C = \frac{1}{sC}$ $\quad \bar{Z}_L = sL$,

ERRE LEHET CSOMÓPONTI POT. EGYENLETRENDSZERT FELÍRNI, VAGY 1 EGYENLETET

és $U_{L(s)} = L(sI_{(s)} - I_0)$

VAGY U_t-vel kifejezzük, és $\mathcal{L}$-TR.-JUK AZ EGYENLETET

KARAKTERISZTIKÁK $\mathcal{L}$-TR.-JÁVAL SZÁMOLUNK

---

(1) LAPLACE TRAFÓ $\quad \boxed{F \to F}$

$$\mathcal{L}\{x_t\} = X_{(s)} = \int_{-0}^{\infty} x_{(t)} e^{-st}\, dt$$

SZABÁLYOK:

$\mathcal{L}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{L}\{x_1\} + \mathcal{L}\{x_2\}$ $\quad$ SZUPERPOZ.

$\mathcal{L}\{x'_{(t)}\} = sX_{(s)} - X_{(-0)}$ $\quad$ DERIVÁLT

$(\mathcal{L}\{\delta_{(t)}\} = 1)$

$\mathcal{L}\{x_{(t)} e^{-\alpha t}\} = X_{(s+\alpha)}$ $\quad$ CSILLAPÍTÁS

$\mathcal{L}\{x_{(t-T)}\} = e^{-sT} \mathcal{L}\{x_{(t)}\}$ $\quad$ ELTOLÁS (HA T-NÉL BELÉPŐ)

HASONLÓSÁG: $\mathcal{L}\{f(\frac{t}{a})\} = aF_{(as)}$

INT.: $\mathcal{L}\{\int_0^t f_{(t)} dt\} = \frac{1}{s} F_{(s)}$

KEZDETI ÉRT.: $f_{(+0)} = \lim\limits_{s \to \infty} sF_{(s)}$ $\quad$ VÉGÉRT.: $f_{(\infty)} = \lim\limits_{s \to 0} sF_{(s)}$

HASONLÓSÁG: HA $x_{(t)}$ AKKOR x_s ... és

PERIODIKUS GERJESZTÉS ($U_{T(t)}$) 1 PER.

$$\mathcal{L}\{U_{T(t)}\} = U_{(s)} = \frac{U_{T(s)}}{1 - e^{-sT}}$$

NEMENERGIAMENTES: = ENERGIAMENTES + FORRÁSOK

---

(3) $Y_{(s)} = W_{(s)} \cdot D_{(s)}$

(4) INVERZ LAPLACE TRAFÓ – ESETEI

$$X_{(s)} \to X_{(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{X_{(s)}\}$$

a) (HA SIKERÜL) $X_s \xrightarrow{\text{FELBONT}} \sum_{i=1}^{n} X_{(s)i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum_{i=1}^{n} X_{(t)i} \xrightarrow{\text{ÖSSZEAD}} X_{(t)}$

FELBONTÁS ELEMI FÜGGVÉNYEKRE, AMIKNEK $\mathcal{L}^{-1}$ ISMERT.

KIFEJTÉSI TÉTEL

b) $X_{(s)}$ RACIONÁLIS T-EK ÖSSZEGE, P_k EGYSZERES $\quad \boxed{\text{PÓLUSOKAT MEGHATÁROZNI}}$

$X_{(s)} = \frac{M_{(s)}}{N_{(s)}}$ alakban van. $= \frac{M_{(s)}}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)}$

átalakítani $= \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s - p_k}$ $\quad$ AZ ÁTALAKÍTÁS: MINT AZ INTEGRÁLÁSNÁL

akkor: $X_{(t)} = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t} \varepsilon_{(t)}$ $\quad \left(\frac{1}{s - p_k} \Rightarrow e^{p_k t} \varepsilon_t\right)$

c) X_s rac. tört, PÓLUSOK TÖBBSZÖRÖSEK $(s - p_L)^m$

AZ ÁTALAKÍTÁS UTÁN:

$$X_{(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s - p_k} + \frac{D_1}{(s - p_L)^1} + \frac{D_2}{(s - p_L)^2} + \dots = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{s - p_k} + \sum_{l=1}^{m} \frac{D_l}{(s - p_L)^l}$$

$X_{(t)} =$ b) PONT SZERINT $\quad e^{+p_L t}\left(D_1 + D_2 t + \dots + D_q \frac{t^q}{(q-1)!}\right)\varepsilon_{(t)}$

$\frac{t^1}{(1-1)!} = t \quad \Rightarrow e^{+p_L t} \sum_{j=1}^{q} D_j \frac{t^j}{(j-1)!}$

d) NEM VALÓDI TÖRT (számláló, és nevező fokszáma megegyezik)

$-X_{(s)}$ ÁTALAKÍTHATÓ $\quad A + \frac{N_{(s)}}{M_{(s)}}$ -RE $\quad \frac{H_{(s)}}{M_{(s)}}$ -BÓL

$A = \lim\limits_{s \to \infty} \frac{H_{(s)}}{M_{(s)}}$

$$X_{(t)} = A\,\delta_{(t)} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N_{(s)}}{M_{(s)}}\right\} \quad \left(\lim_{s \to \infty} \frac{N_{(s)}}{M_{(s)}} = 0\right) \quad \frac{H}{M} - A = \frac{N}{M}$$

e) EXPONENCIÁLIS SZORZÓTÉNYEZŐVEL:

$X_{(s)} = e^{-sT_1} X_{1(s)}$ $\quad X_{1(s)}$ – TÖRT FÜGGVÉNY

$\mathcal{L}^{-1}$: $X_{(t)} = \varepsilon_{(t - T_1)} X_{1(t - T_1)}$

EGYENLETRENDSZER-MÓDSZER

- HÁLÓZATI EGYENLETEK (RENDSZ.) NORMÁL FELÍRÁSA (IDŐTARTOMÁNYBELI KIRCHHOFF EGYENLETEK pl. Lin...) $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{y}$ $\quad \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,\underline{u}$ [redacted] $y \in X$
- AZ EGYENLETEKET $\mathcal{L}$-TR.-NI (TAGONKÉNT) (1)
- KERESETT $X_{i(s)}$ KIFEJEZÉSE (ESETLEG X-EKBŐL A KERESETT)
- $\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = Y_{(t)}$ – ELLENŐRZÉS A KEZDETI ÉRTÉK TÉTELLEL (4)

EGYENLETEK TR.-SA:

$\mathcal{L}\{R i_{1(t)}\} = R\, i_{1(s)}$

$\mathcal{L}\{L\, i'_{2(t)}\} = L(s I_{2(s)} - I_{2(-0)})$

$\mathcal{L}\{U_{S1(t)}\} = U_{S1(s)}$ $\quad C U \to \frac{1}{sC} U$

EGYÜTT: [redacted]

$\mathcal{L}\{R_1 I_{1(t)} + R_2 I_{2(t)} = U_{S1(t)}\} =$

$R_1 I_{1(s)} + R_2 I_{2(s)} = U_{S1(s)}$

ELLENŐRZÉS KEZDETI ÉRTÉKKEL:

- KAPCSOLÁS ALAPJÁN $t = 0$, $t = \infty$ -ban kiszámolni.
- $Y_{(t)}$-be $0, \infty$ BEHELYETTESÍTENI
- HA A 2 EREDMÉNYPÁR =, AKKOR O.K.

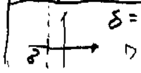
$f \to F\ \mathcal{L}$

$\delta_{(t)} \to 1$	$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{s + \alpha}$
$\varepsilon_{(t)} \to \frac{1}{s}$	$\cos\omega t \to \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$(\varepsilon_t)\, t \to \frac{1}{s^2}$	$\sin\omega t \to \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$(\varepsilon_t)\, t^n \to \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\varepsilon_{(t)} - \varepsilon_{(t-T)} \to \frac{1 - e^{-sT}}{s}$

$\mathcal{L}$ CSAK, ha $\varepsilon_t \cdot U_{(t)}$ -van

PÓLUSOK ÉS ZÉRUSOK: $\quad X_{(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$ ALAK

z_n és p_k KOMPLEX,



$\delta = \max(\mathrm{Re}\{p_k\}) \leq 0$

$s = \delta + j\omega$

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY ÁTALAKÍTÁSA:

p-EGYSZERES

$$\frac{ax+b}{(x-p_1)(x-p_2)} \rightarrow \frac{A}{(x-p_1)} + \frac{B}{(x-p_2)} \quad A, B\,?$$

KÉSZ.

$$= \frac{A(x-p_1)+B(x-p_2)}{(x-p_1)(x-p_2)}$$

$$\Rightarrow ax+b = A(x-p_1) + B(x-p_2) = Ax - Ap_1 + Bx - Bp_2 = \overbrace{(A+B)x}^{a\cdot x} \overbrace{- Ap_1 - Bp_2}^{b}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= A+B \\ b &= -(Ap_1+Bp_2) \end{aligned}\right\}$$ EGYENLET RENDSZER, EBBŐL A, B (p_1, p_2 ADOTT)

LAPLACE-NÁL: $x_{(t)} = (A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t})\varepsilon(t)$

---

p-TÖBBSZÖRÖS

$$\frac{ax+b}{(x-p_1)(x-p_2)^2} \rightarrow \frac{A}{x-p_1} + \frac{B}{x-p_2} + \frac{C}{(x-p_2)^2}$$

$$= \frac{A}{(x-p_1)(x-p_2)^2}$$

$$\Rightarrow ax+b = \overbrace{A(x-p_2)^2}^{A(x^2+p_2^2-2xp_2)} + B(x-p_2) + C(x-p_1) = Ax^2 + Ap_2^2 - 2Ap_2x + Bx - Bp_2 + Cx - p_1C$$

$$= Ax^2 + (2Ap_2 + B + C)x + Ap_2^2 + Bp_2 + Cp_1 \qquad A=0$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 2Ap_2 + B + C \\ b &= \cancel{Ap_2^2} - Bp_2 - Cp_1 \end{aligned}\right\} \quad B, C$$

FELÜL: $(x-z_1)(x-z_2) \rightarrow x^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2$

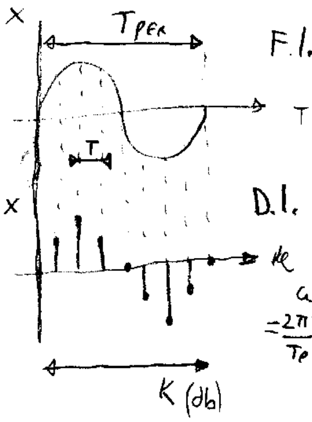
ALUL $ax^2 - bx + c \rightarrow$ MEGOLDANI AZ EGYENLETET, ÉS $(x-x_1)(x-x_2)$ - BE!

IMPULZUSTÉTEL!

$$y_{(t)} = u_{(t)} * w_{(t)} = \int_0^t u_{(t-\tau)} \cdot w_{(\tau)}\, d\tau$$

MIBŐL MIT HOGYAN?

ADOTT / KERESETT	IMPULZUSVÁLASZ $w_{(t)}$	UGRÁSVÁLASZ $v_{(t)}$ ÁTMENETI FÜGGV.	ÁTVITELI KARAKT. $W_{(j\omega)}$	ÁTVITELI FÜGGVÉNY $W_{(s)}$
$w_{(t)} =$		$v'_{(t)}$	$\mathcal{F}^{-1}\{W_{(j\omega)}\}$	$\mathcal{L}^{-1}\{W_{(s)}\}$
$v_{(t)} =$	$\int_{-0}^{t} w_{(\tau)}\,d\tau$		$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{W_{(j\omega)}}{j\omega}\right\}$ VAGY $v_{(\infty)} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{W_{(j\omega)} - v_{(\infty)}}{j\omega}\right\}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W_{(s)}}{s}\right\}$
$W_{(j\omega)} =$	$\mathcal{F}\{w_{(t)}\}$ VAGY $\varepsilon_{(t)}\frac{2}{\pi}\int_0 Re\{W_{(j\omega)}\}\cos\omega t\, d\omega$	$j\omega\,\mathcal{F}\{v_{(t)}\}$		$W_{(s)}$ ha $s=j\omega$
$W_{(s)} =$	$\mathcal{L}\{w_{(t)}\}$	$s\,\mathcal{L}\{v_{(t)}\}$	$W_{(j\omega)}$ ha $j\omega = s$	



$T_{PER} = kT$

$\omega T = \frac{2\pi}{K} = \vartheta$ DI KÖRFR.

$= \frac{2\pi T}{T_P}$

K, minél nem idő van $T_{PER} \sim K$

1 PERIÓDUSHOZ TARTOZÓ k-k száma

ÉPÍTŐELEMEK:

DAT

D → FORRÁS

→ NYELŐ

$y_{[k]}$

ERŐSÍTŐ

$U_{[k]}$ $\quad K U_{[k]}$

KÉSLELTETŐ (PASSZÍV)

$U[k] \to U[k-1]$

$U[k+1] \to U[k]$

ÖSSZEGZŐ CSOMÓPONT

$U_{1[k]}$, $U_{2[k]}$, $U_{3[k]}$ → $\Sigma U_{i[k]}$

ELÁGAZÁS

DI

HÁLÓZAT: ÁBRÁZ.

RENDSZER: AMIT EZ MODELLEZ

$y[k]$?

1. ÁLLAPOTEGYENLETBŐL → $W[k]$
2. RENDSZEREGYENLETBŐL
3. FOURIER TRAFÓ (PER, NEM PER)
4. Z TRAFÓ

SPEC

$\delta_{[k]}$

$\varepsilon_{[k]}$ $\quad \varepsilon[k] = \sum_{j=0}^{\infty} \delta[k-j]$

$y_{[k]} = W\{s_{[k]}\}$ $\quad$ $W[k]$? DIFFERENCIA EGY.

ÁLLAPOTEGYENLET

(ÁLLAPOTEGY.) $x_{[k+1]} = \underline{A}\, x[k] + \underline{B}\, s[k]$

$y_{[k]} = \underline{C}^T x_{[k]} + \underline{D}\, s[k]$

EZT ÍRJUK FEL:

FELÍRÁS

- Ezt kell kifejezni egyéb egyenletekből. (ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS)
- segédváltozókat választani
- összes egyenletek felírása
- ebből $y[k]$ felírása.
- egyenletben lehet az összes k-t egyszerre növelni/csökkenteni, hogy a kívánt alakot kapjuk.
- lehet pl. $x_{2[k+1]} = x_{1[k]}$
- nem célszerű túl sok helyen alkalmazni x_i-t:

$x_1[k]$ $\quad x_1[k+1]$ $\quad x_1[k+2]$ ...

$\to x_{[k]}$ $\quad x_1[k+1] = x_2[k]$, $x_2[k+1]$

- MINDEN KÉSLELTETŐ KIM-E VÁLTOZÓT!
- MINDEN VÁLTOZÓT KIFEJEZNI A TÖBBIVEL

SZÁMÍTÁS

- ÁLLAPOTEGYENLET
- RENDSZEREGYENLET
- RE.-BE BEHELY. (FOKOZATOS) $s[k]$-t → IMPULZ VÁLASZ (SZÁMSOR)
- IMP.V. EGYENLETE: $y_2 = M_1\lambda_1^2 + M_2\lambda_2^2 \ldots$; $y_3 = M_1\lambda_1^3 + M_2\lambda_2^3 \ldots$

MEGOLDÁS: (ÁLLAPOT.)

a) LÉPÉSRŐL-LÉPÉSRE

b) ZÁRT ALAKÚ $x_k = x_{f} + x_{g}$ (ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS)

c) MÁTRIXFÜGGVÉNNYEL

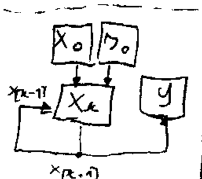
a) LÉPÉSRŐL LÉPÉSRE

- kell hozzá a kezdeti feltétel: $x_{[0]}$
- HA BELÉPŐ, AKKOR: $x_{[-1]} = 0$ ez lesz a kezdet.
- HA élő konstans? NEMTOM...

← GERJESZTÉST ISMERNI KELL MINDEN k-RA és y-t is (x-et is) minden k-ra kapjuk. (real time)

- kezdeti feltétellel indítunk ($x_{[0]}$)
- DIFF egyenletbe ($x[1]$) behelyettesítjük: x_0-t, és s_0-t.
- Megkapjuk $x[1]$-et,
- ezt $y[1]$-be. $y[1]$-et megkapjuk
- ÚJRA: $x[2]$-be $x[1]$-et, és $s[1]$-et
- ebből $x[2]$ majd $y[2]$.

$x_0 = \cdots$ $s[-1]$, $x_{[-1]} = 0$ ha $s_{[-1]} = 0$



AKÁRHOL X IS LEHET

SZÁMÍTÁS

- $y_{[0]}$ (azonos k)
- $x_{[1]} \to y_{[1]}$
- $x_{[2]} \to y_{[2]}$

TÁBLÁZATBA

b) ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS:

$x_{[k]} = x_{f[k]} + x_{g[k]}$

$x[k]$? HA MEGVAN: BELE y_k-BA

- $x_{[k+1]}$ - egyenlete: felhasználjuk belőle $\underline{A}$-t és $\underline{B}$-t.
- $y_{[k]}$ - egyenlete: ezt használjuk a válasz számításához - bele $x_{[k]}$-t. (mi = $x_f + x_g$)

- $x_{f[k]}$? $\quad \underline{x}_{f[k]} = \underline{M}_i \lambda^k$ ← $\det|\underline{A} - \lambda \underline{E}| = 0$

$\underline{M}$? ebbe fokozatos behelyettesítéssel $k = 2 \ldots k$: egyenlet rendszer M_i-re. $y_{[k]}$ értékeit RE.-ből behelyettesítve

- x_g?

- $x_{[k]} = x_{f[k]} + x_{g[k]}$ $\quad y_{[k]} = \underline{C}^T x_{[k]} + \underline{D}\, s[k]$

c) NEMTOM... MÁSIK LAPON.

RENDSZEREGYENLET

- állapotváltozós leírásból kifejezni:

$y_{[k]} = f(y_{[k-1]}, y_{[k]} \ldots s_{[k]}, s_{k-1})$

PL.: $y_{[k]} = a\, y_{[k-1]} + b\, y_{[k+1]} + c\, s_{[k-1]}$

- EBBŐL $y_{[k]}$:

a) FOKOZATOS BEHELYETTESÍTÉSSEL

b) ÖSSZETEVŐKRE BONTÁSSAL

a) FOKOZATOS BEHELYETTESÍTÉS:

- ISMERNI KELL a kimeneti értéket y-ok, és s minden konkrét (s-minden k-ra)
- UGYANÚGY, MINT KORÁBBAN, CSAK ITT EGYBŐL y-t kapjuk.

- ott kell kezdeni a behelyettesítést, ahol a legkorábbi tag ($y[k-n]$) pont a 0-val van.
- y_0-t behelyettesítjük, a többi tag még 0. y_1-et megkapjuk
- $k+=1$ ennek 2 tagunk van ezeket be, …
- amilyen tagunk még nincs, az $=0$ pl. $k=2$ és: $y[k-3]=0$
- így y-t …-ra (REAL TIME)

EREDMÉNY SOR

EREDMÉNY függvény $y[k]=f(s[k])$

EBBE BE LEHET HELYETTESÍTENI

b) ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS:

$$y[k]=y_{f[k]}+y_{g[k]}$$

$-y_{f[k]}$? $\quad y_{f[k]}=\lambda^k \underline{M}$

$$\underline{M}=[\underline{S}_1\ \underline{S}_2] \text{ „összetevés"}$$

• sajátértékek száma = állapotváltozók száma

$\lambda = ?$

$$\det[\underline{\underline{A}}-\lambda \underline{\underline{E}}]=0 \to \lambda$$

karakter. értéke

$$\det\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

= FŐÁTLÓ (↘) − MELLÉKÁTLÓ (↙) ha (2×2)

• $\underline{\underline{M}}$: $\underline{S}$ SAJÁTVEKTOROK

$$S_1=\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21}\end{bmatrix} \quad S_2=\begin{bmatrix} S_{21} \\ S_{22}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{S}_i=\lambda_i \underline{S}_i \to \underline{S}_i$$

EZ EGY EGYENLETRENDSZER.

- az egyik = 1 (s_{11}) a másikat ki lehet számolni. majd …
- ha λ_i komplex: akkor komplex egyenletrendszer lesz

$-y_g$ $\quad \underline{\underline{A}}\, x_g=-\underline{B}$ PRÓBAFÜGGVÉNNYEL

GERJESZTÉSHEZ HASONLÓ PRÓBAF.-NYEL GERJESZTJÜK ÉS KIJÖN. (SZÁM) TÁBLÁZATBÓL

$$e^{j\vartheta}=\cos\vartheta+j\sin\vartheta$$

$W(e^{j\vartheta})$-BÓL → RENDSZEREGYENLET

$Y=W\cdot S$

$$W=\frac{P_z}{Q_z} \to Y \to \sum y[k-i]$$

és ahol szorzó: $e^{-ji\vartheta} \to [k-i]$, $z^{-i} \to [k-i]$ INDEX

felírni:

$YQ=SP$ ← ITT BEHELYETTESÍTENI!

MAJD KIFEJEZNI:

$Y=f(Y,S)$

GERJESZTETT VÁLASZ

a) SZINUSZOS GERJESZTÉS

$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)$ $\quad \omega=\frac{2\pi}{T_0}$

$x(kT)=X\cos(\omega kT+\varphi)$ $\quad \omega T=\vartheta$

$x[k]=X\cos(k\vartheta+\varphi)$ $\quad =\frac{2\pi T}{T_0}=\frac{2\pi}{K}$

$=\mathrm{Re}\{X e^{j(k\vartheta+\varphi)}\}$

$=\mathrm{Re}\{\hat{X} e^{jk\vartheta}\}$ $\quad \hat{X}=Xe^{j\varphi}$

KOMPLEXEN

válasz hasonlít a gerjesztésre

b) ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA

$$W(e^{j\vartheta})=\frac{Y(e^{j\vartheta})}{S(e^{j\vartheta})}=\frac{P(e^{j\vartheta})}{Q(e^{j\vartheta})}$$ (FOLYTONOS)

1) RENDSZEREGYENLETBŐL → $W(e^{j\vartheta})$

$$y[k]=\sum_i a\, y[k-i]+\sum s[k-i]\, b$$

ebből ahol $y[k-i] \to Y\cdot e^{-ji\vartheta}$; $s[k-i] \to S e^{-ji\vartheta}$

Majd kifejezni Y-t és $S(e^{j\vartheta})$-t, így lesz $W(e^{j\vartheta})$.

AMPLITÚDÓ KAR.: $|W(e^{j\vartheta})|$

FÁZIS KAR.: $\mathrm{arc}(W(e^{j\vartheta}))$ $\left(\mathrm{arctg}\frac{Im}{Re}\right)$

VÁLASZ SZÁMÍTÁSA: $Y(e^{j\vartheta})=W(e^{j\vartheta})\cdot S(e^{j\vartheta})$

2a) NEM PERIODIKUS: $s[k] \xrightarrow{\mathcal{F}} S(e^{j\vartheta})$

3a) $Y=W S$

4a) $y[k]=\mathcal{F}^{-1} Y(e^{j\vartheta})$

lehet: 1) RE → $W(e^{j\vartheta})$

b) PERIODIKUS: $2\vartheta_0=?$

$s[k] \to s[k]_{\vartheta_0},\ s[k]_{2\vartheta_0},\ s[k]_{3\vartheta_0}$ … FOURIER SOR

$$y_k=\begin{cases} s_{k\vartheta_0}\cdot W_{\vartheta_0} \\ s_{k2\vartheta_0}\cdot W_{2\vartheta_0} \\ s_{k3\vartheta_0}\cdot W_{3\vartheta_0}\end{cases}$$

W FELÍRÁSA 2 HÁLÓZATBÓL

$X \xrightarrow{k} kX$ $\qquad$ $X(e^{j\vartheta})$ —[D]— $e^{-j\vartheta}X(e^{j\vartheta})$

$X_1, X_2 \to \oplus \to X_s=\sum X$ $\qquad$ MINDEN =

HÁLÓZATI EGYENLETEK:

- SEGÉDVÁLTOZÓK A ZÖSSZEGZŐK, KÉSL. ERŐSÍTŐK KIMENETEIN
- EZEKET FELÍRJUK A RAJZ ALAPJÁN ÁLLAPOTEGYENLET-HEZ HASONLÓ EGYENLETEK, CSAK NEM K-S INDEXES, HANEM $e^{ji\vartheta}$-S SZORZÓS ALAKBAN

$\underline{x}=\underline{A}\,\underline{x}+\underline{b}s$

$y=c^T x+Ds$

- EBBŐL y/s-t kifejezni, és az $=W(e^{j\vartheta})$

FOURIER SORFEJTÉS (PERIODIKUS JEL)

1) $\bar{X}=\sum_{p=1}^{\infty}\bar{X}(p\vartheta)$ $\qquad$ 3) $\vartheta=\frac{2\pi T}{T_0}=2\vartheta_0=\frac{2\pi}{K}$

2) $\bar{X}(p\vartheta)=\left(\sum_{k=0}^{K-1}X[k]\,e^{-jpk\vartheta}\right)\frac{1}{K}$ (k: FUTÓ INDEX)

- A MÁSODIK EGYENLETET MINDEN P-RE (0…Q) FELÍRJUK.
- EZ K-1 TAGBÓL ÁLL 1 PERIÓDUSA A JELNEK (ÖSSZEG)
- BEHELYETTESÍTENI MINDEN TAGBA K-ET ÉS P-T (EGYENLET SORSZÁMA) $X[k]$ → RAJZBÓL VAGY KÉPLETBŐL
- AZ EGYENLETEKET EGYSZERŰSÍTENI AZ EREDMÉNY 1 KOMPLEX SZÁM/EGYENLET $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$…

$-\bar{Y}=\bar{W}\cdot\sum\bar{S}(p\vartheta)$

KOMPL. SZÁM $A+jB$; KOMPLEX SZÁM $A+jB$; KOMPLEX SZÁM $A+jB$

$A e^{jB} \to C e^{jD}$, $C=$ ACOS, $D=$ …

ÁTALAKÍTÁS MINDEN FREKIN ($p\vartheta_0$) KÜLÖN

$$A+jB \to Ce^{jD} \to C\cos(kp\vartheta_0+D)$$

F-SOROS JELALAK: ILYEN TAGOKKAL: $\hat{X}\cos(kp\vartheta+\varphi)$

F-SOR IS DISZKRÉT, MERT A JEL IS (ÉS PERIODIKUS)

FOURIER TRAFÓVAL A VÁLASZ:

$y_{(e^{j\vartheta})} = W_{(e^{j\vartheta})} \cdot \mathfrak{I}_{(e^{j\vartheta})}$

$\mathfrak{I}_{[k]}$ F. TRANSZFORMÁLÁSA

$S_{(e^{j\vartheta})} = \mathcal{F}\{\mathfrak{I}_{[k]}\}$

DI F. TRAFÓ $x_{[k]} \to X_{(e^{j\vartheta})}$

SZABÁLYOK:

$\mathcal{F}\{x_1\} + \mathcal{F}\{x_2\} = \mathcal{F}\{x_1 + x_2\}$

ELTOLÁSI TÉTEL:

$\mathcal{F}\{x_{[k-p]}\} = e^{-jp\vartheta} \mathcal{F}\{x_k\}$

MODULÁCIÓS TÉTEL:

$\mathcal{F}\{e^{j\vartheta_0 k} \cdot x_{[k]}\} = X_{(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)k})}$

KONVOLÚCIÓ:

$\mathcal{F}\{x_{1[k]} * x_{2[k]}\} = X_{1(e^{j\vartheta})} \cdot X_{2(e^{j\vartheta})}$

$X_{(e^{j\vartheta})} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{[i]} \cdot e^{-j\vartheta i}$

A TRAFÓ

$X_{(e^{j\vartheta})} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{[i]} e^{-ji\vartheta}$

HA COS, SIN VAN, ÁT KELL TÉRNI $e^{\dots}$

HA ABSZOLÚT ÖSSZEGEZHETŐ (KONVERGENS)

ALAPFÜGGVÉNYEK: F-TR

$x_k \to X_{(e^{j\vartheta})}$

$\mathrm{sgn}\, k \to \frac{1}{j\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}$

$\delta_{[k]} \to 1$

$\delta_{[k-p]} \to e^{-jp\vartheta}$

$\varepsilon_{[k]} a^k \to \frac{1}{1 - a e^{-j\vartheta}}$

$\varepsilon_{[k]} \to \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}} + \pi\delta_{(\vartheta)}$

$e^{j\vartheta_0 k} \to 2\pi\delta_{(\vartheta-\vartheta_0)}$

$a^{|k|} \to \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\vartheta}$

$1 \to 2\pi\delta_{(\vartheta)}$

$\varepsilon_{[k]} e^{j\vartheta_0 k} \to \frac{1}{1-e^{-j(\vartheta-\vartheta_0)}} + \pi\delta_{(\vartheta-\vartheta_0)}$

INVERZ FOURIER TRAFÓ

$x_{[k]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{(e^{j\vartheta})} e^{j\vartheta k}\, d\vartheta$

$y_{[k]} = \mathcal{F}^{-1}\{S_{(e^{j\vartheta})} \cdot W_{(e^{j\vartheta})}\}$

ÁTVITELI KARAKT.

KOMPLEX FREQ - TARTOMÁNY

Z-TRAFÓ

$Y_{(z)} = W_{(z)} S_{(z)}$

$X_{(z)} = Z\{x_{[k]}\} = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} x_{[i]} z^{-i}}$

$= x_{[0]} + x_{[1]} \cdot z^{-1} + x_{[2]} \cdot z^{-2} + x_{[3]} z^{-3} \dots$

Z-TRAFÓ SZABÁLYAI:

$Z\{x_{1[k]} + x_{2[k]}\} = Z\{x_1\} + Z\{x_2\}$

ELTOLÁS:

$\varepsilon_{[k-R]} \cdot x_{[k-R]} \xrightarrow{Z} z^{-R} X_{(z)}$

NEM BELÉPŐ JEL:

$x_{[k-R]} \xrightarrow{Z} \sum_{m=-2}^{-1} x_m z^{m} + Z\{x_{[k]}\}$

INVERZ Z-TRAFÓ SZABÁLYAI:

$X_Z = \frac{P_{(z)}}{Q_{(z)}}$ P, Q Z NEGATÍV HATVÁNYAI SZERINT!

- FELBONTÁS PARCIÁLIS TÖRTEKRE

$X_Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - p_i} \to \varepsilon_{[k]} \sum_{i=1}^{n} c_i p_i^k$

- PROBLÉMÁK
  - NEM VALÓDI TÖRT: (NEM RAC.) KIEMELNI: (POLINOMOSZTÁS)

$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}$

- TÖBBSZÖRÖS PÓLUSOK

AKKOR A TÖBBSZÖRÖS RÉSZ:

$\sum_{i=0}^{m} \frac{D_i}{(z-p)^i}$

$p^k \cdot \sum_{i=0}^{m} D_i \cdot \frac{\prod_{n=0}^{i} (k-n)}{p^i \cdot i!}$

- HA A FELBONTÁS UTÁN ILYEN MARAD: (NEM KELL KIF. TÉTEL)

$+\frac{z}{z-p} \to +\varepsilon_{[k]} p^k$

$+\frac{z}{(z-p)^2} \to +\varepsilon_{[k]} k p^{k-1}$

ELŐTTE KIEMELNI z^{-N}-ET, AMIT TETSZIK FOBÓL LESZAT ETOLÁS $x_{[k-N]}$

Z-TR ALAP FÜGGVÉNYEK

$\delta_{[k]} \to 1$

$\varepsilon_{[k]} q^k \to \frac{z}{z-q}$

$\delta_{[k-R]} \to z^{-R}$

$\delta_{[k+1]} \to z$

$\varepsilon_{[k]} \to \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$\varepsilon_{[k-R]} \to \frac{z}{z^{R}(z-1)}$

$\varepsilon_{[k]}(A\cos\vartheta_0 k + B\sin\vartheta_0 k) \to \frac{A(z^2 - z\cos\vartheta_0) + Bz\sin\vartheta_0}{z^2 - 2z\cos\vartheta_0 + 1}$

$\varepsilon_{[k]} k q^{k-1} \to \frac{z}{(z-q)^2}$

$\varepsilon_{[k]} k \to \frac{z}{(z-1)^2}$

$\varepsilon_{[k]} \frac{k(k-1)}{2} q^{k-2} \to \frac{z}{(z-q)^3}$

$\varepsilon_{[k]} k^2 \to \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$

$\varepsilon_{[k]} \frac{k!}{m!(k-m)!} q^{k-2} \to \frac{z}{(z-q)^{m+1}}$

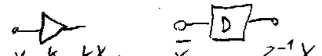
$\varepsilon_k k^3 \to \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(z-1)^4}$

ÁTVITELI FÜGGVÉNY:

$W_{(z)} = \frac{y_{(z)}}{S_{(z)}}$

ÁTVITELI KARAKTERISZTIKÁBÓL, HA: $z = e^{j\vartheta}$

HÁLÓZATBÓL



$x_{(z)}$ k $kx_{(z)}$ $x_{(z)}$ D $z^{-1} X_{(z)}$

EGYENLETEK TRANSZFORMÁLÁSA (TAGONKÉNT)

$x_{[k-p]} \xrightarrow{Z} z^{-p} X_{(z)} + \sum_{i=0}^{p-1} z^{-i} x_{[-p+i]}$

ÁLLAPOTEGYENLETBŐL, VAGY INKÁBB RENDSZEREGYENLETEKBŐL.

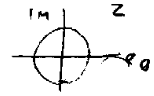
TÉTELEKHEZ MÉG:

CSILLAPÍTÁSI TÉTEL:

$a^k f_{[k]} \xrightarrow{Z} X_{(\frac{z}{a})}$

POLE-ZERO

$W = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots}{(z-p_1)(z-p_2)\dots}$



STABILIS, HA MINDEN PÓLUS AZ EGYSÉGSUGARÚ KÖRÖN BELÜL VAN, TEHÁT ABSZ. ÉRTÉKÜK: $|p_i| \leq 1$

STABILITÁS:

a) ASSZIMPTOTIKUS: ÁLLAPOTEGYENLET: $\to |\lambda_i| < 1$

b) GERJESZTÉS-VÁLASZ-STAB: $|p_i| \leq 1$

$|u_{[k]}| < K$

c) NINCSENEK PÓLUSOK: FIR TÍPUSÚ

FÜGGVÉNY ILLESZTÉSE VÁLASZRA (SZÁMSOR)

$y = M_1 \lambda_1^k + M_2 \lambda_2^k$ M_1, M_2 SZÁMOK

3 ÁLLAPOTVÁLTOZÓ $\to \underline{A} \to 3\times 3$

y_2 (számokat) 3 egyenlet OLDALAK: BAL: KISZÁMOLT SZÁM JOBB: λ ISMERT

$y_2 = M_1 \lambda_1^2 + M_2 \lambda_2^2 + M_3 \lambda_3^2$

$y_3 = M_1 \lambda_1^3 + M_2 \lambda_2^3 + M_3 \lambda_3^3$

$y_4 = M_1 \lambda_1^4$

EGYENLETRENDSZER $\to M_{1,2,3}$?

HÁLÓZATI EGY. MINDEN RÉSZLETETŐ BEMENETÉRE: $x_{i[k+1]}$

ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA:

$W_{(j\omega)}$

$$W_{(j\omega)} = \frac{\bar U_{2(j\omega)}}{\bar U_{1(j\omega)}} = k_{\omega} \cdot e^{j\varphi_{(\omega)}}$$

AMPL. KAR. FÁZ. K.

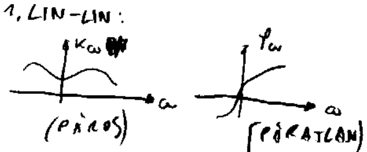
$$k_{(\omega)} = \sqrt{\left(Im\{W_{(j\omega)}\}\right)^2 + \left(Re\{W_{(j\omega)}\}\right)^2}$$

$$\varphi_{(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{Im\{W_{(j\omega)}\}}{Re\{W_{(j\omega)}\}}$$

1 PONTRA!

KARAKTERISZTIKÁK:

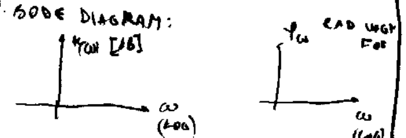
1. LIN-LIN:



(PÁROS) (PÁRATLAN)

A skála lineáris

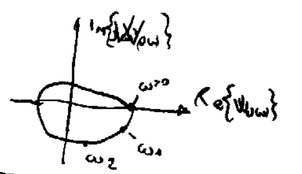
2. BODE DIAGRAM:



logaritmikus léptékkel

$k_{\omega} = 20 \lg k_\omega$ [dB]

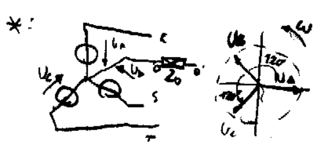
3. NYQUIST:



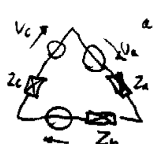
3FÁZISÚ HÁLÓZATOK

A GENERÁTOR:

*:



Δ:



a generátort nem szokták így kapcsolni

$U_a = U \Rightarrow U_b = U \cdot e^{-j120°}$

$U_c = U \cdot e^{j120°}$

3F FOGYASZTÓ ~~(?)~~ /mérése:

ELŐSZÖR: CSILLAGPONT(O) ELTOLÓDÁS:

$\bar U_0 = (Z_1 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_0)(\bar I_1 + \bar I_2 + \bar I_3)$

$$\bar U_0 = \frac{\bar U_a \bar Y_1 + \bar U_b \bar Y_2 + \bar U_c \bar Y_3}{\bar Y_1 + \bar Y_2 + \bar Y_3 + \bar Y_0}$$

MILLMAN TÉTELBŐL

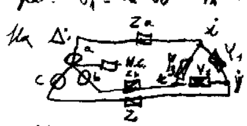
Ebből minden adott.

$U_1, U_2, U_3 ? \Rightarrow I_1, I_2, I_3 ?$

-meghatározhatók.

pl.: $\bar U_1 = \bar U_a - \bar U_0$ $\bar I_1 = \bar U_1 \cdot \bar Y_1$

ha Δ:



akkor *Δ átalakítással

i, j, k pontok feszültségeit kiszámolják (majd vissza)

$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

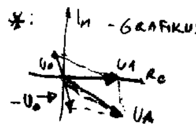
VONALFESZÜLTSÉG: U_1, U_2, U_3

FÁZISFESZÜLTSÉG: U_a, U_b, U_c

PILLANATNYI u, i:

*pont-eltolódás miatti számítás S_0

*: Im - GRAFIKUSAN



FÁZISSORREND:

ha $U_2 > U_1$

ÁLTALÁNOS PER. GERJESZTÉS

JEL MEGADÁSA:

- GÖRBÉVEL
- SZAKASZONKÉNT (CAJZ)
- EGYENLETTEL
- KÖZÉPÉRTÉKEKKEL

KÖZÉPÉRTÉKEK:

1. EGYSZERŰ KÖZÉP: U_0

$U_0 = \frac{1}{T}\int U_t \, dt$

2. ABSZOLÚT KÖZÉP: U_a

abszolútérték közepe

$U_a = \frac{1}{T}\int |U_t| \, dt$

3. EFFEKTÍV ÉRTÉKKEL:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_t^2 \, dt}$$

ALAKTÉNYEZŐK:

FORMATÉNYEZŐ: $k_f = \frac{I_{eff}}{I_a}$

CSÚCSTÉNYEZŐ: $k_{cs} = \frac{I_{max}}{I_{eff}}$

PERIODIKUS JEL SPEKTRUMA:

DISZKRÉT ω_0 SZERINT

ω_0 - ALAPHARMÓNIKUS

$$U_t = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat U_k^A \cos k\omega_0 t + \hat U_k^B \sin k\omega_0 t\right)$$

$$= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat U_k \cos(k\omega_0 t + \varsigma_k) \quad \text{(VALÓS)}$$

ahol: $U_k = \sqrt{U_k^{A2} + U_k^{B2}} \quad \varsigma = \operatorname{arctg} \frac{U_k^A}{U_k^B}$

ha U_t PÁROS: $U_k^B = 0$

VÁLASZ:

minden ω_0-án külön

$\bar Y_{(\omega_k)} = \bar W_{(\omega_k)} \cdot \bar X_{(\omega_k)}$ KOMPLEX!

$P = \sum U_k I_k \cos \varphi_k = \sum P_{(k\omega)}$

Minden felharmonikusra külön igazak a (komplex) ohm, kirchhoff törvények.

SPEKTRUMANALÍZIS ETK

Ha nem periodikus, és ABS. integrálható

$$X_{(j\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t \, e^{-j\omega t} \, dt \quad \text{(FOURIER TRAFÓ)}$$

nem periodikus $\Rightarrow T \to \infty$

INVERZ F. TRAFÓ:

$$x_{(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_{j\omega} \, e^{j\omega t} \, d\omega$$

TÉTELEK:

1.) F. TRANSZFO EMELHATÓ $x_{(t)}$, HA ABS integrálható

2. LINEARITÁS

3. $\mathcal{F}\{\delta_{(t)}\} = 1$

4. $\mathcal{F}\{1\} = \frac{1}{2\pi}\delta_{(\omega)}$

5. $\mathcal{F}\{\varepsilon_t\} = \pi\delta_{(\omega)} + \frac{1}{j\omega}$

6. ELTOLÁSI TÉTEL:

$x_{(t-\tau)} \to e^{-j\omega\tau}\mathcal{F}\{x_{(t)}\}$

7. MODULÁCIÓS TÉTEL:

$x_t \cdot e^{j\omega_0 t} \to X_{(j(\omega-\omega_0))}$

ha meg van szorozva ω_0-ás jellel, akkor eltolódik JOBBRA ω_0-VAL.

8. KONVOLÚCIÓ

$\mathcal{F}\{x_{(t)} * y_{(t)}\} = X_{j\omega} \cdot Y_{j\omega}$

9. DERIVÁLT:

$\mathcal{F}\{x_t'\} = j\omega X_{j\omega}$

10. INTEGRÁL

$\mathcal{F}\{\int x_t\} = \pi X_{(j\omega=0)} + \frac{X_{j\omega}}{j\omega}$

VÁLASZ SPEKTRUMA:

$Y_{j\omega} = X_{j\omega} \cdot W_{j\omega} \to y_{(t)}$ NEM SZOKTÁK

□-jel:

SPEKTRUMOK:

JEL: ahol $|X_{(\omega)}| > -20dB \cdot U_{max}$ (0,1)

ÁTVITELI KAR.:

ahol $|K_{(\omega)}| > -3dB \cdot K_{max}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Az átvitel határfrekvenciája ott legyen, ahol a jel csak 10%

Ez az ALAKHŰ JELÁTVITEL.

SZÁMÍTÁS:

- adott a jel és a kapcsolás.
- $X_{j\omega}$?
- előáll $W_{j\omega_1}$ és $W_{j\omega_2}$
- a 2 frekin az összetevők a tényező PARAM. a 2 érték között legyen
- ennél NEM SÁVSZŰRŐ kapcsolás! (ismerjük a kapcs. karakterisztikáját az adott, és az elméleti tudásból, hogy más frekin jobban lesz-e)

LAPLACE TRAFÓ

A változó: $s = \sigma + j\omega$

σ - a legnagyobb valós részű pólus valós része.

- Csak belépő és ABS int. ható jelekre

$$\mathcal{L}\{x_t\} = X_{(s)} = \int_{-0}^{\infty} x_{(t)} e^{-st}\, dt$$

INVERZE:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_s\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X_{(s)} e^{st}\, ds$$

TÉTELEK:

1. LINEARITÁS
2. INTEGRÁLT JEL
$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{t} x_\tau\, d\tau\right\} = \frac{X_s}{s}$$
3. DERIVÁLT:
$$\mathcal{L}\{\dot{x}_{(t)}\} = sX_{(s)} - X_{(0)}$$

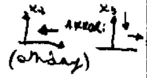
ALKALMAZÁS PL: KI/BE KAPCSOLÁSI jelenségek

G-V-LEÍRÁS:

- EXPLICIT:
  - IMP. VÁLASZ
  - ÁTVITELI FÜGGV.
  - ÁTVIT. KAR.
  - ÁTMENETI FÜGGV. (UGRÁSVÁLASZ)
- IMPLICIT
  - ÁLLAPOTEGYENLET

MEGJEGYZÉSEK:

4. CSILLAPÍTÁSI: $x_t e^{\alpha t} \to X_{(s+\alpha)}$
5. $\varepsilon_{(t-T)} x_{(t-T)} \to e^{-sT} X_{(s)}$
6. HASONLÓSÁGI: ha



(ordináta)

ENERGIASPEKTRUM (JEL)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{(t)}|^2\, dt$$

$$E_{j\omega} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |X_{(j\omega)}|^2\, d\omega$$

ENERGIA ELOSZLÁSA A FR. FÜGGVÉNYÉBEN

Az átviteli kar. $W_s = \frac{Y_s}{S_s}$

felírható $\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}}$ alakban.

Mivel minden polinom felbontható gyöktényezős alakban:
$$\frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

$$y_{i(t)} = K_i e^{-t/\tau_i} \quad \tau_i = -\frac{1}{p_i}$$

STABILITÁS:

- GERJ.-VÁL.: korlátos gerjesztéshez korlátos válasz.
  ha $\int |w_t|\, dt < K$
  ha $Re\{p_i\} < 0$
- ASSZIMPTÓTIKUS:
  ha $Re\{\lambda_i\} < 0$
  állapotegyenletből

KARAKTERISZTIKÁK:

R: $U_{R(s)} = R I_{R(s)}$

L: $U_{L(s)} = L\left(s I_{L(s)} - i_{L(t=0)}\right)$

C: $U_{C(s)} = \frac{U_{C(t=0)}}{s} + \frac{1}{sC} I_{C(s)}$

ha nem kikapcs. jelenség: $U_{C(s)} = \frac{1}{sC} I_s$

és $U_{L(s)} = Ls I_{L(s)}$

$Z_{L(s)} = sL$

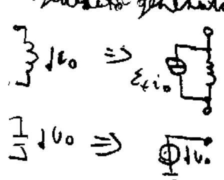
$Z_{C(s)} = \frac{1}{sC}$

KÉTKAPUK:

egyszerűen egyenletek, csak itt U_1... nem sima, hanem függvény.

NEM 0 kezdeti feltétel:

- helyettesítő generátor elve.



SPECIÁLIS HÁLÓZATOK:

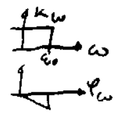
a) arányos: $y_t = K s_{(t)}$

b) INTEGRÁTOR, differenciáló
$$y_{(t)} = \int_0^t s_\tau\, d\tau \quad y_{(t)} = \frac{d}{dt} s_t$$

$w_{(t)} = \varepsilon_t \quad \delta_{(t)}$

c) oszcillátor
$$w_{(t)} = y_{(t)} = \varepsilon_t \cos\omega_0 t$$

d) aluláteresztő szűrő: (IDEÁLIS)



$$W_{(j\omega)} = \begin{cases} K e^{-j\omega T} & \omega < \omega_0 \\ 0 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

e) Mindentáteresztő hálózat

$W_{(s)} = 1 = K_0 \cdot e^{j\varphi}$

ehhez $z_i = -p_i^*$ kell

$$W_s = \frac{(s + p_1^*)(s + p_2^*)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

ANNYI PÓLUS AHÁNY ZÉRUS

f) minimálfázisú hálózat.

$Re\{p_i\} < 0 \quad Re\{z_i\} < 0$

Minden hálózat felírható PÓLUSSZÁM ≠ ZÉRUSZÁM ÁLTAL.

Mindentáteresztő + minimálfázisú összekapcsolásból (sorosan)

$W_{1(s)} \cdot W_{2(s)} = W_{(s)}$

- úgy fiktív pólusokat, és azokat kompenzáló zérusokat kell bevezetni.

$(p', z', p' = z')$ ezeket p_1'

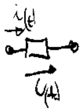
Bevezetés: $p_1' = -z_1^*$

Minden jobb oldali zérushoz (+ valós részű z-hez)

1. AZ EREDETI ÉS JOBB OLDALI ZÉRUSOKHOZ KELLENEK ÚJ PÓLUSOK: $p_i = -z_i^*$
2. MAJD UGYANODA, AHOVA p_i-ket tettük, tegyünk zérusokat is!
3. A PÓTTAGOKAT 2 felé válogatjuk:
   MINDENÁTERESZTŐHÖZ: az eredeti jobb oldali ZÉRUSOK, és az új PÓLUSOK
   MINIMÁLFÁZISÚ: minden egyéb (MARADÉK)
4. ÁTVITELI KARAKTERISZTIKÁK:
$$W = \frac{(s + z_1)(s - z_2)\cdots}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots}$$

TELJESÍTMÉNYEK

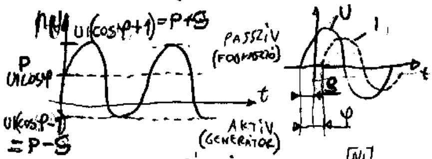
(SIMA) SZINUSZOS GERJESZTÉS:



$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \rho)$

$(U = U_{EFF})$ $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \rho - \varphi)$

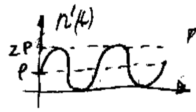
$p(t) = 2UI\cos(\omega t + \rho)\cos(\omega t + \rho - \varphi)$



HATÁSOS TELJESÍTMÉNY: [W]

$P = UI\cos\varphi = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

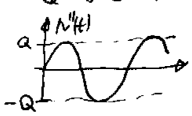
$= \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos\varphi$



$\neq P(t)$ P – EGY SZÁM!

MEDDŐ TELJESÍTMÉNY: [VAr]

$Q = UI\sin\varphi$



$\neq Q(t)$

NINCSENEK FÁZISBAN(?)

$p(t) = p'(t) + p''(t)$

S – LÁTSZÓLAGOS TELJESÍTMÉNY [VA]

$S = U \cdot I$

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

KOMPLEX TELJESÍTMÉNY [VA]

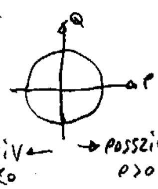
$\bar{S} = \bar{U}\cdot\bar{I}^* = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi}$

$P = \mathrm{Re}\{\bar{S}\}$ $Q = \mathrm{Im}\{\bar{S}\}$

– PASSZIVITÁS

PASSZÍV, HA $P \geq 0$

$\bar{S}$



Ha $Q>0$ INDUKTÍV $Q<0$ – KAPACITÍV

$P = Q = 0$ NON ENERGIKUS

– HA NEM SZINUSZOS A GERJESZTÉS, AKKOR MEG KELL HATÁROZNI A JEL SPEKTRUMÁT, ÉS (F-SOR) MINDEN FREKVENCIÁN KÜLÖN KELL MEGHATÁROZNI A TELJESÍTMÉNYT. (ÁLTALÁNOS PERIÓDIKUS) (TEHÁT FOURIER SORBA FEJTJÜK A JELET)

$P = \sum_{k=0}^{n} P_{(k\omega)}$ $Q = \sum_{k=0}^{n} Q_{(k\omega)}$

$P_{(k\omega)} = \sum U_{(k\omega)} I_{(k\omega)} \cos\varphi_{(k\omega)}$

– EFFEKTÍV ÉRTÉK MINDEN FREKVENCIÁN KÜLÖN (FOURIER SORBÓL). MAJD ÖSSZESÍTVE A TELJES JELRE:

$U_{EFF} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} U_{(k\omega)}^2}$

$I_{EFF} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} I_{(k\omega)}^2}$

F-SORNÁL: $U_{EFF} = \sqrt{U_0^2 + (\hat{U}_1/\sqrt{2})^2 + (\hat{U}_2/\sqrt{2})^2 + \ldots}$

– LÁTSZÓLAGOS TELJESÍTMÉNY

$S = U_{EFF} \cdot I_{EFF}$ (ε)

– OHM, KIRCHOFF TÖRVÉNYEK MINDEN FREKIN KÜLÖN ÉRVÉNYESEK

$\Sigma U = 0$ $\Sigma I = 0$ $\bar{U}_{(k\omega)} = \bar{Z}_{(k\omega)} I_{(k\omega)}$

– JEL MEGADÁSA:

- GÖRBÉVEL (RAJZ)
- SZAKASZONKÉNT

$u(t) = \begin{cases} U_0 & 0 < t \leq T/2 \\ -U_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$

- EGYENLETTEL

AZ ELSŐ 2 ALAPJÁN FEL KELL ÍRNI AZ EGYENLETET

- KÖZÉPÉRTÉKKEL

1. EGYSZERŰ KÖZÉP (I_0, U_0)

$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$

(egyszerű integrál) (DC-szint)

2. ABSZOLÚT KÖZÉP (I_a, U_a)

$U_a = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,dt$

egyenirányítva, és annak az integrálja. (GRÄTZ HIDDAL)

3. EFFEKTÍV ÉRTÉK (U, U_{EFF})

$U_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt}$

- ALAKTÉNYEZŐK

FORMATÉNYEZŐ $k_f = \frac{U_{EFF}}{U_a} \geq 1$ (mennyire leggyes)

CSÚCSTÉNYEZŐ $k_{cs} = \frac{U_m}{U_{EFF}} \geq 1$

HÁLÓZATOK FREKVENCIAFÜGGÉSE

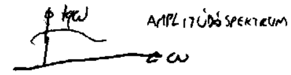
– W – ÁTVITELI TÉNYEZŐ (KOMPLEX) adott frekvencián érvényes.

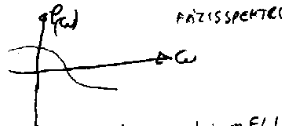
$W = \frac{U_{KI}}{U_{BE}}$ U_{BE} – $\boxed{W(j\omega)}$ – U_{KI}

$W(j\omega)$ – ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA

az átviteli tényező a frekvencia függvényében

– Mivel az KOMPLEX, ezért 2 részre bontjuk: AMPLITÚDÓ $(K(\omega))$ és A FÁZISKARAKTERISZTIKA $(\varphi(\omega))$ (EZ A 2 A BODE-DIAGRAM)

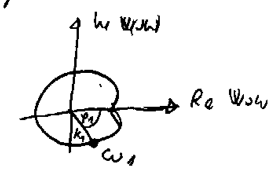




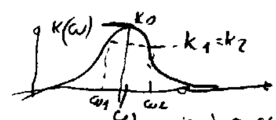
– MEGADHATÓ AZ ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA NYQUIST-DIAGRAMMAL IS: Minden ω 1 pont: ott a $W(j\omega)$-hoz ábrázolható a valós és képzetes részre. ZÁRT GÖRBE.

– Adott ω-hoz tartozó φ, és K:

φ – a valós tengellyel bezárt szög, K az origótól való távolság.



– A BODE DIAGRAMRÓL leolvasható le: SÁVSZÉLESSÉG:



ω_0 – KÖZÉPFREK.

$\frac{K_0}{K_1} = \sqrt{2} = 3dB$

és a $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$

a sávszélesség.

– $W(j\omega) = \underbrace{K(\omega)}_{\text{ABSZ. ÉRTÉK}} \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$K(\omega) = \sqrt{(\mathrm{Re}\{W(j\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{W(j\omega)\})^2}$

MINDEN ω-N 1 PONT, VAGY (SZÁMÍTÓGÉPPEL) 1 FÜGGVÉNY A teljes tartományra

$\varphi(\omega) = \arctg\frac{\mathrm{Im}\,W(j\omega)}{\mathrm{Re}\,W(j\omega)}$

ez szintén...

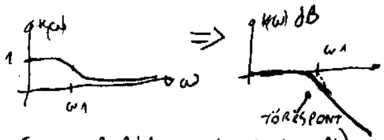
- $K(\omega)$ átírni dB-re:

$$K(\omega)_{,dB} = 20 \lg K(\omega)$$

MINDEN FREKIN KÜLÖN VAGY a teljes függvényre.

Ha $K(\omega)=1$ akkor ez $= 0\,dB$

Ha az ω tengely is LOGARITMIKUS, akkor



(az 1 aluláteresztő szűrő volt)

— A FELADATOK ARRA IRÁNYULNAK

• HOGY ADOTT GERJESZTÉSRE MI A KIMENET SPEKTRUMA:

$$U_{KI}(j\omega) = W(j\omega) \cdot U_{BE}(j\omega)$$

$$\varphi_{KI}(\omega) = \varphi_W(\omega) + \varphi_D(\omega)$$

Ha a gerjesztés nem periodikus, akkor ismert $U_{BE}(j\omega)$ függvényünk. (FOURIER TRANSZFORMÁCIÓBÓL)

Ha PERIODIKUS, akkor:

Minden harmonikusra külön kell elvégezni, (alaph. és n db felharmonikus) és az átviteli karakterisztikából átviteli tényezőket kell számolni (ω_k - behelyettesítés) (Ezek komplexek)

ω_0: $U_{KI}(\omega_0) = W(\omega_0) \cdot U_{BE}(\omega_0)$ ÁTV. TÉNYEZŐ ω_0-N

ω_1: $U_{KI}(\omega_1) = W(\omega_1) \cdot U_{BE}(\omega_1)$

...

• HOGY ADOTT GERJESZTÉSRE MI A VÁLASZ (KIMENET) KOMPLEX SPEKTRUMA

Ha periodikus, ha nem, a bemenő jelet LAPLACE-TRANSZFORMÁLJUK

$$U_{BE}(t) \rightarrow U_{BE}(p)$$

FELÍRJUK A HÁLÓZAT ÁTVITELI FÜGGVÉNYÉT $W(p)$

és:

$$U_{KI}(p) = W(p) \cdot U_{BE}(p)$$

$$U_{KI}(t) = \mathcal{L}^{-1} U_{KI}(p) = \mathcal{L}^{-1}\{W(p) \cdot U_{BE}(p)\}$$

• MI AZ ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA

A bemenet 1 forrás, a kimenet 2 pont közti ($\varphi_n - \varphi_m = U_{KI}$) feszültség.

Fel kell írni a CSOMÓPONTI egyenletrendszert, MIVEL $W(p) = \frac{U_{KI}}{U_{BE}} = \frac{\varphi_n}{U_D} = \frac{y}{D}$

és az egyenletrendszer:

$$\underline{A} \cdot \underline{\varphi} = \underline{D}$$

részletesebben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot U_D \\ F \cdot U_D \end{bmatrix}$$

Ha $U_{KI} = \varphi_2$ AKKOR: φ_1-et kifejezni az egyik egyenletből, behelyettesíteni a másikba, KIFEJEZNI $\frac{U_{KI}}{U_{BE}}$ - t, A, B, C...-t BEHELYETTESÍTENI KIPOFOZNI, ÉS KÉSZ A $W(p)$

(Beépített könnyítés, hogy az $\underline{D}$ - ben általában MAX 1 elem $\neq 0$ így a többi ismeretlenes egyenletek is megoldhatók)

AZ A, B, C...-k ω-FÜGGŐ tagokat is tartalmaznak, így lesz a W is ω-FÜGGŐ

• HOGY MI AZ ÁTVITELI FÜGGVÉNY

itt az átviteli tényező $W = \frac{U_{KI}}{U_{BE}}$ nem $j\omega$, hanem p - KOMPLEX FREKVENCIA függvénye. $W(p)$

Legegyszerűbb, ha a KISZÁMOLT $W(j\omega)$ - ban a $j\omega$-t átírjuk p-re.

Vagy: úgy számoljuk, mint a $W(j\omega)$-nál, csak a REAKTANCIÁK: $X_C = \frac{1}{pC}$ $X_L = pL$.

• MI A (BEMENŐ) JEL SPEKTRUMA:

1) PERIODIKUS:

FOURIER SORBA KELL fejteni

FOURIER SOR:

ω_k-hoz tartozó AMPLITÚDÓK, és $k = 0 \ldots n$

ahol ω_0 az alapharmonikus körfrekv., $\omega_1 \ldots \omega_n$ a felharmonikusok.

a jel pedig: A F. SOR:

$$U(t) = U_0 + \sum_{k=0} U_k^A \cos k\omega t + U_k^B \sin k\omega t$$

Ez $\neq U(\omega)$ tehát a FOURIER SOR = a bem. jellel.

Ezt csak LEHET spektrumként is felfogni: kiírni választjuk a tagokat. (ez KÖNNYŰ, MIVEL ÖSSZEG) Ahol $\omega = k\omega_0$, és AMPLITÚDÓ $= U_k$

F. SOR MÁS (KOMPLEX) ALAKJA:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{U}_k e^{j(k\omega t + \varphi_k)}$$

(A SPEKTRUM DISZKRÉT)

VAGY

F. SOR VALÓS ALAKJA:

$$U(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{n} \hat{U}_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

ahol $U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\, dt$ MINDEN ALAKHOZ

$$\hat{U}_k = \frac{2}{T}\int_0^T U(t) e^{-jk\omega t}\, dt$$

KOMPLEX ÉS VALÓS ALAKHOZ:

$$\varphi_k = \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{Im}\, \hat{U}_k}{\mathrm{Re}\, \hat{U}_k} = \mathrm{arctg} \frac{U_k^B}{U_k^A}$$

$$\hat{U}_k = \sqrt{(U_k^A)^2 + (U_k^B)^2} = |\hat{U}_k|$$

RENDES ALAKHOZ:

$$U_k^A = \frac{2}{T}\int_0^T U(t) \cos k\omega_0 t\, dt = \mathrm{Re}\{\hat{U}_k\}$$

$$U_k^B = \frac{2}{T}\int_0^T U(t) \sin k\omega_0 t\, dt = \mathrm{Im}\{\hat{U}_k\}$$

A Σ jel nélkül n tag felírva az n-ed FOKÚ FOURIER POLINOM

$$U(t) = U_0 + U_1^A \cos\omega t + U_1^B \sin\omega t + U_2^A \cos \ldots$$

2.) NEM PERIÓDIKUS

FOURIER TRANSZFORMÁLJUK A KÉPLETET.
Tehát képlet kell. ha ábra van, akkor abból is képletet kell csinálni

$\Rightarrow U(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(j\omega)$

(részletesebben máshol leírva.)

- MI A (BEMENŐ) JEL KOMPLEX SPEKTRUMA

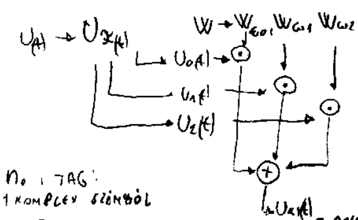
Előzőhöz hasonló, csak LAPLACE-TRANSZFORMÁLNI kell (nem F. TR.)

$\rightarrow U(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(p)$

- KIMENET IDŐFÜGGVÉNYE

1.) BEMENET F.SORBAN VOLT

a kimenetet egyből FOURIER SORBAN (POLINOMBAN) KAPJUK, ami IDŐFÜGGVÉNY, EZÉRT TELJESEN JÓ



n. TAG: 1 KOMPLEX SZÁMBÓL — F. POLIN

$+\sqrt{(\mathrm{Re}\,U_{K(n)})^2+(\mathrm{Im}\,U_{K(n)})^2}\cos\left(n\cdot\omega t+\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\,U_{K(n)}}{\mathrm{Re}\,U_{K(n)}}\right)$

2.) BEMENET F. TRANSZFORMÁLVA VOLT : INVERZ FOURIER TR.

$U_{K}(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} U_K(t)$

3.) BEM. LAPLACE. TR. VOLT :

$U_K(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} U_K(t)$

- STABILITÁS? (HÁLÓZAT)

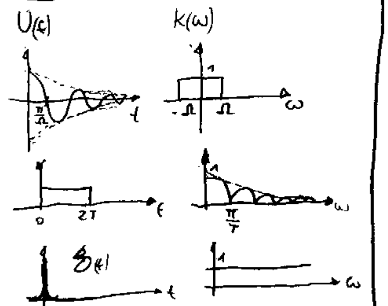
−G-V: PELTÉTEL: ASSZIMPT. ST. $\left(\int_0^\infty |w(t)|\,dt < K\right)$
KORLÁTOS GERJESZTÉSRE KORL. VÁLASZ

−ASSZIMPTOTIKUS: $y(t) \to 0$ ha $t \to \infty$
ha $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$

- ENERGIASPEKTRUM (JEL)

$$E(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

NÉHÁNY SPEKTRUM

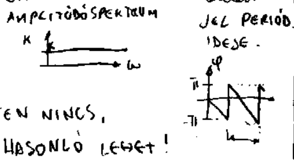


ALAKHŰ JELÁTVITEL

akkor, ha $W = K\cdot e^{-j\omega T}$

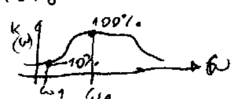
LINEÁRIS AMPLITÚDÓSPEKTRUM

ahol JEL PERIÓD. IDEJE.

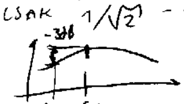


ILYEN NINCS, DE HASONLÓ LEHET!

CÉL: AHOL A BEMENET CSAK 10%-A A MAXIMUMNAK!



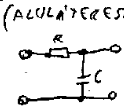
ott $K(\omega)$ (ÁTVITELI KAR.) CSAK $1/\sqrt{2}$ - legyen (7,07%)



TEHÁT A W-SÁVSZÉLESSÉGE <1% SÁVSZÉL. LEGYEN!

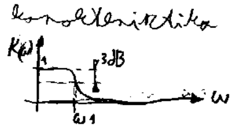
SZŰRŐTERVEZÉS

(ALULÁTERESZTŐ)



$$W(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

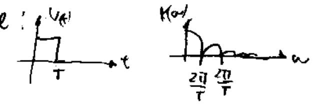
a kvázi konstans karakterisztika (MINDIG):



$\omega_1=\frac{1}{RC}$

ÚGY TERVEZÜNK ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐT, HOGY VAN 1 JELÜNK, MEG ZAJUNK, ÉS CSAK A JELET AKARJUK ÁTVINNI. A JEL SPEKTRUMÁT KERESSÜK. MEGADJUK AZ ALAPJÁN HOGY MEKKORA A LEGNAGYOBB MÉG SZÁMÍTÓ FREKVENCIAÖSSZETEVŐJE: ω_{1J}

pl.:



MONDJUK $\omega_{1J}=\frac{2\pi}{T}$

EZUTÁN A PARAMÉTEREK R, C

$\omega_{1J}<\omega_{1W}=\frac{1}{RC}$

EBBŐL R, C PÁR KIVÁLASZTHATÓ.

ÁTVITELI FÜGGVÉNY

ÁTÍRHATÓ ILYEN ALAKRA:

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=K\,\frac{(p-z_1)(p-z_2)\cdots}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\cdots}$$

ahol z_i zérusok, p_i pólusok (zérus-, pólushelyek)

$-\frac{1}{p_i}=\tau_i=-\frac{1}{\lambda_i} \Rightarrow \lambda_i=p_i$ (?)

a pólusok ha KOMPLEXEK, akkor (MINT A λ-K IS) KOMPLEX KONJUGÁLT PÁROK (tükrös a VALÓS TENGELYRE)

GERJESZTÉS-VÁLASZ STABILIS, HA

$\mathrm{Re}\{p_i\}=\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$

így lesz az UGRÁSVÁLASZ.

DISZKRÉT®

- MINTAVÉTELEZETT JELEK

K PERIODICITÁS: periodikus jellel 1 PERIÓDUSBAN K MINTA (A JEL K-MINTÁNKÉNT PERIÓDIKUS)

T - MINTAVÉTELEZÉSI IDŐ $\quad T=\frac{1}{f_K}$

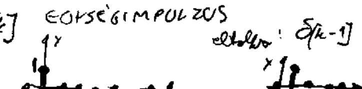
T_{PER} - jel periódusideje $\quad T_{PER}=K\cdot T$

ϑ - DISZKRÉT IDEJŰ KÖRFREKVENCIA

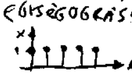
$\vartheta=\frac{2\pi}{K}$

- SPEC JELEK:

$\delta[k]$ EGYSÉGIMPULZUS — eltolva: $\delta[k-1]$



EGYSÉGUGRÁS: $\varepsilon[k]$



- DI rendszerek

$x[k] \rightarrow \boxed{W} \rightarrow y[k]$

• LINEARITÁS:
2 lemenő jel összegére adott válasz = a 2 lemenő jelekre adott válaszok összegével

• INVARIANCIA:
ha a lemenetet időben eltoljuk, akkor a kimenet is eltolódik

$$W\{D[k-n]\} = y[k-n]$$

• KAUZALITÁS

$$W\{D[k_1]\} = y[k_2] \quad k_1 \leq k_2$$

a lemenet nem hat a korábbi kimenetre.

– DI rendszer realizációja a DI hálózat.

– HÁLÓZAT ELEMEI:

FORRÁS — NYELŐ

ERŐSÍTŐ: K; $U[k]$ → $K\,U[k]$

KÉSLELTETŐ: $U[k]$ → D → $U[k-1]$

ÖSSZEKAPCS. KÉNYSZEREK:

ÖSSZEGZŐ CSOMÓPONT (Σ)

ELÁGAZÁSI CSOMÓPONT

VÁLASZ ELŐÁLLÍTÁSA

1.) ÁLLAPOTEGYENLET, MAJD UGRÁSVÁLASZ. (MAJD EBBŐL TETSZŐLEGES GERJESZTÉSRE VÁLASZ $y[k] = D[k] * W[k]$ ahol $W[k]$ – IMPULZUSVÁLASZ)

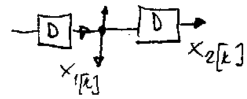
LÉPÉSEI:

– ÁLLAPOTVÁLTOZÓKAT VÁLASZTUNK $x_1[k]$, $x_2[k]$ … AMIK A KÉSLELTETŐK KIMENETEI

– EGYENLETEKET ÍRUNK FEL:
• AZ ÖSSZEGZŐK KIMENETEIRE
pl: $x_2[k]$, $x_3[k]$ → $x_1[k+1]$ → D → $x_1[k]$

$$x_1[k+1] = x_2[k] + x_3[k]$$

• HA NEM ELÉG EGYENLET GYŰLT ÖSSZE AKKOR MÉG ELÁGAZÁSI CSOMÓPONTOKRA IS LEHET:



$$x_1[k] = x_2[k+1]$$

— AZ EGYENLETEKET NORMÁLIS ALAKRA HOZZUK DIFF-EGYENLET(RENDSZER)

• 1 EGYENLETBEN CSAK 1 $x_n[k+1]$ lehet, ezen kívül lehet $x_i[k]$, $D[k]$

• Ha mégis van másik, akkor azt ki kell fejezni $x_i[k]$, $D[k]$-kból.

• AZ EGYENLETEK ALAKJA:

$$\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}\,D[k]$$

• KIFEJEZZÜK $y[k]$-t a fentiekből

• MEGOLDJUK AZ ÁLLAPOTEGYENLETET

2 MÓDON LEHET:

a) FOKOZATOS BEHELYETTESÍTÉS: (AZ IMPULZUSVÁLASZT KAPJUK)
$D[k] = \delta[k] = \{1, 0, 0, 0, 0 \dots\}$
ezt behelyettesítjük, az egyenletrendszerbe $x[k]$-kat kapjuk. ezek alapján $y[k]$-kat is meghatározzuk. (Mivel ez DIR, az eredmény MINTÁK SOROZATA) k = VALAMEDDIG.

b) EGZAKT MEGOLDÁS (ANALITIKUS ALAK, EGYENLET)

$$\boxed{y[k] = M_1\lambda_1^k + M_2\lambda_2^k + M_3\lambda_3^k}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az $\underline{A}$-ból meghatározható.
M_1, M_2, M_3 egy egyenletrendszerből meghatározható. Annyi egyenlet kell, mint ahány M.
A LÉPÉSRŐL-LÉPÉSRE-MEGOLDÁS eredményeit felhasználva
pl: $y[2] = M_1\lambda_1^2 + M_2\lambda_2^2 + M_3\lambda_3^2$
$y[3] = M_1\lambda_1^3 + M_2\lambda_2^3 + M_3\lambda_3^3$
$y[4] = M_1\lambda_1^4 + M_2\lambda_2^4 + M_3\lambda_3^4$

(Ha valamelyik $\lambda = 0$ akkor 1-gyel kevesebb egyenlet kell, M_i = TETSZŐLEGES)

$\underline{\underline{\lambda}}\ \underline{M} = \underline{y}$ alakú egyenletrendszer

az eredmények komplexek. Ha van (lehet kiemelni) benne ilyen tag:
$e^{j(ak+b)} + e^{-j(ak+b)}$
akkor az $= 2\cdot\cos(ak+b)$

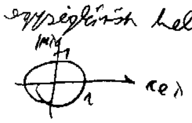
c) TETSZŐLEGES GERJESZTÉSRE A VÁLASZ:
$y[k] = D[k] * W[k]$

d) ZÁRT ALAKÚ MEGOLDÁS MÁSHOGY:
$\underline{x}[k] = \underline{x}_f[k] + \underline{x}_g[k]$
$\underline{x}_f[k] = \underline{\underline{M}}\,\underline{\lambda}^k$

$\lambda \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$

?

STABILITÁS:
ASSZIMPTOTIKUS: $|\lambda_i| < 1$
egységkörön belül legyen:



Ha λ komplex konjugált-pár: akkor az IMPULZUSVÁLASZ oszcillál.
Ha $\lambda_i = 1$ akkor határeset: $W[k]$ $\varepsilon[k]$ 1

2.) RENDSZEREGYENLETTEL
A RENDSZEREGYENLET:

$$y[k] = \sum_i^n a_i\,y[k-i] + \sum_j^m b_j\,D[k-j]$$

- A RENDSZEREGYENLET FELÍRÁSA az átviteli KARAKTERISZTIKÁBÓL VAGY ÁTVITELI FÜGGVÉNYBŐL

$W = \frac{P(z)}{Q(z)}$ alakban van $\left(\text{pl: } W = \frac{z^{-1}\cdot a + z^{-2} b}{z^{-1} c + z^{-2} d} \right)$

$Y = W \cdot D$ (NEGATÍV HATVÁNYOK)

tehát:

$Y Q = D \cdot P$

itt át kell írni:

pl: $a z^{-b} = a\, y[k-b]$

EBBŐL KI KELL FEJEZNI $y[k]$-T és kész.

(VAGY: pl $a e^{-bj\vartheta} \Rightarrow a\, y[k-b]$)

- R.E. MEGOLDÁSA (IMPULZUSVÁLASZ)

a) FOKOZATOS BEHELYETTESÍTÉS

$D[k] = \delta[k]$ ismert

$y[k] = 0$ ha $k < 0$

ezeket behelyettesíteni $y[0]$-ra, majd $y[1] \dots y[n]$

b) ZÁRT ALAKÚ MEGOLDÁS: (ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS)

$y[k] = y_f[k] + y_g[k]$

$y_f[k] = \lambda^k \underline{M}$

λ = $\underline{A}$ MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKEI

tehát az ÁLLAPOTEGYENLETIS kell hozzá!

M: $[S_1\ S_2] = \underline{M}$

S_1, S_2:

$\underline{A}\, \underline{S}_i = \lambda_i \underline{S}_i$

egyenletrendszerben S_i-re. Minden S_i-re 1-1 egyenletrendszer

(MEGOLDÁS: egyik tag = 1 a másik adódik)

y_g: $\underline{A}\, \underline{y_g} = -\underline{B}$

- így $y[k] = w[k]$-t kapjuk

$y[k] = w[k] * D[k]$ más gerjesztésre.

- ha λ_i-k között vannak komplex konjugáltak, akkor oszcillál

- FIR-típusú HÁLÓZAT: VÉGES IMPULZUSVÁLASZ

$y[k] = w[k] = \sum_i a_i D[k-i]$

tehát: $= \sum b\, \delta[k-i]$

3.) ÁTVITELI KARAKTERISZTIKÁVAL

a) a gerjesztés periodikus:

- a gerjesztést FOURIER sorba fejtjük n-TAG (ϑ_0, $2\vartheta_0$, $3\vartheta_0$ - HARMÓNIKUSOK)
- az átviteli KARAKTERISZTIKÁBÓL ÁTVITELI TÉNYEZŐKET SZÁMÍTUNK $\vartheta_0, 2\vartheta_0 \dots n\cdot\vartheta_0$-ÁN
- VÁLASZ

$i\vartheta_0$: $Y(i\vartheta_0) = D(i\vartheta_0) \cdot W(i\vartheta_0)$

az 3 KOMPLEX SZÁM (Y, D, W)

ezeket ilyen alakban:

$$y[k] = \sum_i^n |Y(i\vartheta_0)| \cdot e^{j\left(ki\vartheta_0 + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Y(i\vartheta_0)}{\operatorname{Re} Y(i\vartheta_0)}\right)}$$

VAGY INKÁBB

$$y[k] = \sum_i^n |Y(i\vartheta_0)| \cos\left(ki\vartheta_0 + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Y(i\vartheta_0)}{\operatorname{Re} Y(i\vartheta_0)}\right)$$

b) NEM PERIODIKUS:

$Y(e^{j\vartheta}) = W(e^{j\vartheta}) \cdot D(e^{j\vartheta})$

$D[k]$-t Fourier-TRANSZFORMÁLJUK,

MAJD az eredményeket a spektrumot kapjuk. az (folytonos) ábrázolható $K(\vartheta)$, $\varphi(\vartheta)$ ként BODE DIAGRAMON.

$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\vartheta})\}$

- A PERIODIKUS JEL SPEKTRUMA IS PERIODIKUS $2\vartheta_0$-ONKÉNT
- AZ ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA FELÍRÁSA A HÁLÓZATBÓL:

a késleltetők az ÁRAMKÖRBEN:

$\overline{X}_1$ — $\boxed{D}$ — $e^{-j\vartheta} \cdot \overline{X} = X_2$

VAGY (AZ ELEMEKEN LÉVŐ JEL: VAGY $x[k]$ VAGY $\overline{X}$ - KOMPLEX SZÁM)

- a segédváltozók a késleltetők kimenetei: $\overline{X}_i$ ezekre egyenleteket felírni. KIFEJEZNI $\overline{X}_i$-et, $\overline{Y}$ egyenletébe behelyettesít.
- Ez már olyan egyenlet, amiben csak $\overline{Y}$, és $\overline{D}$ VAN. ezt $\frac{\overline{Y}}{\overline{D}}$ alakra kell HOZNI.

$\frac{\overline{Y}}{\overline{D}} = W$ (ami $e^{-j\vartheta_i}$ FÜGGVÉNYE)

- Ha (1-nél) TÖBB SEGÉDVÁLTOZÓ VAN: az egyik egyenletéből az egyiket kifejezni. behelyettesíteni a másik egyenletbe, ebből a másikat kifejezni. visszahelyettesíteni az elsőbe, ÍGY MEG VAN A 2 SEGÉDVÁLTOZÓ $\overline{Y}$, $\overline{D}$-vel kifejezve. Ezeket behelyettesíteni az $\overline{Y}$ egyenletébe
- EBBŐL Y-T kifejezni, a MÁSIK OLDALON D-et kiemelni, $\frac{Y}{D}$-s alakban az $= W$

$$\left(\begin{array}{l} y = a\cdot y + b y + c\cdot D + d\cdot D \\ y = \frac{(c+d) D}{1-a-b} = \frac{c+d}{1-a-b} \cdot D \\ \Leftrightarrow \frac{y}{D} = \frac{c+d}{1-a-b} = W \end{array} \right)$$

2. ÁTVITELI FÜGGVÉNNYEL:

(KOMPLEX FREKVENCIA TARTOMÁNY)

$Y(z) = Z\{y[k]\} = W(z) \cdot D(z)$

- tehát először képezni kell $D(z) = Z\{D[k]\}$ -t. (Z-TRAFÓ)
- fel kell írni az

– ÁTVITELI FÜGGVÉNYT
- Ezt lehet úgy, hogy $W(e^{j\vartheta})$ -t átírjuk $W(z)$-re, mégpedig úgy:
Ha ilyen tag volt: $e^{-j\vartheta n \cdot k} \Rightarrow z^{-n}$ ⇒ 1 LÉP LESZ
- Felírhatjuk a operátorral hasonlóan úgy, mint a ÁTVITELI karakterisztikát, csak itt nem

$x_1 - \boxed{D} - x_2 = e^{j\vartheta} x_1$

HANEM:

$x_1 - \boxed{D} - x_2 = z^{-1} x_1$

– ~~KELL~~.

– a VÁLASZBAN ($y_{[k]}$) ha van ilyen:
$+ \dots e^{ja} + e^{-ja} + \dots$
akkor a a két = $2\cos a$

– Z, és LAPLACE trafó csak belépő jelekre működik. Ezért a nem belépő jelre $\delta[k] = \varepsilon[k]\,\delta[k]$

– a bemenő jel z trafó előtt: HA $\cos \vartheta$ VAN: legyen $\frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}$

– $y_{[k]} = z^{-1}\{Y(z)\}$

– STABILITÁS
ASSZIMPTOTIKUS: $|\lambda_i| < 1$ (egységkörön belül)

G-V: q_i - PÓLUSOKRA
$|q_i| \leq 1$
(EGYSÉGKÖRÖN BELÜL)

NINCSENEK PÓLUSOK! FIR -TÍPUSÚ! VÉGES IMP. V.

– MINDENÁTERESZTŐ HÁLÓZAT!

$W = K$ $K(\vartheta)$

$$W = \prod_i^n \frac{z - \frac{1}{q_i^*}}{z - q_i}$$

ZÉRUS: A ZÉRUS A PÓLUSNAK A TÜKÖRKÉPE AZ 1SÉGKÖRRE
PÓLUS

MINIMÁL FÁZISÚ HÁLÓZAT!

$q_i, z_i < 1$

HÁLÓZAT SZÉTBONTÁSA A ZRE!
- Minden zérushoz 1 ÚJ (FIKTÍV) PÓLUST KELL, AMI A TÜKÖRKÉPE AZ 1SÉGKÖRRE. UGYANODA ZÉRUSOK IS kellenek
MÁH: a különbözik
MFH: a maradék
$\underbrace{}$ szorzatából összegyúrjuk W-t.

- hálózatok ~~ábrázolása~~ jellemzése
$W[k]$ - IMPULZUS VÁLASZ (IDŐTARTOMÁNY)
$y[k] = w[k] * \delta[k]$
$W(e^{j\vartheta})$ - ÁTVITELI KAR. (FREKITARTOMÁNY)
$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{W(e^{j\vartheta}) \cdot \mathcal{F}(e^{j\vartheta})\}$
$W(z)$ - ÁTVITELI FÜGGVÉNY (KOMPLEX F. TARTOMÁNY)
$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{W(z) \cdot \delta(z)\}$
($v[k]$ - UGRÁS VÁLASZ (IDŐTARTOMÁNY)
$w[k] = \dot{v}_k$
$\to y[k]$)

FI rendszerek DI szimula[ciója]

- IDŐTARTOMÁNYBAN!
$\delta[k]$ -t mintavételezzük
AZ ÁLLAPOTEGYENLET - RENDSZERT ÁTÍRJUK DI - RE.
$y[k]$ - t SZÁMÍTJUK
– FREKI TARTOMÁNYBAN

DI jelek

$x_{[k]}$ – k-adik ütemhelyi minta

T mintavételezési idő. k. ütem

~~[illegible]~~ K periodicitás

(periodikus jelek mintavételezésénél $\frac{T_{jel}}{T} = K$)

$\frac{2\pi}{K} = \vartheta$ DI körfrekvenciája a jelnek. nem t-hez, hanem k-hoz

$\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

Speciális jelek

$\varepsilon[k]$ egységimpulzus ($\varepsilon[k-i]$ tol.)

$\delta[k]$ egységugrás (FÉSŰ F.)

$\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{k-i}$

Belépő jelek: egyszerűen $\varepsilon[k]$ $x[k]$

DI rendszer

$y_{[k]} = W\{x[k]\}$

Műveletek a hamerd jelen. 1 egyenletben (IMPLICIT FÜGGV.)

DI hálózat magyarázza a realizációt (modell) az elemekkel

erősítő

késleltető

összegző csomópont

y_k

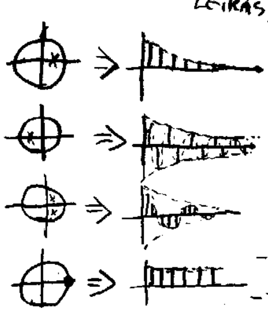
$y_{A[k]}$ $y_{B[k]}$ elágazás

hálózat előállítása ooo (MISMOL)

STABILITÁS:

• ASSZIMPTÓTIKUS

ha $|\lambda_i| < 1$ körön belül van (ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS)



– 1 szer: állandósult
– határon: $x_k \to \infty$

Szinuszos gerjesztés

$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$

$x_{[k T]} = X\cos(\omega k T + \varphi)$

mert $T_0 = kT$

és $\omega T = \vartheta$

ezért $x_{[k]} = X\cos(k\vartheta + \varphi)$

itt t helyett k, ω helyett ϑ

$x_{[k]} = Re\{\hat{X} e^{jk\vartheta}\}$ $\hat{X} = X e^{j\varphi}$

DIR gerjesztett válasza

$\bar{Y}_{(e^{j\vartheta})} = \bar{W}_{(e^{j\vartheta})} \bar{S}_{(e^{j\vartheta})}$ $\bar{Y}_{e^{j\vartheta}} = W S_{e^{j\vartheta}}$

$W_{(e^{j\vartheta})}$ – átviteli karakterisztika

W – átviteli tényező 1F-ben.

JELEK: (SPEKTRUM)

$X_{(e^{j\vartheta})} = |X_{(e^{j\vartheta})}| \cdot e^{j\,\mathrm{arc}\,X_{(e^{j\vartheta})}}$

a spektrum folytonos függv. és 2π-re periodikus

DI FOURIER TRAFÓ:

$x_{[k]} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{(e^{j\vartheta})}$

$X_{(e^{j\vartheta})} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{[i]} e^{-ji\vartheta}$

tételek

1. LINEARITÁS

2. eltolás

$x_{[k-i]} \to e^{-ji\vartheta} X_{(e^{j\vartheta})}$

3. MODULÁCIÓS T.

$x_{[k]} e^{j\vartheta_0 k} \to X_{(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)k})}$

4. KONVOLÚCIÓ

$x_{1[k]} * x_{2[k]} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{1(e^{j\vartheta})} \cdot X_{2(e^{j\vartheta})}$

5. energiaspektrum

$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X_{(e^{j\vartheta})}|^2 d\vartheta$

(PERSEVAL-TÉTELE)

DI Z-TRAFÓ

$X_{(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{[k]} z^{-k}$

tételek:

1. LINEARITÁS

2. ELTOLÁS:

$\varepsilon[k-i]\, x_{[k-i]} \to z^{-i} X_{(z)}$

3. NEM BELÉPŐ JEL:

$x_{[k-i]} \to z\{x_{[k]}\} + \sum_{i=-2}^{-1} x_i z^i$

STABILITÁS

stabil, ha a $(W_{(z)})$ PÓLUSOK AZ EGYSÉGKÖRÖN belül vannak ($|p_i| < 1$)

• ASSZIMPTÓTIKUS:

$|\lambda_i| \leq 1$ ($\forall i$)

• G-V:

$\sum |w_{[k]}| < K$ (véges IMP. válasz)

vagy $|p_i| \leq 1$

• HA NINCSENEK PÓLUSOK: ($p_i = 0$)

FIR-TÍPUSÚ (véges imp. válasz)

SPECIÁLIS RENDSZEREK:

– FIR TÍP. HÁLÓZAT

N ütem után az imp. válasza $= 0$. (véges imp. válasz)

itt $W_{(z)} = c_0 + \sum_{i=1}^{N-1} c_i z^{-i}$

1 PÓLUS van: $z = 0$ helyen van.

A zérusok! Gerjesztés hatására az egységsugarú körre, de a valós tengelyre.

Ha IMP válasz: POLINOM: nincs PÓLUSA (z – hatványaival)

– MINDENÁTERESZTŐ RENDSZER

STABILIS, KAUZÁLIS ...

AMPLITÚDÓKARAKTERISZTIKÁJA ÁLLANDÓ. $z_i = \frac{1}{p_i^*}$ $|p_i| < 1$

A fázismenet monoton csökkenő, de lehetnek benne ugrások

– Minimálfázisú rendszer:

stabilis, kauzális ...

Minden zérus az egységkörön belül van. $|p_i|, |z_i| < 1$

Nincs PÓLUSA az origóban

Felbontás MINDENÁT + MINIMÁLF. rendszerekre:

A PÓLUSOKAT, és a zérusokat szétválogatjuk az átvitelben.

Az egységkör ≅ IM. TENGELY A folytonos idejű rendszereknél

Jelen nem a tengelyre tükrözünk, hanem az egységkörre.

Ha egy PÓLUST kiemelünk, akkor azt a reciprokkal kompenzálni kell egyszerre 1 zérussal

A felbontás:

– a körön kívüli zérusokhoz egy PÓLUSOKAT. Ezek: MINDENÁTERESZTŐ

– a kompenzáló zérusok + a maradék: MINIMÁLFÁZISÚ

JELLEMZŐ FÜGGVÉNYEK

– EXP: IMPULZUS VÁLASZ, UGRÁSVÁLASZ, átviteli függv. / karakterisztika

– IMP:

• állapotegyenlet

• rendszeregyenlet

FOLYTONOS IDEJŰ RENDSZEREK DI SZIMULÁCIÓJA

JELEK:

Mintavételezés T-nként
(kT helyeken minta)
Mintavételezett analóg jel:

a) IDŐTARTOMÁNYBAN
T_0 mintavételezési idő

$$X^*_{a(t)} = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} X_{a(k\cdot T)} \cdot \delta_{(t-kT)}$$

T_0 elhagyható.

$$X_{d[k]} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_{d[p]}\, \delta[k-p]$$

b) FREKVENCIATARTOMÁNYBAN:

$$X^*_{(j\omega)} = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{[k]}\, e^{-jk\omega T}$$

$$T_0\, X_{d(e^{j\vartheta})} = X^*_a(j\omega)$$

Mintavételi tétel:
A jel csak (sávkorlátozott) akkor rekonstruálható, ha $f_{MAX(JEL)} < 2 \cdot f_{MINTAVÉTEL}$

$X^*_{(j\omega)}$ periodikus: $f = f_{MINTAVÉTELI}$ van ahol T_0 elhagyható.
(Mivel konstanssal szorzás)

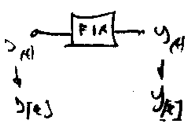
c) komplex frekvencia tart.

$$X^*_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} X^*_{(s)} = T_0 \sum_{k=0} X_{[k]}\, e^{-sk}$$

$z = e^{st}$ helyettesíthető,
így:

$$X_{d(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{[k]}\, z^{-k}$$

FI rendszerek DI szimulációja



a) IMPULZUSVÁLASZ SZIMULÁCIÓJA:

$w_{(t)} = A\,\delta_{(t)} + \varepsilon_t f_t$

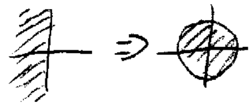
$w_{[k]} = A\,\delta[k] + T\,\varepsilon[k-1] f(kT)$

$w_{(t)}$ adott

$\vartheta = T_{MINTAV} \cdot \omega_{JEL}$

b) ÁTVITELI FÜGGVÉNY SZIMULÁCIÓJA:

STABILITÁS MEGŐRZÉSE:



$z = e^{sT}$ helyettesítéssel.

$W_{d(z)} = W_{a(s)}$ ha $s = \frac{p}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

ahol $p = \frac{\omega T_0}{\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}$

$p < 0 \le 2$ de általában $p = 2$ jó.

ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS SZIMULÁCIÓJA

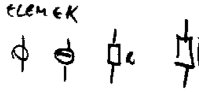
ÁLLAPOT E. → DIR (állapot egyenlet)
Jelölések a áll. e.-ét.
Egyenletek $\underline{X}_{a(t)} \Rightarrow \underline{X}_{D[k]}$
és $\underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}$ lesz.

KIRCHOFF TÍP. HÁLÓZATOK SZIMULÁCIÓJA

- állapotegyenlet
- majd azt lehet tenni DI állapotegyenletre
- ezt megoldani, vagy annak $W_{(z)}$, $W_{(e^{j\vartheta})}$

NEMLINEÁRIS:

ELEMEK



N.LIN. R u_N, i_N

NLIN R:

karakterisztika jellemzi
$i_N = f(u_N)$
Megadás: explicit, implicit, görbe.
- A szuperpozíció nem igaz itt.

PASSZÍV, ha $u_N i_N > 0$
NON ENERGETIKUS ha. $u_N i_N = 0$

Kar. Megadása:
- görbével
- táblázatosan
- elemi függvényekkel (helyettesítő)
- szakaszonkénti lineáris közelítés (linearizálás)

LINEARIZÁLÁS:
Minden szakaszon 1-1 egyenes.
$P_1\ P_2 \dots$ töréspontok
ezekre egyenesek

$i_{N_{P_1}} = G U_N + I_0$
$P_1 \ge 1$

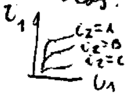
A töréspontok közötti pontokban megnézzük az összetartozó $U_N\ I_N$ értékeket.
Ez alapján az egyenesek felírása.

4 PÓLUSOK

R karakterisztika
LIN: $U_1 = F(i_1, i_2)$
NL: $U_2 = f(i_1, i_2)$

$\underline{\eta} = F(\underline{\mu})$

ábrázolás: görbesereg.



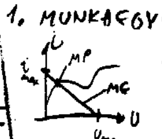
linearizálás:
- szakaszonként
- 2D ... illesztése 3p-ra
  ... 4-1

} SIMPLEX TECH.

síkrészekben vagy térrészekben egyenes állítása

NL HÁLÓZAT SZÁMÍTÁSA:

1. MUNKAEGYENES ha 1 db NL R van.



- i_{MAX}: ha a NL ellenállás ⇒ RÖVIDZÁR így megkapom a keresztezés alapján
- U_{MAX}: A NL ellenállás ⇒ SZAKADÁS akkor U_N ? hogyan alapján.

A hálózat többi részét a Norton, vagy Thevenin helyettesítő képével.
Van olyan, hogy nincs munkapont.
Ha több van: az egyik a stabil.

Hálózati egyenletek kanonikus alakja (minimális)

Ha csak lineáris NL komponens:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{U} = \underline{b}$

Ha minden elkotárt NL-eket tekintünk:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{U} + \underline{\underline{B}}\,\underline{I} + \underline{c}\,\underline{b} = \underline{0}$

U, I kanonikus változók: NL elemek U, I-jai.

Hálózati egyenletek:

- csomóponti egyenletek
- rajzból: melyik φ mivel egyenlő.
  Ha nem minden φ ismeretlen:
  Kirchoff törvények alapján felírni 1-2 ellenállás áramát (vagy feszültségét)
- behelyettesíteni az egyenletrendszerbe:
  φ-ket, ~~az~~ áramokat a $\frac{I_n - I_m}{R_p}$ - helyére
- egyszerűsítés
  (ha több a φ mint NL elem: lesz ismeretlen φ)
- a karakterisztikák alapján FÜGGŐ VÁLTOZÓ = f(FÜGGETLEN) átcsoportosítani.

$\underline{\underline{D}}$ FÜGGETLEN + $\underline{\underline{E}}$ FÜGGŐ + $\underline{C}\,\underline{b}$ = 0

Ez a kanonikus alak.

3. MEGOLDÁS

a) MUNKAEGYENES, MUNKAPONT (1DB LN)
ME = konst. → U, i (MP)

b) TART. LINEARIZÁLÁS U_N, i_N?

- ELSŐ TARTOMÁNYRA felírjuk:
  FÜGGŐV = $\underline{\underline{A}}$ FÜGGETLEN + $\underline{b}$
- be a KANONIKUS egyenletrendszerbe függő helyére
- Megoldani: független v.-ra
- ha az eredmény benne van a kérdéses tartományban akkor jó MEGOLDÁS.
- Ha nem: AKKOR NEM → TOVÁBB menni a következő tartományra
- Ha jó: ott U-hoz I tartozik ez a munkapont: (U_N, i_N)

(behelyettesített egyenletrendszer megoldása:
1 ismeretlen vektor, és 1 ismert, +1 szám maradt lesz az átalakítás után

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x}$?

c) ITERÁCIÓVAL
(NEWTON-RAPSON)
(NAGYON EGYSZERŰ HÁLÓZATOKNÁL)
- 1 VÁLTOZÓS:
1 db NL elem $f_{(0)} = 0$

Meghatározni a karakterisztika 0 helyét (U tengely metszék)
- becsléssel 1 PONT.
  (hol lehet a 2 hely?)
- a pontban a (TAYLOR polinommal [1. FOKÚ]) az érintőt.
- az érintő hol metszi a tengelyt?
  ott (a T polinom, és) újabb érintő...
- ezt ismételni, amíg elég pontos nem lesz a közelítés

Ha a pontban az érintő nem metszi a tengelyt: új kiindulási érték kell.
Lehet több megoldás is, de ezt nem tudjuk meg. SÉMA: $\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$

- TÖBB VÁLTOZÓS:

$\underline{f}_{(\underline{U},\underline{i})} = \underline{0} \qquad \underline{N} = \begin{bmatrix} U_N \\ i_N \end{bmatrix}$

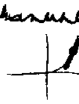
- ugyanúgy becslés ($\underline{N}_0$)

SÉMA:

$$\boxed{\underline{N}_{i+1} = \underline{N}_i - \left(\underline{\underline{F}}'_{(\underline{N}_i)}\right)^{-1} \cdot \underline{f}_{(\underline{N}_i)}}$$

KARAKTERISZTIKA MEGADÁS:
- KÖZELÍTÉSSEL helyettesítés
- ezzel oldjuk meg a kanonikus egyenletrendszert

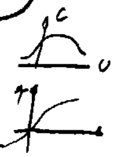
d) MUNKAPONTI LINEARIZÁLÁS
(kis jelek esetén jó)
Ha több különböző fazisértéket (változik) akarunk behelyettesíteni



Kell: érintő és munkapont

NEM LIN. DIN.

$I \frac{+}{-} \downarrow^{q}_{U}$ $\left(I \} \downarrow^{\psi}_{I} \right)$



a) MUNKAPONTI LIN.
(egyenfeszültséget vesszük) (+ kis jelek)
- itt a kondenzátorok szakadásként, a tekercsek rövidzárként működnek
  Meghatározható a MUNKAPONTI U_C, I_L.
- Ezek, és a kapacitásfüggvényt (és L függvényt) alapján a munkapontban a C, L értékeket.
  (Ezzel meg a változások áramát szintetizálja, mint gerjesztéssel az egyéb (kompl.) feszültséget meghatározhatók)
- Munkapont stabilis, ha ott a hálózat stabilis $\{\lambda_i\} < 0$

b) TARTOMÁNYON KÉNTI LIN. (IDŐFÜGGV.)
ugyanaz, csak a karakterisztikákat helyettesítjük.

ÁLLAPOTEGYENLETET kell felírni (DINAMIKUS) konst. lin. hál. Ezt Laplace transzformáljuk

ÁLLAPOTEGYENLET:

$\underline{\dot{x}} = \underline{f}_{(\underline{x}, t, x_n, p)} \quad x = \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \\ \psi_L \\ q_C \end{bmatrix} \quad x_n = \begin{bmatrix} U_N \\ i_N \end{bmatrix}$

Másképpen:

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U_C, i_L} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\psi_L, q_C} + \underline{\underline{C}}\,\underline{U_N} + \underline{\underline{D}}\,\underline{i_N} + \underline{\underline{E}}\,\underline{b}$

Ebből kiválogatjuk x függő, és független változóit. + Bejön az egyenletrendszerbe U_N, i_N
Jelölés: (lehet nagyon: φ, $\mathfrak{I}_n$)
- Csomóponti egyenletek annyi db, ahány ismeretlen változó van: (U_C, i_L, U_N, i_N)
- ott: ahol kondi van:
  i_C kell: $(i_C = C\dot{U}_C)$ és $U_L = L\dot{i}_L$
- Ezeket rendezni: egyik oldalon $\underline{\dot{x}}$ másikon az összes többi. de itt $i_C = f_{(U)}$ [NL]

MEGOLDÁSA:

- ELŐRELÉPŐ EULER algoritmus
  (explicit, feltételesen stabil)
  Δt-nként időpillanatokban határozzuk meg $x_{(t)}$ függvényt.
  • először kezdetiértéket kell, $(U_C = 0, i_L = 0)$ majd lassabb $t_1, t_2 \ldots t_n$ így
  Δt elég kicsi legyen: $\tau/10$

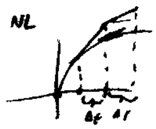
SÉMA: ← ELŐZŐ EREDMÉNY, KÖVETKEZŐ

$X_{(t_{n+1})} = X_{(t_n)} + X'_{(t_{n+1})} \cdot \Delta t$

behelyett. → U_N, U_C in i_L [illegible]

az állapotegyenletet, és ahelyre az értékeket. Ismeretlen. (előző)

- állapotegyenlet felírása
- helyettesíteni NL függvényeket.



— Hátraléptő EULER (explicit, feltétlen stabil)

Nemlineáris egyenlet megoldása

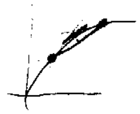
$X_{(t_{n+1})} = X_{(t_n)} + \Delta t \cdot X'_{(t_{n+1})}$

itt nem az előző pontbeli értékkel számolunk.

első pontot előrelépővel, majd NEWTON-RAPSONNAL

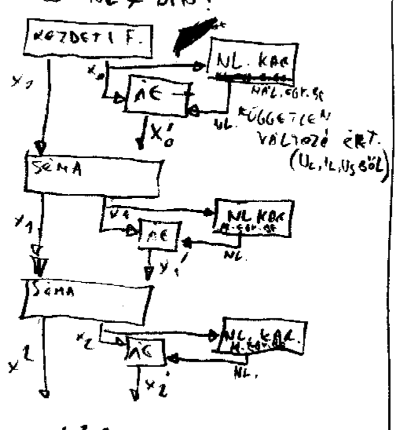
folytatni.

— CRANK-NICOLSON-algoritmus: előrelépő + hátralépő EULER egyesítve. (stabilis)



ELŐRE EULER

VAN NL elem, és DIN elem, de NL ≠ DIN!

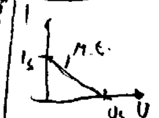


Ha C, L NL, akkor nem ÁLLAPOTVÁLTOZÓK, hanem KANONIKUS VÁLTOZÓK: U_C, i_C, i_L, U_L

$I_C = \dot{q} \neq C \dot{U}_C$

$U_L = \dot{\psi} \neq L \dot{i}$

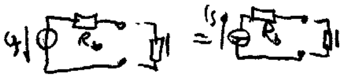
MUNKAEGYENES:



U_S, I_S?

$ME = \frac{I_S}{U_S} \cdot U + I_S = I$

A lineáris többi részét át kell alakítani: NORTON/T.



innen az U_S, I_S.

MUNKAPONT:

- kon. egyenes egyenlő M.E. megoldás $U_1 I_1$.
- Munkapontban lévő [illegible] helyettesíthető [illegible], ahol $R = \frac{U_M}{I_M}$
- mivel a hálózatban sok alkotóelem van, a többi feszültség kiszámításához ez is kell.
- Ha U kifejezhető U-val a karakterisztikában: feszültségvezérelt. Ha U i-vel akkor áramvez.
- Ha csak áramvez. van: akkor a ME-t is át kell írni áramvez.-re. És így számolni a MP-ot

Ha nincs MP:
- azért mert a ME végtelen (U_S vagy $I_S = \infty$)

ZKAPU:

megoldás: ZGERJESZTÉS:

U_1, I_1 van. U_2 vagy I_2 függvényében, és U_2, I_2 van. U_1 vagy I_1 függ.

NL KONDI

$q_{(U)} = f_{(U)}$ adott, és $C = f_{(U)}$

U, q $\quad I = \dot{q} = C_{(U)} \cdot \dot{U} = f_{(U)} \cdot \dot{U} \neq C\dot{U}$

$q = Q_{(U)}$ $\quad C_{(U)} = \frac{dQ_{(U)}}{dU}$

NL TEKERCS

i, ψ $\quad \psi = f_{(i)}$ adott, $L = f_{(i)}$

$U = \dot{\psi} = L_{(i)} \cdot \dot{i} \neq L\dot{i}$ $\quad L_{(i)} = \psi'_i$

MUNKAPONTI LINEARIZÁLÁS:
- A egyenlet: $= U_0 + U_{(t)}$ ahol $U_t \ll U_0$
- MP: U_C, i_L meghatározás (itt C = szakadás, L = rövidzár)
- ebből $C, L \rightarrow X_C, X_L$ → SZINUSZOS HÁLÓZAT
- HA ZMI van: Mindkét külön ID ÁLLANDÓ [illegible] AHOL EZ [illegible] STAB.

ÁLLAPOTEGYENLET (HA NINCS NL R)

① NINCS NL R, $C = f_{(U)}$, $L = f_{(i)}$ ADOTT

Egyenletek φ-re, J-re,

annyi, ahány DIN, [illegible] elem van.

(φ-k a [illegible] miatt J-k az L-ek)

- A φ-s egyenletek:

i_C, i_L, $\frac{U-U}{R}$, ahol $U: U_S, U_C$

helyettesítjük i_C-t $:= f_{(U)} \cdot \dot{U}_C$

kifejezzük $\dot{U}_C$-t, $C_{(U)}$

- J-s:

U_C, U_L, Ri, ahol $i: i_L, I_S$

helyettesítjük U_L-t $:= g_{(i)} \cdot \dot{i}_L$

kifejezzük $\dot{i}_L$-t $L_{(i)}$

- NORMÁLIS alakra hozzuk

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,\underline{s}$ ahol $\underline{\underline{A}}$-ban számok, és függvények helyett (Cn)

② NINCS NL R, $U_C = f_{(q)}$, $i_L = g_{(\psi)}$ ADOTT

most q és ψ-ban.

- φ-egyenlet: i_C, i_L, $\frac{U-U}{R}$

itt i_C-t $\dot{q}$-val helyett.

- J egyenlet: U_L, U_C, Ri

itt U_L-t $\dot{\psi}$-val helyett.

Kifejezzük a dolgokat, NORMÁLIS formára hozzuk:

$\underline{\dot{y}} = \underline{\underline{M}}\,[redacted] + \underline{D}\,\underline{s}$

lesz [redacted] alak, hogy [redacted] $\dot{q}$ és $U_C = f_{(q)}$, $\dot{\psi}$ és $i_L = g_{(\psi)}$

Tehát [redacted] $M = [U_C, i_{L,R}]$

$M = [R,] \cdot \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix} + \underline{D}\,\underline{s}$

alakra alakítjuk helyettesítéssel $f_q = U_C$, és $g_\psi = i_L$ és $\dot{\psi} = U_L$ azért így, mivel $\dot{q} = i_C$, EBBŐL ÚJ DIFF. E. U_C-re

③ HA NINCS NL C, L, DE VAN NL R

- felírjuk az egyenleteket φ: i_{NL}, i_C, i_L, i_R, J: U_N, U_C, U_L, RI

- ekkor is normál alak:

$x = \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{x}_N + \underline{C}\,\underline{s}$

$x_N = \begin{bmatrix} U_N \\ i_N \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B}}$ - lesz lehet

x_N függvénye, de az az EULER számításkor mindegy. (nem kell kifejezni)

② - ESNÉL $\quad \dot{q} = C_{(U)} \cdot \dot{U} = \underline{A}\,\underline{U} + \underline{D}\,\underline{s}$ $\quad C_{(U)} = \frac{dQ}{dU}$, $\dot{q} = \frac{dQ_{(U)}}{dU}$

Ha EULERREL számoljuk U-ból az $\dot{U}$ meghatározzuk (kifejezzük) $\dot{U}$-t. Ez kell az EULER-be.

FELADATMEGOLDÁSOK

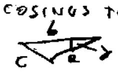
UEFF FOURIER SORBÓL

- Adottak a sor komplex együtthatói.

$$U_{EFF} = \sqrt{U_0^2 + \frac{|U_1|^2 + |U_2|^2 + \dots}{2}}$$

- Itt U_1^2, U_0^2 csak pozitív lehet (ABSZ. ÉRTÉKEK VÉGTELEN)

COSINUS TÉTEL



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

$a\,j = a\,e^{j90} \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

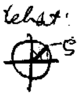
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$\sin x = \cos(x - 90)$

TELJESÍTM: ha U, I (P) fourier sorból vannak adva

- $P = \Sigma P_{(k\omega_0)}$ tehát harmonikusan számítjuk (azonos ω-jú I és U)
- Amiket néha kérdez: az kiesik
- Ahol $\sin(k\omega_0 t + \varrho)$ van, azt át számítjuk $\cos(k\omega_0 t + \varphi)$-re

tehát: $\sin\varrho = \cos\varphi \rightarrow \varphi = ?$



- alapján számoljuk. vagy $\varphi = \varrho - 90°$

- EGYENÁRAMÚ RÉSZ: $P = U \cdot I$
- DC komponensek:

$u_k = \hat{U}\cos(k\omega_0 t + \varrho) \quad i_k = \hat{I}\cos(k\omega_0 t + \varphi)$

$$P = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2} \cdot \cos(\varrho - \varphi)$$

$x_t\, e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{j(\omega - \omega_0)}$

és $x_t e^{\alpha t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{j(\omega - \frac{\alpha}{j})} = X_{(j\omega - \alpha)}$

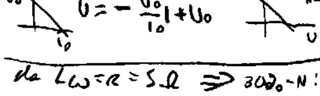
Ha

$$\underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{eltolás}} \cdot \sin(\omega_0 t)\varepsilon_t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_0}{[j(\omega + \alpha)]^2 + \omega_0^2}$$

UGRÁSVÁLASZ

$$v_t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W_s}{s}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{W_{j\omega}}{j\omega}\right\}$$

MUNKAEGYENES:



$$U = -\frac{U_0}{I_0} I + U_0 \qquad I = -\frac{I_0}{U_0} \cdot U + I_0$$

ha $L\omega = R = 5\Omega \Rightarrow 3\omega_0$-n: $L3\omega = 15\Omega \neq 5\Omega$

Ha $z^{-1}X_z \xrightarrow{z^{-1}} x_{[k-1]} \cdot \varepsilon_{[k-1]}$!

INVERZ-Z:

Ha alap függvényt találunk, akkor azzal számolunk!

pl:

$$\frac{z}{z-q} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \varepsilon_k q^k$$

és nem: $z \cdot \frac{1}{z-q} \rightarrow q^{[k+1]}$

EZ NEM IS JÓ

Az INV. Z-TRAFÓNÁL

$\frac{P_z^n}{Q_z^n}$ akkor elég annyi z^{-1}-t kiemelni, hogy felül 1-gyel kisebb fokszámú legyen.

$x \rightarrow \boxed{D} \rightarrow e^{-j\omega}X = z^{-1}X$

$x_k \qquad x_{[k-1]}$

$x_{[k+1]} \qquad x_k$

← AMI IDE CSATLAKOZIK

DIR-ből φ negatív $n \cdot \pi$ [rad], de ha lehet számold: $n \cdot 3{,}14 = x$

INVERZ TRAFÓ !

Ha z^+ hatványt kiemelünk, akkor az eltűnik.

Legegyszerűbb a megoldott feladatok alapján.

$$\frac{s}{s+1} = \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

INV. LAPLACEHOZ!

Ha 10, 12 van: $\frac{(s+2)}{(s-1)}$ akkor az $= \frac{5}{s-1} + \frac{2}{s-1}$

Ha $U_{KI(s)}$-t kérdezik, akkor nem kell $U_{KI}(t)$-t is számolni NYILVÁN. adatfüggvény!

Ha az eredményt $\sqrt{}$-ből kell kiemelni, akkor $\boxed{\pm}$ tehát 2 eredmény van!

Ha

$$W_{(z)} = \frac{A}{z(z-p)} \Rightarrow = z^{-1}\frac{A \cdot z}{z-p}$$ ALAPF.

$= A\,\cancel{p^{k-1}}\varepsilon_{[k-1]}$ – Ha kifejtésnél számolunk, akkor ez van lent, itt az index.

$= \varepsilon_{[k-2]}\, p^{k-2}$

Ha z nevezőben van akkor kiemelni, hogy részt az felül szám van, akkor $\cdot z \cdot z^{-1}$ fel kiemelés lent

ha $\varepsilon_{[k-k]} q^k \xrightarrow{\mathcal{Z}} \ldots$ | $a^k f_{[k]} \xrightarrow{\mathcal{Z}} F_{(\frac{z}{a})}$

tehát $\xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{\frac{z}{q} - 1} z^{-k} \cdot q^{-k}$

φ) KIFELÉ MUTATÓ ÁRAMOK CSP. A $\oplus$ -AK

k_ω? $\quad k_\omega = \sqrt{Re\{W_{j\omega}\}^2 + Im\{W_{j\omega}\}^2}$

$Re\, a\, e^{jb} = a\cos b$

MINTAVÉTELI IDŐ:

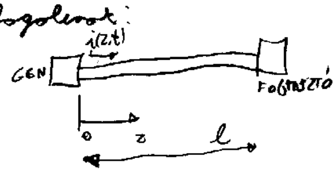
$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T \Rightarrow T/2 > T_{MV}.$$

10. fejezet

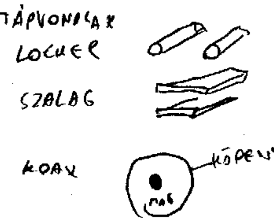
Elektromágneses terek

TÁVVEZETÉKEK

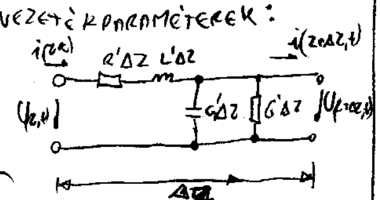
– alapfogalmak:



– TÁPVONALAK



– VEZETÉK PARAMÉTEREK:



R' – 1m vezetékszakasz ohmos ellenállása $\left[\frac{\Omega}{m}\right]$

L' – 1m vez. induktivitása $\left[\frac{H}{m}\right]$

C' – 1m vez. kapacitása $\left[\frac{F}{m}\right]$

G' – 1m vez.-on a átvezetés $\left[\frac{S}{m}\right]$

– TÁVÍRÓ EGYENLETEK

(Ez alapján, ← Kirchhoff csomóponti egyenleteiből)

$$\boxed{\begin{aligned}-\frac{\partial U(z,t)}{\partial z} &= R'\,i(z,t) + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= G'\,U(z,t) + C'\frac{\partial U(z,t)}{\partial t}\end{aligned}}$$

– SZINUSZOS GERJESZTÉSRE:

ekkor: $u(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar U(z)\, e^{j\omega t}\}$

$= \hat U_z \cos(\omega t - \varphi(U_z))$

ahol $\bar U(z) = \hat U(z)\, e^{j\varphi}$

$i(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar I(z)\, e^{j\omega t}\}$

átalakítva:

$$\begin{aligned}-\frac{d\bar U(z)}{dz} &= Z_s'\,\bar I(z)\\ -\frac{d\bar I(z)}{dz} &= Y_p'\,\bar U(z)\end{aligned}$$

ahol:

$Z_s' = R' + j\omega L'$ $Y_p' = G' + j\omega C'$

– HOSSZEGYSÉGRE JUTÓ KÉSLELTETÉS: $\boxed{t_{pd} = \sqrt{L'C'}}$ (PROPAGATION DELAY)

– TÁVÍRÓ EGYENLETEK MEGOLDÁSA:

$$\left(-\frac{d^2\bar U(z)}{dz^2} = Z_s'\frac{d\bar I(z)}{dz} = -Z_s' Y_p' U(z)\right)$$

$\gamma^2 = Z_s' Y_p'$ (γ – terjedési együttható)

$\gamma = \alpha + j\beta$ (valós részi, képzetes)

$= \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$

ahol: (γ – terjedési együttható)

α – csillapítási együttható $\left[\frac{Np}{m} = \frac{\text{neper}}{m}\right]$

β – fázistényező $\left[\frac{\text{rad}}{m}\right]$

HELY SZERINTI ELOSZLÁS

$$\boxed{\begin{aligned}\bar U(z) &= U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}\\ \bar I(z) &= \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} + \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma z}\end{aligned}}$$

Ekkor kell U^+, U^-, I^+, I^-

(ideális vezetéknél $\gamma = j\beta$ $\alpha = 0$)

– IDEÁLIS VEZETÉKRE A MEGOLDÁS:

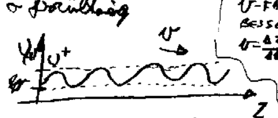
ha $U^- = 0$, $\alpha = 0$ $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$ ($\gamma = j\beta$)

ekkor: $(R' = 0, G' = 0)$ $\boxed{\beta = \frac{\omega}{c}}$

$U(z,t) = U^+\cos(\omega t - \beta z)$

$= U^+ e^{-j\beta z}$

a fázisállag



U-fázissebesség: $v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

U^+ → haladó hullám, előre halad, U^- ← ennek!

($U^- = 0$ – speciális eset volt) általában $U^+ = Z\hat U$ gondolom én

– HULLÁMIMPEDANCIA: $[\Omega]$

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{Z_s'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

IDEÁLIS VEZETÉKRE: $(R' = G' = 0)$

$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}}$ $\boxed{Z_0 = \frac{U(z)}{I(z)}}$

(TV: 75Ω, szalagkábel: 300Ω)

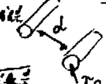
Y_0 – a hullámadmittancia

$L'C' = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{c^2}$ (ideális vezetékre)

LECHER VEZETÉKRE:

$L' = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{r_0}$

$C' = \frac{\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{d}{r_0}}$



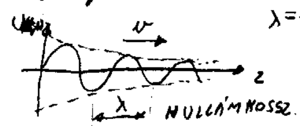
$Z_0 = \frac{1}{\pi}\ln\frac{d}{r_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$ $\boxed{\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}}$

U^+, U^- szerintem a forrástól függ

– VESZTESÉGES VEZETÉK!

$\gamma = \alpha + j\beta$ $\alpha \neq 0$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$



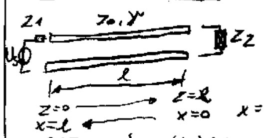
(300MHz → 1m)

Ha $U^+ = 0$ és ideális vezeték:

$U(z,t) = U^-\cos(\omega t + \beta z)$ $I_z = -\frac{U_z}{Z_0}$

ekkor $\frac{\Delta z}{\Delta t} = -\frac{\omega}{\beta} = -v$ ⇒ a hullám visszafelé terjed!

LEZÁRT VEZETÉK



IGAZ: $Z_2 = \frac{U(z=\ell)}{I(z=\ell)}$

$x = \ell - z$

REFLEXIÓ: (visszaverődés)

$r(x) = \frac{U^- e^{\gamma z}}{U^+ e^{-\gamma z}}$ REFLEXIÓ-TÉNYEZŐ

$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{U^-}{U^+} e^{2\gamma\ell}$ (a vezeték végén)

Ha $Z_2 = Z_0$ akkor $r_2 = 0$ nincs reflexió, illesztés van.

– ÁRAMLÓ TELJESÍTMÉNY:

veszteség nélkül:

$P(z) = \frac{|U^+|^2}{2Z_0}$ (HAYD SOS)

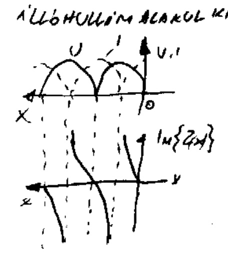
– RÖVIDZÁR A LEZÁRÁS $(Z_2 = 0)$:

ekkor $\boxed{r_2 = -1}$ $U(\ell) = 0$

$U(x) = \overbrace{U^+ e^{-\gamma\ell}}^{U_2^+}(e^{\gamma x} + r_2 e^{-\gamma x})$

$I(x) = \frac{U(x)}{Z_0}$ $U_x = 2j\,\underbrace{U^+ e^{-j\beta\ell}}_{U_2^+}\sin(\beta x)$

ÁLLÓHULLÁM ALAKUL KI: (PULZÁL)



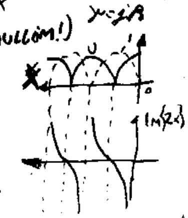
$\mathrm{Re}\{Z(x)\} = 0$

– SZAKADÁS A LEZÁRÁS $(Z_2 = \infty)$

ekkor $\boxed{r_2 = 1}$ $U_2^+ = U^+ e^{-\gamma\ell}$

$U(x) = U_2^+\, 2\,\mathrm{ch}\,\gamma x$ ideális v.: $\gamma = j\beta$

$I(x) = \frac{U(x)}{Z_0}$ (ÁLLÓHULLÁM!)



így:

$U(x) = U_2^+\, 2\cos\beta x$

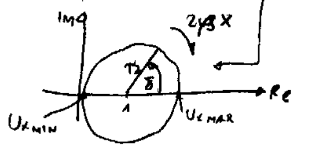
TELJESÍTMÉNY (ÁRAMLÓ)

$S(x) = -j\frac{|U_2^+|^2}{Z_0}\sin 2\beta x$

az $U(x)$ állóhullám-ábrázolása

$$|U(x)| = |U_2^+|\,|1 + r_2 e^{j(\delta - 2\beta x)}|$$

ahol



– Haladó és álló hullámok is vannak általános esetben.

$\sigma = \frac{U_{xmax}}{U_{xmin}}$ – állóhullám-arány jellemzi.

$\sigma = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|}$ (nagyobbal is látszik)

Illesztéskor $\sigma = 1$ $(r_2 = 0)$
nincs állóhullám → haladó van csak.

– Reaktív lezárás

$Z_2 = jX_2 \Rightarrow r_2 = -1 \cdot \frac{Z_0 - jX_2}{Z_0 + jX_2}$

$X_2 = \frac{1}{\omega C}$ vagy ωL

2 kapu-modell

– Lánckarakterisztika:

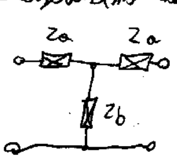
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} ch\gamma l & Z_0 sh\gamma l \\ \frac{sh\gamma l}{Z_0} & ch\gamma l \end{bmatrix}$$

– Bemeneti impedancia:

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 th\gamma l}{Z_0 + Z_2 th \gamma l}$$

– helyettesítő kapcsolás

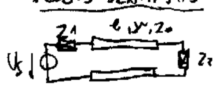


$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b \\ Z_b & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

$$Z_a = \frac{Z_0}{sh\gamma l}(ch\gamma l - 1)$$

$$Z_b = \frac{Z_0}{sh\gamma l}$$

Teljes számítás



Ideális vezeték

$U_S = R_1 I_1 + U^+ + U^-$

$I_1 = \frac{U^+ - U^-}{Z_0}$

$U(z,t) = ?$

$U(z,t) = U(z) \cos(\omega t - \beta z)$

$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$

$U^+ = \frac{U_S - U^-(1 - \frac{Z_1}{Z_0})}{1 + \frac{Z_1}{Z_0}}$

$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$

$\gamma = j\beta$

$U^- = r_2 U^+ e^{-j2\beta l}$

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

(komplex effektív érték)

U^- kiszámítása akkor egyszerű, ha $Z_1 > Z_0 \Rightarrow 1 - \frac{Z_1}{Z_0} = 0$. Ha nem, akkor $U^- = f(U^-)$ és tovább ki kell fejezni $U^- = f(r_2, \beta)$.

– A végeken:

$U_1 = U(z=0)$ $\quad U_2 = U(z=l)$

mi?

– Teljesítmények:

• fogyasztói:

$S_2 = \frac{1}{2} U_2 I_2^* = \frac{1}{2}\frac{|U_2|^2}{Z_2^*}$

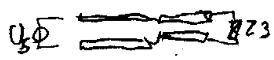
$P_2 = Re\{S_2\}$ $\quad Q_2 = Im\{S_2\}$

• betáplált teljesítmény:

$S_1 = \frac{1}{2} U_1 I_1^*$

– Ha 2 vezeték láncban van:

$A_e = A_1 \cdot A_2$ $\quad U_1 = U_S$ $\quad U_3 = I_3 Z_3$



$$\begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = (A_1 A_2)^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \leftarrow U_S$$

$I_3 Z_3$ $\quad \Rightarrow I_3 = ?$ $\quad \Downarrow U_3 = ?$

Ideális vezetékre: $U^- = 0$ $\alpha = 0$

$U(z) = U^+ e^{-\gamma z}$

$U(z,t) = U^+ \cos(\omega t - \beta z)$

$I(z,t) = \frac{U(z,t)}{Z_0}$

Ha $U^- \neq 0$: $U(z,t) = |U_2| e^{j[illegible]}$, $t = \omega \frac{l_0}{Z_0}$

Bekapcsolási jelenség (FR-tart.)

$U_S = \varepsilon(t) U_S$ (DC) $\quad$ (Ideális vez! és $r_2 = 0$)

$U_S(t) \rightarrow U_S(j\omega)$

$U(z, j\omega) = U_S e^{-j\beta z}$

$U(z,t) = U_S\,\varepsilon(t - \frac{z}{v})$ $\quad$ csillapításmentesen

– Csillapított:

$U(z,t) = U_S\,\varepsilon(t - \frac{z}{v})\, e^{-\alpha z}$

ahol $\alpha = \frac{R'}{2 Z_0} + \frac{G' Z_0}{2}$

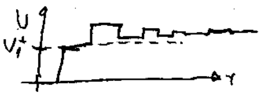
– Ha $r_2 \neq 0$ visszaverődik: először a vezeték végén, majd a vezeték elején megint, majd megint a végénél...

$t = 0$ -ban:

$$U(l/2, t) = U_1^+ (1 + r_2) \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k$$

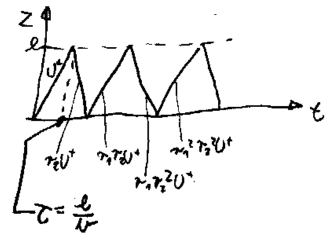
ahol $r_1 = \frac{R_1 - Z_0}{R_1 + Z_0}$ $\quad r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0}$

és $U_1^+ = \frac{U_S Z_0}{R_1 + Z_0}$ $\quad (U_1^+ = U_S$ ha $R_1 = 0)$

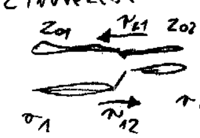


– Menetdiagram:

hullámfront helye az időben:



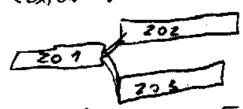
– 2 távvezeték lánca



$r_{21} = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$

$r_{12} = -r_{21}$

– Elágazás:



$r_{1(23)}$ $\quad r_{1(23)} = \frac{Z_{02} \times Z_{03} - Z_{01}}{Z_{02} \times Z_{03} + Z_{01}}$

r_{12} $\quad r_{12} = \frac{Z \times Z_{02} - Z_{01}}{Z \times Z_{02} + Z_{01}}$

Távírdegyenletek $\mathcal{L}$ tartományban

$$-\frac{\partial U(z,s)}{\partial z} = (R' + sL')\, I(z,s)$$

$$-\frac{\partial I(z,s)}{\partial z} = (G' + sC')\, U(z,s)$$

Megoldás: $\quad$ (Eddig állandó ω-n néztük!)

$U(z,s) = U^+(s) e^{-\gamma z} + U^-(s) e^{\gamma z} = ?$

U_S, Z_1, Z_2 függ $s = j\omega$-tól!!

$U^+(s) = U_S(s) \frac{Z_0}{Z_0 + Z_1} \cdot \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}}$

$U^- = r_2 e^{-2\gamma l} U^+(s)$

$r_2 = \frac{Z_2(s) - Z_0}{Z_2(s) + Z_0}$ $\quad \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}} = \sum (r_1 r_2)^k e^{-2k\gamma l}$

$U(z,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(z,s)\}$

$U_S(s) = \mathcal{L}\{U_S(t)\}$

ERŐHATÁSOK

- 2 pontszerű töltés

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

- azaz a Q_2-re ható erő:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\bar{r}_0$$ ← $\bar{r}_{12}$ 1-re normálva

- pontszerű töltés tere

$$\bar{E} = k\frac{Q}{r^2} \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

- térbeli töltéssűrűség:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \left[\frac{C}{m^3}\right]$$

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

felületi töltéssűrűség:

$$\rho_A = \lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$Q = \int_A \rho_A \, dA$$

vonalmenti töltéssűrűség

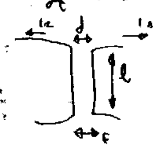
$$\rho_l = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta l} \quad \left[\frac{C}{m}\right]$$

$$Q = \int_A^B \rho_l \, dl$$

- töltésmegmaradás elve: $\Sigma Q = 0$

ÁRAMOK

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A]$$



$$F = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l$$

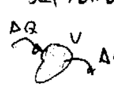
ÁRAMSŰRŰSÉG:

$$J = \lim \frac{\Delta I}{\Delta A} \qquad I = \int_A J \, dA$$

$J = \rho v = \sigma E$

felületen áthaladó áram.

- FOLYTONOSSÁGI EGYENLET



$\Sigma \Delta Q = 0$ V-re

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint \bar{J} \, d\bar{A}$$

- az előző [illegible]

$F = B_1 I_2 l$ ahol

$$B_1 = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1}{d} \quad [T] \quad \text{ha } I \perp l$$

MÁGNESES INDUKCIÓ,

ami a mágneses tér intenzitása.

$$F = I_2 \, l \times B$$

(ha $I \nparallel l$)

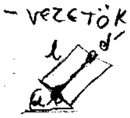
$$F = Q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

- SZABADON MOZGÓ TÖLTÉSRE (akár vezetékben is)

$$F = Q\bar{v} \times \bar{B} \quad \text{Lorentz}$$

$$F = QE + Q\bar{v} \times \bar{B}$$

- VEZETŐKERET (TEKERCS)



$$M = F l \cdot d \sin\alpha = B I l d \sin\alpha = B I A \sin\alpha = \Psi I \sin\alpha$$

(M ET T-vel is jelölik)

- FLUXUS

$$\Psi = \oint_A B \, dA = 0.$$

$$\Psi = B \cdot A = \int_A B \, dA$$

- FESZÜLTSÉG:

$$U_{AB} = \int_A^B E \, dl = \frac{W_{AB}}{Q} = -U_{BA}$$

- POTENCIÁL:

megadott referenciaponthoz viszonyított fesz.

- INDUKCIÓ:

$$U_i = -\frac{d\Psi}{dt} = \oint E \, dl = -\int_A \frac{dB}{dt} dA$$

ahol l a vezetőkör.

Ha tekercs:

$$U_i = n\oint E \, dl = -n\int_A \frac{dB}{dt} dA$$

$$= -\frac{dB}{dt} A\Big|_{A=\text{áll}} = -\frac{dA}{dt} \cdot B\Big|_{B=\text{áll}}$$

ha vezeték mozog B-ben

$B \perp l \perp v \quad U_i = B l v$

- DIELEKTROMOS ELTOLÁS

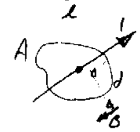
$$D = \varepsilon \bar{E} \quad \left[\frac{As}{m^2}\right]$$ ugyanaz mint az indukció

- GAUSS TÉTEL:

$$Q = \oint_A \bar{D} \, dA = \int_V \rho \, dV$$

GERJESZTÉSI TÖRVÉNY

$$\oint_l B \, dl = N \cdot \Sigma I$$ zárt görbe



$$B = \frac{\mu I}{2\pi d}$$

Ha az A síkot l határolja és I arra merőleges a felületen

(l-el által határolt felületen átfolyó áram)

$$\oint_l H \, dl = \Sigma I$$ AMPER TÖRV. (= GERJ. TÖRV)

$$I = \oint_l H \, dl = \int_A J \, dA$$

- ANYAGEGYENLETEK

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \qquad \bar{B} = \mu \bar{H}$$

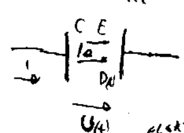
$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \qquad B = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$$

$\bar{M}$ - mágnesezettség elemi mágneses dipólusokból származik

- $Q = \int_A \bar{D} \, dA$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \bar{J}_e$$ eltolási áramsűrűség

$$\cancel{J = J_{vez} + J_e}$$



J befolyik, zavar hoz J_e folytatja magát megint J

$$I_e = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}\varepsilon_0 = \frac{dU}{dt}\frac{A}{d}\varepsilon_0$$

- FARADAY TÖRVÉNY:

$$\oint_l E \, dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} dA$$

- GAUSS:

$$\oint_A D \, dA = \int_V \rho \, dV$$

- $D = \bar{E}\varepsilon_0(1+\chi_e) = E\varepsilon_0\varepsilon_r$

- $B = \mu H$

- DIFFERENCIÁLIS OHM TÖRVÉNY

$$J = \left(\sum n_i q_i \mu_i\right)\bar{E} = \sigma \bar{E}$$

- STOKES TÉTEL:

$$\int_A \mathrm{rot}\, \bar{v}(r)\, dA = \oint \bar{v}\, dl$$

ebből:

$$\mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

vezetési és eltolási áramsűrűség

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

- GAUSS

$$\oint B\, dA = 0 \quad \int_V \mathrm{div}\, B\, dV$$

$$k \neq \frac{1}{9\pi\varepsilon_0} \neq \frac{\mu_0}{2\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am} \qquad k_B = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{As}{Vm} \qquad = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$$

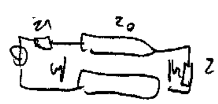
$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2 \qquad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{E.M. HULLÁM}$$

"TÁVVEZETÉK"

- SZINUSZOSNÁL $U_s = \hat{U}\cos(\omega t)$

Z_1, Z_2, Z_0 KOMPLEX



$$U_g = Z_1 I_1 + U^+ + U^- \geq Z_1 \frac{U^+ - U^-}{Z_0} + U^+ + U^-$$

$$U^- = 2e^{-\gamma \ell} U^+$$

U^+, U^-

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

Z alatt

$\hat{U} e^{j\varphi}$ komplex szám

$$U(z,t) = \hat{U}\, e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z} = \hat{I} e^{j\psi}$$

$$P(z) = U \cdot I^*$$

- BEKAPCSOLÁS:

$$\tau = \frac{\ell}{c}$$

Z_0 NEM KOMPLEX

$$U(z,t) = \frac{Z_0}{Z_1 + Z_0}\Big[U_s(t - \tfrac{z}{v}) + r_2 U_s(t - \tfrac{2\ell - z}{v}) + r_1 r_2 U_s(t - \tfrac{2\ell + z}{v})\Big]$$

Céloz mi:

$U_s(t - \Delta t)$ – két időben, ahol $\Delta t = c \cdot \tau$, ahol $c \in \mathbb{R}$

MAXWELL:

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\, E = 2\pi\nu E \qquad \mathrm{rot}\, H = 2\pi\nu H$$

Ha távolról vizsgáljuk, kontúrozni jelenséget

$$U = \Delta E \cdot d = (E_1 - E_2) \cdot d$$

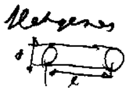
TEKERCSEK A GYAKORLATBAN

MAGVÁLASZTÁS

- $f < 100$ kHz
  nagy μ_r zárt körök ($\mu_r \approx n \cdot 1000$)
  (LÉGMAGOS, GYŰRŰ-FAZÉK-RÚDVAS)
  vas helyett porsz FERRIT
- 100 kHz $< f < 50$ MHz
  zárt, nyitott, ritkán zárt mag (LÉGMAG, FAZÉK, RÚDVAS)
- $f > 50$ MHz nyitott kör kis μ_r (10)
  (CSAK LÉGMAG, RÚDVAS)

LÉGMAGOS TEKERCSEK:

- Hengeres



$$L \approx \frac{\pi N^2 d^2}{\ell + 0{,}45 d}$$

$$N \approx \sqrt{\frac{L(\ell + 0{,}45d)}{\pi d^2}}$$

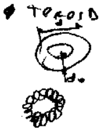
- LAPOS

$$L \approx 10{,}5 \cdot k N^2 d$$

$$k \approx 0{,}8 + 0{,}2\frac{D}{d}$$

$$N \approx \sqrt{\frac{L}{10{,}5 k d}}$$

- TOROID



$$L \approx \frac{N^2 \pi d^2}{d_0}$$

$$N \approx \sqrt{\frac{L d}{\pi d_0^2}}$$

NAGYFREKVENCIÁN ÁRAMKISZORÍTÁST kell figyelembe venni

VASMAGOS TŰRÉS ±25%

VASMAGRA MEGADJÁK:

A_L – INDUKTIVITÁSI TÉNYEZŐ [nH]

$$\left(A_L = \mu \frac{A}{\ell_e}\right)$$

$$A_L = \frac{L}{N^2} \qquad N = \sqrt{\frac{L}{A_L}} \qquad L = \frac{A_L}{N^2}$$

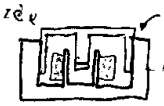
- TORZÍTÁS lehet, ha a mágnesezési görbében túllépjük a LINEÁRIS TARTOMÁNYT. LÉGRÉS CSÖKKENTI EZT.

FAJTÁI

- NYITOTT
  henger, rúd, stb
- RÉSZBEN ZÁRT (KIS SZÓRÁS)

SERLEG, RÉMEGA

FAZÉK, MENETES, MÁGNESMAG LEMEZ



- ZÁRT
  színű a szórás
  GYŰRŰ ($A_L = 500 \ldots 5000$)
  U, I, E, FAZÉK

- JÓSÁGI TÉNYEZŐ

$$Q = \frac{X_L}{R_L} = \frac{2\pi f L}{3\frac{\ell}{A}} \qquad Q = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\delta}$$

- HUZALOK:

R_{Cu}: Ω/mm^2 $0{,}02 \left(\frac{1}{d}\right)^2 \frac{\Omega}{m}$

- MAX MENETSZÁM:

V – ADOTT

$$V = N A_{huzal} d_{közép} \pi \cdot 1{,}3$$

- TERHELHETŐSÉG (f, P)

f_1-től $\mathrm{tg}\,\delta$ nő lineárisan (VASMAG VESZTESÉG)

f_2-től μ_r - jelentősen csökken

$$f_1 \approx \frac{1}{\mu_{r\,kezd}} \cdot 100 \qquad f_2 \approx \sqrt[4]{\frac{1}{\mu_{rk}}} \cdot 1000$$

f_1-ig $\mathrm{tg}\,\delta < 12 \cdot 10^{3}$ } VESZT
f_2-n $\mathrm{tg}\,\delta < 12 \cdot 10^{-2}$

- TELÍTÉSI INDUKCIÓT NE KÖZELÍTSÜK ½!

$$B \leq \frac{B_{tel}}{2}$$

$$B = A_L \frac{NI}{A} = \mu \frac{NI}{\ell}$$

- $\mathrm{tg}\,\delta$ HATÁSA

Pontosan $\mathrm{tg}\,\delta = P_{veszteség}$

EL KELL DISSZIPÁLNI

- TELJESÍTMÉNY, ENERGIA:

• E $p_e = ui = \int_V E \frac{\partial D}{\partial t} dV$

(mert $U = \int E\, dl$ $\quad i = \frac{\partial Q}{\partial t}$ $\quad Q = \oint_A D\, dA$)

ENERGIASŰRŰSÉG:

$w = \int_0^t E \frac{\partial D}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$

ENERGIA (TÉRRÉSZ)

$W = \int_V w_e\, dV$

TELJESÍTMÉNY SŰRŰSÉG: $E \frac{\partial D}{\partial t}$

• M ~~teljesítménysűrűség~~

$p_m = H \frac{\partial B}{\partial t}$

$W_m = \int_0^t p_m\, dt = \int_0^B H\, dB$

(MÁGNESEZÉSI GÖRBÉN $f(H)$)

$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$

• ELEKTROMÁGNESES TÉR energiasűrűség

$w_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$

- ENERGIAÁTALAKULÁSOK

$p = E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t}$

$= E\, \mathrm{rot}(H - J) - H\, \mathrm{rot}\, E$

$= -\mathrm{div}(E \times H) - EJ$

térrészre

$P = -\int_V p\, dv$

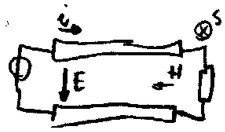
- felületen áthaladó teljesítmény

SŰRŰSÉG: $S = E \times H$ POYNTING VEKTOR

$P_{ki} = \oint_A S\, dA$

- TÁVVEZETÉKNÉL:

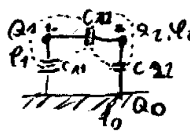
Az energia a 2 vezeték között áramlik az elektromos és a mágneses tér által



$E = \frac{u}{d}$

$H = \frac{k}{N} \frac{1}{r}$

- ELEKTRÓDA RENDSZEREK



$Q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2)$
$+ C_2(\varphi_1 - \varphi_2)$

A RÉSZKAPACITÁSOK:

(csatolt kapacitások)

elektródák, ezeknek van kapacitásuk.

A kapacitás (?) miatt kívülről Q töltés.

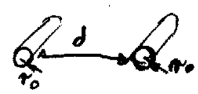
$Q_0 = -\sum^n Q_i$

Q_i ? φ_i ; ELRENDEZÉSSŐL

részkapacitások:

2 féle:

$C = C' \Delta l$



$C = C' \Delta l$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{P}}$ - POTENCIÁL-TÉNYEZŐK

lineárisban C-ktől függ

ebből

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}+C_{12} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{22}+C_{21} \end{bmatrix} \underline{\varphi}$$

VAGY EGYSZERŰEN, A

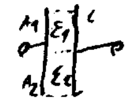
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{C}} \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_0 & \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_2 - \varphi_0 & \varphi_2 - \varphi_1 \end{bmatrix}$$

ebből Q_1, Q_2

- φ_1 és φ_0 pont közötti kapacitás $\neq C_{11}$

$C_{10} = C_{11} + C_{12} \times C_{22}$

- INHOMOGÉN SZIGETELŐ:



$C = \varepsilon_1 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{A_2}{d}$

- STACIONÁRIUS ELEKTROMOS TÉR $\mathrm{rot}\, E = 0$ $\quad \mathrm{div}\, J = 0$

$\oint E\, dl = 0$ $\quad \oint J\, dA = 0$

• KOAX KÁBEL:

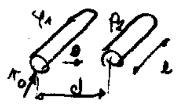
$J = \frac{i}{2\pi r}$ $\quad E = \frac{J}{\sigma}$

$\varphi = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$

$C = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln r_2/r_1}$

$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{q}{2\pi \varepsilon r}$

• PÁRHUZAMOS VEZETÉK:



$C = \frac{\pi \varepsilon l}{\ln \frac{d}{r_0}}$

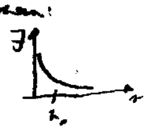
$\varphi_1 = i \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{d}{r_0}$ $\quad U = \varphi_1 - \varphi_2$

$\varphi_2 = i \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_0}{d}$

$J = \frac{i}{2\pi r}$ a távolsággal a J nem lineáris:

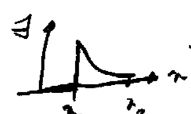
$J = \sigma E$

$D = \varepsilon E$



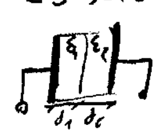
SŐT:

$J = \frac{\sigma U}{r_2 r}$



(E hasonlóan)

- 2-S SZIGETELÉS



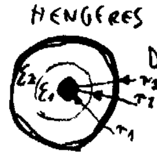
$D_1 = D_2$

$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$

$U = E_1 d_1 + E_2 d_2$

$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$ $\quad C_i = \varepsilon_i \frac{A}{d_i}$

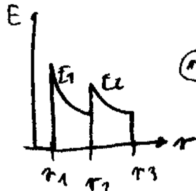
HENGERES ELEKTRÓDÁKNÁL:



$D = \frac{Q}{2\pi r} = D_1 = D_2$

r_2-nél $(E(r_2))$

$\varepsilon_1 E_1(r_2) = \varepsilon_2 E_2(r_2)$



$E_1(r) = \frac{q}{2\pi \varepsilon_1 r}$ $\quad r \in [r_1, r_2]$

$E_2(r) = \frac{q}{2\pi \varepsilon_2 r}$ $\quad r \in [r_2, r_3]$

$U_1 = \int_{r_1}^{r_2} E_1 \, dr$

$U_2 = \int_{r_2}^{r_3} E_2 \, dr$

$E_{max} = \frac{1}{2\pi \varepsilon_1 r_1}$

$C = \frac{Q}{U}$ -ból

- MATEK

• ROTÁCIÓ:

$$\mathrm{rot}\, \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

vektormező → vektormező
örvényes van, ha $\mathrm{rot}\, v \neq 0$

• DIVERGENCIA:

$$\mathrm{div}\, \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

vektormező → függvény

• GRADIENS:

$$\mathrm{grad}\, \underline{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

függvény (3v) → vektormező

• LAPLACE

$$\Delta = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

(DIV 2x deriválttal)

• SZABÁLYOK

$\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \underline{v} = 0$

$\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \underline{v} = 0$

$\mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \underline{v} = \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \underline{v} - \Delta$

$\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, \underline{v} = \Delta$

• VONALMENTI INTEGRÁL

ÍVHOSSZ

$$s = \int_a^b |\dot{r}(t)| \, dt = \int_L |v(t)| \, dl$$

$$\sqrt{\dot{x}_{(t)}^2 + \dot{y}_{(t)}^2 + \dot{z}_{(t)}^2}$$

VEKTORMEZŐT INTEGRÁLJUK

elvégzése:
(vonalmenti erő hatására végzett munka vonal mentén mozogva)

vonal egyenlete:

$$v(t) = M(t) = \underbrace{x(t)\, i + y(t)\, j + z(t)\, k}$$

$$s = \int_L v \, dl \quad \text{(BE)} \quad \text{DERIV.}$$

$$= \int_a^b \underbrace{v(r(t))}_{\text{VEKTOR}} \cdot \underbrace{\dot{r}(t)}_{\text{VEKTOR}} \, dt$$

a megfelelő komponenseket kell összeszorozni.

• FELÜLETI INTEGRÁL:

$$\int_F v(r) \, df$$

$r(x,y)$ behelyettesítés a v-be

$$\iint_A v(r(x,y)) \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \, dx\, dy$$

A a tartomány

vektormezőt int.

• ÁTTÉRÉSEK:

$$\iint_F v(r) \, dA = \iiint_V \mathrm{div}\, v_r \, dV$$

$$\int_L v(r) \, dl = \iint_F \mathrm{rot}\, v(r) \, df$$

TÉRBELI ÁRAM:

$E(r) = \frac{I}{4\pi \sigma r^2}$ $\qquad \varphi = \frac{I}{4\pi r}$

Végtelen szigetelő/vezető felület:

$\varphi = \frac{I}{4\pi \sigma} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h} \right)$

$R_{\text{szétterj}} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h} \right)$

$J = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ → tükrözés

$E = \frac{J}{\sigma}$

- KOMPLEX DIELEKTROMOS ÁLLANDÓ (ε_R)

$\mathrm{tg}\, \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$ VESZTESÉGI TÉNYEZŐ

$\varepsilon_K = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)$

ε_1 ε_2 α_1 D_2 D_1 α_2 n

• D TÖRÉSE

D_{1n} a D-nek az n-irányú komponense.

$D_{2n} - D_{1n} = \varsigma_A$ $\quad$ HA $=0$ → $D_{2n} = D_{1n}$

E értéke ugrik $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ ARÁNYB.

• ugyanígy törik a B: (B)

$$\frac{\mathrm{tg}\, \alpha_1}{\mathrm{tg}\, \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

• E törik:

$$\frac{\mathrm{tg}\, \alpha_1}{\mathrm{tg}\, \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

FELÜLETNÉL
$D_1 = D_2$
$B_1 = B_2$

- ELEKTRODINAMIKA

- SZTATIKUS TEREK:

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad J = 0$

Magnetosztatika	Elektrosztatika
$\mathrm{rot}\, H = 0$	$\oint E \, dl = 0$
$\mathrm{div}\, B = 0$	$\mathrm{rot}\, E = 0$
	$\mathrm{div}\, D = \varsigma$

- STACIONÁRIUS TEREK

$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad J \neq 0 \quad J = \mathrm{CONST.}$

$\mathrm{rot}\, H = J$	$\mathrm{rot}\, E = 0$
$\mathrm{div}\, B = 0$	$\mathrm{div}\, J = 0$
	$J = \sigma E$

- IDŐBEN VÁLTOZÓ TEREK

• KVÁZISTACIONÁRIUS

$\mathrm{rot}\, H = J + \cancel{\ldots}$	$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\mathrm{div}\, B = 0$	$\mathrm{div}\, D = \varsigma$

HA SZINUSZOS:

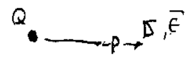
$\mathrm{rot}\, H = J + j\omega D$

• ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

$\mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
$\mathrm{div}\, B = 0$	$\mathrm{div}\, D = \varsigma$

– ELEKTROSZTATIKUS TEREK

• PONTTÖLTÉS:



$D=\frac{Q}{4\pi r^2}$ $\quad E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$\varphi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

• FÉMGÖMB

$D=\frac{Q}{4\pi r^2}$

$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

helyettesíthető tehát ponttöltéssel középponttal

• SOK PONTTÖLTÉS:

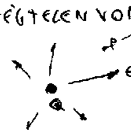
$\bar{E}=\bar{E}_1+\bar{E}_2$

eira vektoros szuperpozíció

GND

φ, D, E ...

• VÉGTELEN VONALTÖLTÉS (VEZETÉK)



$D=\frac{Q}{2\pi r}$

$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r}$

$\varphi=\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}$

• FÉMHENGER:

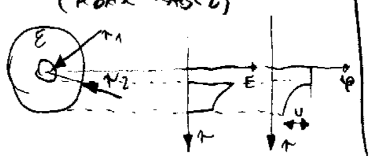
olyan a vonaltöltéssel.

– KAPACITÁS 2 VEZETÉK KÖZÖTT:

$C=\frac{Q}{U}=\frac{\oint D\,dA}{\int E\,dl}$ $\quad D=\frac{q}{2\pi r}$ $\quad E=\frac{q}{2\pi\varepsilon r}$

$\oint D\,dA=q\,l$

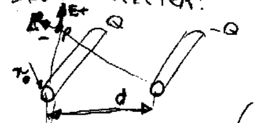
– HENGERES KONDENZÁTOR (KOAX KÁBEL)

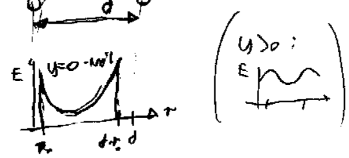


$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$ $\quad E_{max}=\frac{U}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}}$

$C=\frac{Ql}{U}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$

LOCHER VEZETÉK:





P pontban $E=E_+ + E_-$

$E_+=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r_+}$ $\quad E_-=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r_-}$

$E(x)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$

E_y hasonlóan $\quad E_u=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)$

$U=\int_{r_0}^{d-r_0}E(x)\,dx\approx\frac{Q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_0}$ ha $r_0\ll d$

$C=\frac{Q}{U}\cdot l$

$E_{max}=E_{(x=r_0)}$

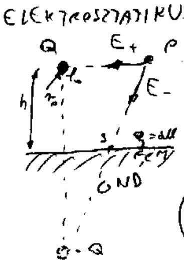
– HA gömbön van, akkor σ számítás:

$\sigma=D_{n2}-D_{n1}$ vagy ez van csak

$\Downarrow$ ↳ 0 mert E merőleges

$\sigma=D=\varepsilon E$

– ELEKTROSZTATIKUS TÜKRÖZÉS



P-ben E-t Q-ból, és a fiktív -Q-ból kell számolni.

$\left(\varphi_S=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\right)$

$\varphi_S=0$

$\varphi_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)$

$E_P=E^++E^-$

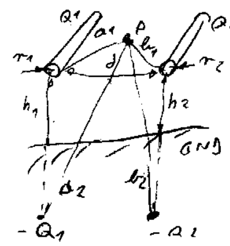
Ha a Q a gömbön van:

$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{2h}\right)=U$

$C_{gömb}=\frac{Q}{U}$

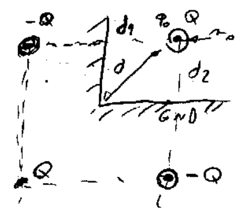
$\sigma=-D_n$

– HA ILYEN VAN:



$\varphi_P=\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a_2}{a_1}+\frac{Q_2}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b_2}{b_1}$

– HA EZ:



FIKTÍV TÖLTÉSEK

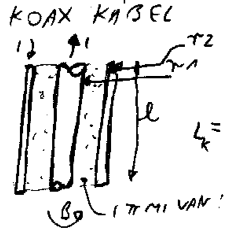
$U=\varphi_0=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{d}{r_0}-\ln\frac{d}{2d_2}+\ln\frac{d}{2d}-\ln\frac{d}{2d_1}\right)$

$U=\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2d_2d_1}{r_0d}$

a gömb felületén.

INDUKTIVITÁSOK IEO

– KOAX KÁBEL



$L_k=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$

B_0 ↳ ITT MI VAN! FLUXUS IS ITT!

$\Psi=\int_A\mu H(r)\,dA=\int B\,dA$

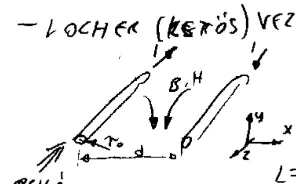
$H(r)=\frac{Ir}{2\pi r_1}$

belső hullám:

$L_b=\frac{\mu l}{8\pi}$

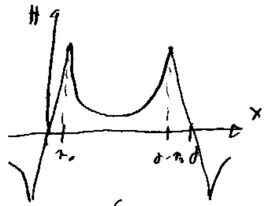
$L=L_k+L_b$

– LOCHER (KETTŐS) VEZETÉK



$L=L_k+L_b$

$L_b=\frac{\mu_{rel}l}{4\pi}$ $\quad L_k=\frac{\mu l}{\pi}\ln\frac{d-r_0}{r_0}$



$$H(x) = \left(\frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi(d-x)}\right)\bar{e}_y$$

- kölcsönös induktivitás:

2DB kettősvezeték

Ψ ami I_1 hatására a 2. kettős vezetékben fellép

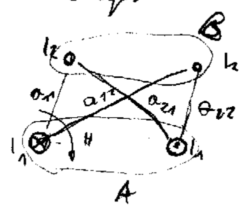
$$\Psi_{21} = I_1 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

Ψ_{12} hasonlóan végzet'

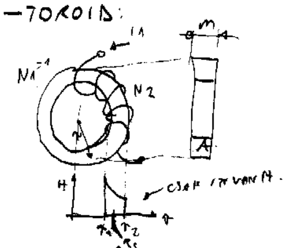
$$L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln \frac{a_{12}a_{21}}{\underbrace{a_{11}a_{22}}_{\text{HATÁR}}}$$

ha $L_{21}=0$ ⇒ NINCS INDUKTÍV CSATOLÁS

például ha a 2 vezeték egymásra merőleges



- TOROID:



$$H_s = \frac{NI}{2\pi r} \qquad \Psi = N B_e \cdot A = N\Psi_m$$

mág

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2}{2\pi R_s} A$$

PONTOSABB:

$$L = \frac{\mu N^2 m}{2\pi} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

Ha van mégegy tekercs:

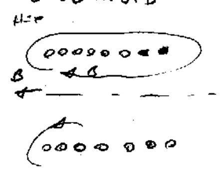
KÖLCSÖNÖS INDUKTIVITÁS:

$$\Psi_{21} = N_2 \Psi_m$$

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I} = \frac{\mu N_2 N_1 m}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

- vezetékek terhelhetősége: $4A/mm^2$

- SZOLENOID TERE:



$$H = \frac{NI}{l}$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

- képletek (?)

$$\text{rot}\frac{1}{\mu}\text{rot} A = J$$

$$\text{div} B = 0$$

$$\Delta \bar{A} = -\mu J$$ (sekt. poisson egyenlet)

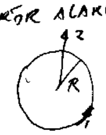
$\bar{A}$ - mágneses vektorpotenciál

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{J}{r}\, dV$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi}\oint \frac{1}{r}\, dl$$

$$B = \frac{\mu I}{4\pi}\int_l \frac{dl \times r_0}{r^2}$$

- kör alakú menet:



$$H_{(z=0)} = \frac{NI}{2R}$$

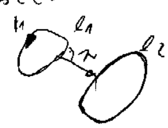
z=0 síkban

másnál:

$$\bar{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{1}{r}\, dl$$

$$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$$

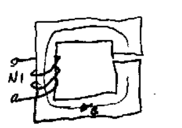
- kölcsönös induktivitás:



$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\oint\oint \frac{1}{r}\, dl_2\, dl_1$$

- MÁGNESES KÖRÖK

A ferromágneses anyagokban nagyobb a B. A mágneses körök nagyrészt a nagy μ_r-jű anyagokon záródnak



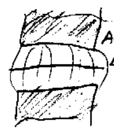
$$\oint H\, dl = N \cdot I$$

$$= \sum^n H_i l_i$$

$l_{szakasz}$

Akkor lesz más, ha a μ nagy a keresztmetszet más.

A rés:



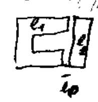
$A_0 = \tau A_1$

τ - légrés szórási tényező

ha $l_0 \to 0 \Rightarrow \tau \to 1$

$$B_0 = B_1\frac{A_1}{A_0} = B_1\frac{1}{\tau}$$

ilyenkor:



$$\frac{B_1 l_1}{\mu_0\mu_1} + 2\frac{B_0 l_0}{\mu_0} + \frac{B_2 l_2}{\mu_0\mu_2} = NI$$

- $R_m = \frac{l}{\mu_0\mu_r A}$ - mágneses ellenállás

$$\Psi R_m = N \cdot I = U_m$$

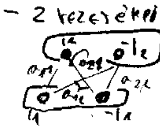
- ha zárt görbe van, az 1 db marad.

csak l_1 van.

l_1, l_0 ; l_1, l_2

$$A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2 = 0$$

- 2 vezetékpár



a_{ik} - távolságok

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

kölcsönös induktivitás)

I_1 hatására

$\Psi_{21} = I_1 \cdot L_{21}$ fluxus lesz a 2. vezetékben.

akkor

$U_i = -\frac{d\Psi_{21}}{dt}$ fesz indukálódik

$\boxed{U_i = j\omega I_1 L_{21}}$ ÁTHALLÁS

- 2 tekercs közötti áthallás (szolenoid)

$$U_2 = \frac{j\omega \mu_0\mu_r N_1 N_2 A_{12} I_1}{l_1}$$

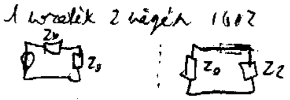
FELADATOK

- Hullámellenállás modell lényege:
$\frac{U(z,t)}{I(z,t)}$ = áll mindenhol $= Z_0$ — olyan, mintha csak 1 db $Z = Z_0$ impedancia csatlakozna
HULLÁMIMPEDANCIA
(helyettesítő kép — folytonos modellből következik.)

- Ha szinuszos amplitúdókkal számolunk, vehetjük $U^- = 0$ -t. $U^+ = \hat{U}$
$\hat{U}_{(z)} = U^+_{(z)} = U_2^+ \left[e^{\gamma(\ell-z)} + r_2 e^{-\gamma(\ell-z)}\right]$

- U^+ ⊕ irányban terjedő összetevők, $U^+ = \Sigma U(t,z)$
U^- : ⊖ irányúak. $U^- = \Sigma U(t,z)$
Bekapcsoláskor ($E(t)$ vagy $U_0(t)$) kettőnek látszanak ezek (sorozatot) a szinuszos viszonyokban
Szinuszos állandósult állapotban: már összegződtek, kialakult a szinusz (U^+ és U^-)

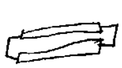
- $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$

- Távvezetékmodellhez:
1 vezeték 2 végén 1 port


- Általában: (hosszú) $\gamma \approx 0$ vagy $\gamma \approx \alpha$
így
$U_z = U^+(z) + U^-(z)$
$= U^+(z) \cdot (1 + r_z)$

Ha $Z_2 = Z_0$: $U^- = 0$; $U^+ = U_1$

- Frekvenciatartományban:
összegzés (menetdiagrammal)
$U_{(z)} = U_g e^{-sT_1} + r_2 U_g e^{-sT_2} + r_1 r_2 U_g e^{-sT_3} + \dots$
$T_1 = \frac{z}{v}$ $T_2 = \frac{2\ell - z}{v}$ $T_3 = \frac{2\ell + z}{v}$
$T_3 = \frac{4\ell - z}{v}$ $T_4 = \frac{4\ell + z}{v}$ $T_5 = \frac{6\ell - z}{v}$
$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

- Kábel rezonál:
$\lambda_{MIN} = 2\ell_{MIN} = \frac{c}{f}$


- Vezetéken
$U_{MAX} = U_1^+ + U_1^-$
$U_{MIN} = U_2^+ - U_2^-$

- Ha I_2^+, I_2^- adott:
$I_2^+, I_2 \xrightarrow{r_1 \cdot r} \hat{I}_2 \xrightarrow{Z_0} \hat{U}_0 \longrightarrow U_0^+ \to U_1$; $\hat{U} = \hat{U}_0 e^{\gamma z}$; $r_2 U^+$; $U^+ + U^- = U_{MAX}$

- $U_0 e^{-\gamma z} = U_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$

- Ha tört nevezője komplex:
$\frac{A}{B-C} = \frac{A(B+C)}{(B-C)(B+C)} = \frac{AB + AC}{B^2 - C^2}$

- Lezárt vezeték
bemenő ellenállása:
$$\boxed{Z_{BE} = Z_0 \frac{Z_2 \cos(\beta\ell) + jZ_0 \sin(\beta\ell)}{Z_0 \cos(\beta\ell) + jZ_2 \sin(\beta\ell)}}$$
illeszés van, ha
$Z_{BE} = Z_1$ $Z_{BE} = Z_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2 = Z_{BE}$

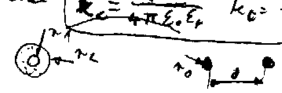
- Mikor kell Z_0-lal számolni vezetékeknél?
$$\boxed{\beta = \mathrm{Im}\{\gamma\} = \mathrm{Im}\sqrt{Z_s Y_p} = \mathrm{Im}\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}}$$
Ha $\omega \to 0$ (kicsi) akkor $\mathrm{Im}\{\gamma\} = \beta \to 0$, és akkor $Z_{BE} \to Z_2$
Tehát nem számítanak a vezetékparaméterek akkor (Ha Z_{BE}-képletébe behelyettesítünk, ez látszik)
Tehát bizonyos frekvencia felett a vezeték hullámimpedanciaként viselkedik!!! (alatta nem)

- Ha $R', G' \to 0$ (ideális és gyakorlati vezetékek)
akkor
$\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}$ $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}}$
$\boxed{\beta = \omega\sqrt{L'C'}}$

- Még nagyobb frekvenciákon $R' - R$ → áramkiszorítás

- Vezeték param.:

KOAX	ÉRPÁR (Lecher)
$L' = k_L \ln\frac{r_2}{r_1}$	$L' = 2k_L \ln\frac{d}{r_0}$
$C' = \frac{1}{2k_C \ln\frac{r_2}{r_1}}$	$C' = \frac{1}{4k_C \ln\frac{d}{r_0}}$

ahol $\boxed{k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad k_L = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}}$


- Áramkiszorítás:
behatolási mélység:
$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ $g = \frac{1}{\delta}$
$R_{vez} = \frac{\ell}{\sigma A}$
Negyzetesen:
$R = \frac{\ell}{\sigma A_{új}}$ új keresztmetszettel számolunk
(az oszt. kiszélesítés, most nincs éles határa a kiszámításnak)
$A_{új} = \text{kerület} \cdot \delta = k\delta$
$R' = \frac{R}{\ell} = \frac{1}{\sigma A_{új}}$
akkor kell $A_{új}$, ha $\delta <$ a vezeték legkisebb átmérője.

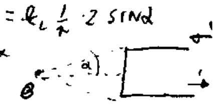
- Gömbkapacitás: (+ szigetelőréteggel: $C_e = C_1 \times C_2$)
$C = \frac{r_0}{k_C}$
Ha van föld a közelben:
$C = \frac{1}{2k_C\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)}$

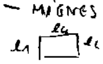

- Erőterek
Ha nem a homogén q^- van megadva (töltéssűrűség) ugyanúgy lehet vele számolni, mint a q-val.

- Átütési szilárdság:

E_{KRIT} — azt a szigetelőét, amelyik hamarabb átüt
$D_1 = D_2$
$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$
$U_{MAX} = E_{krit} d = E_{KRIT}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r_2}}\right)$

- Antenna
sugárzási ellenállása: (dipól)
$Z_s = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$
~~hatásosan~~ sen

- $B = k_L \frac{I}{r} \cdot 2 \sin\alpha$
Ha


- Mágneses kör:

$\theta_i = k_R$
$NI = \Sigma H_i \ell_i$

ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK

$\text{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

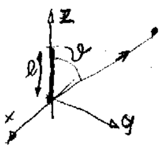
$E = -\text{grad}\, \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$

$\text{rot}\, \bar{E} = -\text{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$\Delta A = -\mu J$ VEKTORIÁLIS HULLÁMEGYENLET

$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ SKALÁRIS H.E.

– HERTZ DIPÓLUS (ANTENNA)
l hosszú vezeték



KÖZEG HULLÁM-ELLENÁLLÁSA:
$Z_0 = \frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

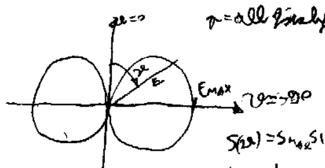
$Z_{0_{lev}} = 377\,\Omega$ (levegő)

alól

$H_\varphi = \frac{I l}{4 \pi r} e^{j(\omega t - \beta r)}\, j\beta \sin\vartheta$

$E_\vartheta = \frac{I l}{4 \pi r} e^{j(\omega t - \beta r)}\, j \beta Z_0$

– SUGÁRZÁSI DIAGRAM poláris
r = áll függvényében



$S(\vartheta) = S_{max} \sin^2 \vartheta$

felület: $F(\vartheta, \varphi) = \frac{|E_\vartheta|}{|E_\vartheta|_{max}} = \sin \vartheta$

– SUGÁRZÁSI ELLENÁLLÁS

$P = \frac{1}{2} I^2 R_s = \int_{A} S_r\, dA$

$S_r = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^*$

$= \frac{1}{2} |E|^2 Z_0$

LEVEGŐBEN:
$R_s = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad \lambda = \frac{c}{f}$

$P = |E_{max}|^2 r^2 \frac{4\pi}{3 Z_0}$

– DIFFÚZIÓS EGYENLET:

$\Delta E - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0$

– SZINUSZOS VÁLTAKOZÁSKOR (KOMPLEX)

$\bar{E} = E(r)\, e^{j\omega t}$

$\bar{H} = H(r)\, e^{j\omega t}$

$\Delta E - \gamma^2 E = 0 \quad \gamma^2 = j\omega\mu\sigma\varepsilon$

$\bar{H} = -\frac{1}{\mu j \omega} \text{rot}\, \bar{E}$

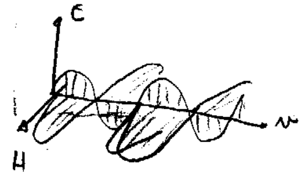
a síkhullám:

$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$

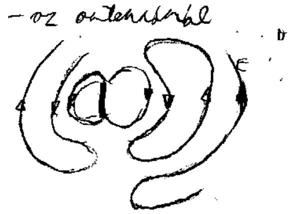
$$H = -\frac{1}{j\omega\mu} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -e_y \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}$

$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$



– az antennánál



Távoli tér:
E, H csak a ϑ-tól és r-től (irány) függ.

$\frac{E(R, \vartheta)}{H(R, \vartheta)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = R_h$

HULLÁMELLENÁLLÁS (KÖZEG)

síkhullámnak tekinthető a tér a távolban (TRANSZVERZ)

$S(R, \vartheta) = \frac{1}{2} E \cdot H^*$

$= \frac{1}{8} R_h \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2}$

$P = \frac{1}{2} R_S I_m^2$ a kisugárzott teljesítmény.

$R_S = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

$E_{max} = \frac{30 l}{R} \sqrt{P_{[kW]}}$

levegőben $\vartheta = 90°$-nál

– Ha Z_0, γ-t meg határozhatnánk, az ismert analógia a távvezetékekkel

– KÖZEGHATÁRON:

$\hat{E}_2 = \hat{E}_1 \cdot (1 + r) \quad \vec{H} = \frac{\vec{E}}{Z_0} \quad r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

$E_1 \; E_2$
$Z_{01} \; Z_{02}$

– kellően nagy frekvenciájú hullámok terjedhetnek fémcsövek belsejében: $\boxed{\text{CSŐTÁPVONAL}}$
Egyszerű, nem szögletes.

– KOMPLEX AMPLITÚDÓRA A MAXWELL EGYENLETEK:

$\text{rot}\, H = j\omega\varepsilon E$

$\text{rot}\, E = -j\omega\mu H$

$\text{div}\, H = 0$

$\text{div}\, E = 0$

– A VEKTORPOTENCIÁL:

$B = \text{rot}\, A$

$E = \text{rot}\, Z$ elektromos vektorpotenciál

– TELJESÍTMÉNYÁRAMLÁS:

$S = \frac{1}{2} E \times H^*$ szinuszos tenzor

$$E \times H = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

– Energiaszállítás csak a csillapítatlan módusokban lehetséges

HATÁRHULLÁMHOSSZ:

$\lambda_h = \frac{2 \pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$

$m = 0, 1, 2 \ldots$
$n = 0, 1, 2 \ldots$ } MÓDUSINDEX

λ alatt terjed csillapítatlanul

(a, b keresztmetszeti méretek) pár GHz kell

– TE módus: TRANSZVERZÁLIS ELEKTROMOS SÍKHULLÁM

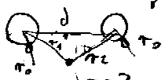
TM módus: TR. MÁGNESES SÍKHULLÁM

– $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}\,\right]^S$

$S = 1 - TM$
$S = -1 - TE$ } MÓDUSNÁL

– ÜREGREZONÁTOR: LEZÁRT CSŐTÁPVONAL. Gázos rezgőkör.

– 2 FÉMGÖMB – U-adott



GÖMB / PONT TÖLTÉS

fémgömb helyettesíthető pont töltéssel. 2 ellentétes töltés között $E = 2\cdot E_{egy}$

$E = k\frac{Q}{r_1^2} \pm k\frac{Q}{r_2^2}$

$Q = C\cdot U$

$C = 2k\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d}\right)$

– VONALTÖLTÉSRE:

HENGEREK VONAL TÖLTÉS

$E = k\frac{Q}{r_1^2} + k\frac{Q}{r_2^2}$

$Q = C\cdot U$

$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{d^2}{r_1 r_2}\right)}$

$C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r_0}}$ HA $r_1 = r_2 = r_0$

VONALTÖLTÉSNÉL $C = 0$, U megadásának nincs értelme: Q-t megadjuk

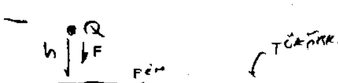
– VONALTÖLTÉSNÉL (végtelen) ρ adott: ezzel számolunk

$E = k\frac{\rho}{r}$

$\varphi = k\rho\ln\frac{1}{r}$

$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

–



$F = k\frac{Q\cdot Q}{(2h)^2}$

– 2 vezeték darab. Hatékony töltés:

$Q = C\cdot U$

$C = C'\cdot l$

$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{r_0}}$

!!!

FELADATOK

EZEK LEHET ROSSZAK

– E_{max} adott. U_{max}?

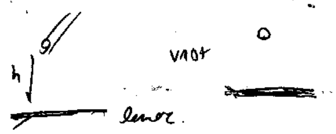
HENGERES: (KOAX)

$E_{MAX} = E(r_1) \Rightarrow Q$

$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon r}\,dr$

$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon}(\ln r_2 - \ln r_1)$

– MAX TÉRERŐSSÉG (TÜKRÖZÉS)



$E_{Max} = E(r_0)$

$E = k\frac{Q}{r_0^2} + k\frac{Q}{(2h - r_0)^2}$ $\quad E = k\frac{Q}{r_0^2} + k\frac{Q}{(2h-r_0)^2}$

$Q = C\cdot U$

$C = \frac{1}{k\ln\frac{2h}{r_0}}$

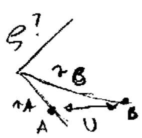
– TÖLTÉSSŰRŰSÉG; (ρ)

Egységnyi (V, A, l) töltése.

$\boxed{\rho = E\varepsilon_0 \qquad Q = \rho\cdot A}$

– ha a minta végtelen (l, A) akkor Q helyett ρ VAN!

–



ha $\varphi_B = 0 \rightarrow U_{AB} = \varphi_A$

$\varphi = kQ\ln\frac{1}{r}$

$U_{AB} = kQ\left(\ln\frac{1}{r_A} - \ln\frac{1}{r_B}\right)$

$\hookrightarrow Q = \rho$

– energiasűrűség:

$e = \frac{W}{V}$

– GÖMBKAPACITÁS:

$C = 4\pi\varepsilon r$

gerjesztési törvény

$\Sigma I = \oint H\,dl$

H nem függ l-től:

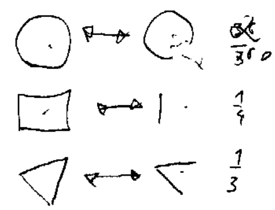
$\Sigma I = H\int 1\,dl = H\cdot l$

$I = H\cdot l$ → l-zárt görbe

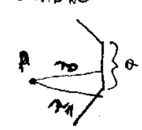
$\int_A^B H\,dl = I\cdot\frac{l_{számít}}{l_{összes}}$

csak ha úgy daraboljuk az l-et, hogy szimmetrikus a görbe, és több ilyen közül kihagyunk néhányat

pl:



– SZABÁLYOS IDOMBAN



$H_{(r)} = n\cdot\frac{1}{2\pi r_0}\frac{r_A}{r_0}$

– LÉGRÉSES VASMAG!

$B = áll = \mu_0\mu_r\frac{NI}{l}$

$NI = H_v l_1 + H_e l_0$

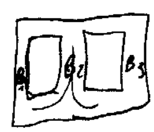
$\approx \frac{B}{\mu_0\mu_r}l_1 + \frac{B}{\mu_0}l_0$

ENERGIASŰRŰSÉG

$W_{e_v} = \frac{1}{2}\mu H^2 = BH^2$ (VAS) $\quad \mu = \mu_0\mu_r$

$W_{e_l} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$

LÉGRÉSBEN H NAGYOBB, Ψ ÉLL B ÁLL, MINDKETTŐ LÉGRÉS ÉS VAS



$B_1 = B_2 = B_3$
(ÉS ha elhanyagoljuk)
HA $A_2 = A_1 + A_3$
AKKOR $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3$

– KÖLCSÖNÖS INDUKTIVITÁS

$M = L_{12} = \mu\frac{N_1 N_2 A_2\sin\alpha}{l_1}$

$L = M = \frac{U_i}{dI/dt} = \frac{\frac{dB}{dt}A}{\frac{dI}{dt}}$

L_1 terében van L_2

– TÉRBELI ÁRAM

$$\boxed{\begin{aligned}\text{GÖMB: } A &= 4\pi r^2 \\ V &= \frac{4 r^3 \pi}{3}\end{aligned}}$$

PONTÁRAMFORRÁS (I)
KÖZEG VEZETŐKÉPESSÉG: σ
$E(r) = ?$

$$E \cdot \sigma = J = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2}$$

gömb felület.

$$\Downarrow \quad r(E, \sigma, I)$$

pl. GÖMBFORRÁS.
HOL VAN: E a megadott?

$$A = \frac{I}{E\sigma} \Rightarrow 4\pi r^2 = \frac{I}{E\sigma}$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{4\pi E \sigma}}$$

– HA VAN (SZIGETELŐ) KÖZEGHATÁR

$\varepsilon = 0$, $\sigma \neq 0$

FÉM

$$J_{(P)} = \frac{I}{4\pi r_1^2} + \frac{I}{4\pi r_2^2}$$

közel

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h}\right)$$

földelés

(ha nem fémben, hanem a közepén ... áll:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma r_0}$$)

– ELEKTROSZTATIKA – ÁRAMOK ANALÓGIA:

ELEKTROSZT.	ÁRAMOK
Q	I
$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$	$J = \frac{I}{A} = \frac{\sigma}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$
TÜKRÖZÉSSEL	
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$	$J = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$
Egyesek:	$E = k\frac{Q}{r} = k \cdot \frac{CU}{\varepsilon}$

kábel (l hosszú) ellenállása:

$$J = \sigma E = \frac{I}{A}$$

pl. $I = 1A$, U kiszámol, majd $R = \frac{U}{I}$ $\quad C = C'l$

$$\sigma E = \sigma k \frac{Q}{r} = \sigma k \frac{C \cdot U}{r_1}$$

$$\frac{I}{A} \quad I \text{ adott}, \; A \text{ ... (GEOM.)}$$

$$J = J \Rightarrow U(\dots)$$

$$R = \frac{U}{I}$$

• MÁS: UGYANÚGY, CSAK C MÁS LOCKER!

$$\sigma E = \sigma k \frac{CU}{r_0} \qquad C = C'\Delta l$$

$$\frac{I}{A} = \frac{I}{A_{GEOM}} \qquad = \frac{\pi \varepsilon l}{\ln \frac{d}{r_0}}$$

$$\Downarrow U$$

– BEHATOLÁSI MÉLYSÉG:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

– VEZETÉK ELLENÁLLÁSA

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$A = 2\pi r_0 \delta \qquad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

a minél nagyobb, annál közelebb a behatolási mélység a ...

– VEZETŐ: (NAGYFREKI) (ÁRAMKISZORÍTÁS)

$$J_e \ll J_{vez}$$

$$\sigma E \qquad \frac{\partial D}{\partial t} = j\omega D \quad \text{ha szinuszos.}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \frac{2}{\delta}$$

$$Z_0 = \frac{(1+j)}{\sigma\delta}$$

$$R = R'l = j\omega L' l$$

HASÁB

$$R' = \rho \frac{l}{b\delta} \qquad b > a$$

HENGER

$$R' = \rho \frac{l}{2\pi r_0 \delta}$$

– MAXWELL – EGYENLETEK

I. $\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ — örvényes m.m. erőss.

II. $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ — örvényes e. mező erőss. $\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$

III. $\operatorname{div} B = 0$ — B forrásmentes

IV. $\operatorname{div} D = \rho$ — D a ρ-tól függ csak, ...

V. $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$

VI. $w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ — EM. MEZŐ

II-hez:

$$\operatorname{rot} E \cdot A = U_i$$

I-hez:

általában ha $J = 0$: (pl. SUGÁRZÁSI ÁRAM)

$$\operatorname{rot} H \cdot A = \oint H \, dl = \Sigma I$$

gerjesztési törvény

– ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta_{TEN} = Z_i$$

HATÁRFELÜLETEK:

$$D = \varepsilon E = \text{áll} \qquad B = \mu H = \text{áll}$$

reflexiós tényező: TÁPVEZETÉK MODELLEL!

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$E(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}$$

$$H(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} + \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

felületen kilépés olyan, mint a ... ampl. változik

$$E_2 = E_1 (1 + r_2) \qquad \begin{pmatrix} E_{max} = E_+ \\ = E_i \end{pmatrix}$$

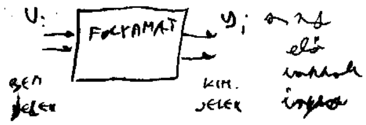
$$H_2 = \frac{E_2}{Z_2}$$

$$\boxed{\text{EZEK LEHET ROSSZAK!!!}}$$

11. fejezet

Szabályozástechnika

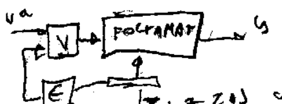
IRÁNYÍTÁS



statikus és dinamikus tulajdonságok, stb.

U_i ... MÓDOSÍTOTT JELLEMZŐ

– VEZÉRLÉS



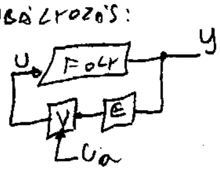
– zaj csak észt (esetleg) mérjük

A zaj miatt y nem lesz annyi, amennyit akarunk

ha $Z=0$ y stabil $y=f(U_a)$

NINCS VISSZACSATOLÁS, NYÍLT HATÁSLÁNC

– SZABÁLYOZÁS:

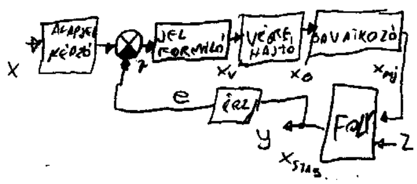


hatáslánc zárt.

– IRÁNYÍTÁS RÉSZEI
- ÉRZÉKELÉS
- ÍTÉLETALKOTÁS
- RENDELKEZÉS
- JELFORMÁLÁS
- BEAVATKOZÁS

– Tervezés:
célkitűzése, analízis, érzékelők választása, adatgyűjtés, matematikai modell (IDENTIFIKÁLÓ) algoritmus, megvalósítás, tesztelés, (módosítás)

– SZABÁLYOZÁS ÁBRÁZOLÁSA
- SZERKEZETI VÁZLAT: tükrözi a alkatrészek megfelelését.
- HATÁSVÁZLAT

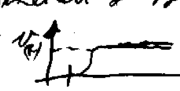


elemei:
szervek, szabályozott szakasz,

jelek, jellemzők (FOLY. KÖZENTŐKEL ZAJ, X_{mj}, X_{sz})

– SZABÁLYOZÓK osztályozása
- LEÍRHATÓSÁG
  - LINEÁRIS – AUTONÓM (ÁLL. E.)
    - VÁLTOZÓ
    - FOKOZHATÓS
  - NEM LIN. (VAN BENNE NL elem)
- ALAPJEL SZERINT
  - ÉRTÉKTARTÓ x_a = áll
  - KÖVETŐ $x_{sz} = f(x_a)$
- TAGOK JELÁTVITELE
  - FOLYTONOS
  - NEM LINEÁRIS
- JELEK IDŐBELI LEFOLYÁSA
  - FOLYTONOS I.
  - DI
- JEL INFO TARTALMA
  - ANALÓG
  - DIGITÁLIS
- SEGÉDENERGIA
  - VILLAMOS
  - PNEUMATIKUS
  - HIDRAULIKUS
- FELNYITOTT kör alapján
  - ÖNBEÁLLÓ ha e = áll jel x_{sz} beáll 1 értékre. n (rendelkezőjel, hibajel) $\neq 0$
  - INTEGRÁLÓ $n \neq 0$ egyensúlyban

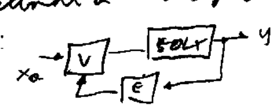
– Tervezés célja:
az átmeneti függvény ilyen



legyen.

(a – kezdeti feltétel)

– ÁLLAPOTEGYENLET RENDSZERT kell felírni a szabályozási körre:



állapotváltozók kellenek. olyan, amikkel a deriváltjai is megadhatóak egyenletekkel. felírjuk az egyenleteket

$\underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{b}\,\underline{\underline{v}}$ alakra hozzuk (kanonikus egyenletek)

és $y(t) = \underline{C}^T\underline{x} + \underline{D}^T\underline{v} = y_t + y_p$

–(ETI) SZABÁLYOZÁS MINDEN, AMINEK a kimenete időben állandósul (v(t))

– ÁLLAPOTEGYENLET TÖBBFÉLEKÉPPEN FELÍRHATÓ
- GYÖKTÉNYEZŐS ALAK

$$W = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

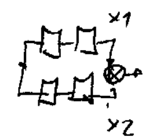
- IDŐÁLLANDÓS ALAK

$$W = \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad \frac{A}{1+Ts}$$

IDŐÁLL.

- KANONIKUS ALAK

$$W = \sum a \cdot \frac{1}{s+p}$$

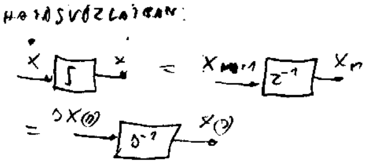


ortonormált.

– EZEK KÖZÖTTI ÁTJÁRÁS: HASONLÓSÁGI TRAFÓ

$\dot{x}$

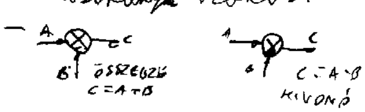
HATÁSVÁZLATBAN:



ELŐLRŐL (1H)

– Ha 1 rendszert valami kimozdítja az egyensúlyból, akkor a tranziens mozgás utána visszaáll. ezt DIFF. egyenletek írják le.

– HATÁSVÁZLAT: (BLOCK DIAGRAM)
elemei: jelfolyamok „dobozok" elemei a TAG.
– a -ok a hatásirányt mutatják
hatáslánc: ezen tagok összege, amikben a jelek hatásiránya azonos.



– BATÁSLÁNC:
- NYÍLT – vezérlés
- ZÁRT – szabályozás
  - AUTOM.
  - KÉZI

lehűlésre teheti a folyamatokat.

– ZAVARKOMPENZÁCIÓ:
kiegyenlítik zavaró jeleket mérjük, és kompenzáljuk a hatásukat. (az oszcilláció heavyoldalas)

– az elemek 1 adott kész reagál a hatásokra: tárolók hatás.
Ennek a tartalmát csak véges idő alatt (≠0) lehet befolyásolni.
A kimenete a korábbi eseményektől függ.
A tárolók tartalma rendszerint jellemzi a rendszer állapotát.

– ÁLLAPOTVÁLTOZÓ:
tárolóelemek számával megegyező számú ilyen van.

– tároló = integrátor
ennek a kimenete az állapotváltozó.

– MELEGEDÉSI FOLYAMAT:
2 test van. 1-ik a másikban
$\underline{x} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ $\underline{u} = \begin{bmatrix} P_{be1} \\ P_{be2} \end{bmatrix}$ $\boxed{\circlearrowleft^2}$

Mindkét testet fűtjük.
$\underline{x}(t) = ?$ x_0 adott $x_0 = \begin{bmatrix} T_{1szoba} \\ T_{2szoba} \end{bmatrix}$

$t = \infty$-ben: (stacioner állapot)
P_1 a kisebb testbe áramlik, onnan $P_1 + P_2$ a szobába.
(Átadott áramlás hő a felülettel, (f) hőátadási tényezővel (h), ΔT különbség)

$$\dot{T}_1 = -\frac{h_1 f_1}{c_1 m_1} T_1 + \frac{h_1 f_1}{c_1 m_1} T_2 + \frac{P_1}{c_1 m_1}$$
$$\dot{T}_2 = \frac{h_1 f_1}{c_2 m_2} T_1 - \frac{h_1 f_1 f_2}{c_2 m_2} T_2 + \frac{P_2 + h_2 f_2 T_0}{c_2 m_2}$$

másképp:
$$\dot{T}_1 = \frac{h_1 f_1}{c_1 m_1}(-T_1 + T_2) + \frac{P_1}{c_1 m_1}$$
$$\dot{T}_2 = \frac{h_1 f_1}{c_2 m_2}(T_1 - \varepsilon_2 T_2) + \frac{P_2 h_2 f_2 T_0}{c_2 m_2}$$

– bemenő jelek:
$\underline{U}$ az alapjel, és zavarjelek

– SISO egy bemenet, 1 kimenet

– FREKVENCIATARTOMÁNYBAN:
állapotegyenlet LAPLACE transzformáltja
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

$s\,X(s) = A\,X(s) + B\,U(s) + x(0)$
$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$

a kezdeti érték SPECIÁLIS bemenő jel.

– az állapotváltozók KOORDINÁTÁK az ÁLLAPOTTÉRBEN. végpontja $\underline{X}(t)$ $X(t)$ által leírt görbe az ÁLLAPOTTRAJEKTÓRIA

– DUÁLIS ALAKZAT
minden jel hatásirányát megfordítjuk
(ekkor y és u is felcserélődik)
új rendszermátrixok
$A \to A^T$ $B \to C^T$ $C \to B^T$ $D \to D^T$

– $\underline{X}(t) = x_f(t) + x_g$
x_f: MAGÁRA HAGYOTT RENDSZER MOZGÁSA, csak x_0-tól függ.
$x_g = x_0 + BU$: gerjesztett rendszer mozgása (KONVOLÚCIÓS INTEGRÁL)

– SISO rendszerben: DIFF.E. → $W(s)$
$\dot{x} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}u$ | $y = \underline{c}^T\underline{x} + Du$
$s\,\underline{X}(s) = \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,U(s)$ | $Y(s) = \underline{C}\,\underline{X}(s) + D\,U(s)$
$X(s) = \dfrac{B\,U(s)}{s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}}$ $\quad Y(s) = \left(\dfrac{CB}{sE - A} + D\right)U(s)$

$$W(s) = \frac{CB}{s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}} + D = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

– az átviteli függvényből kiszámíthatók az eredeti rendszer lényeges pólusai.
rendsz: pól = sajátérték:
$\det\left[A - \lambda \underline{\underline{E}}\right] = 0 \to \lambda_i$
PÓLUSOK:
$s = \mathrm{roots}(N)$
ahol $N = \mathrm{poly}(A)$

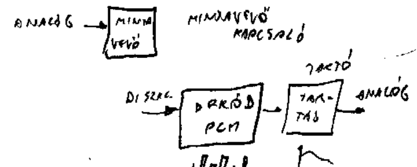
– ÁTVITELI F. MATLABBAL R.E.-BŐL:
$[M, N] = \mathrm{SS2TF}(A, B, C, D, iu)$
$W(s) = \dfrac{M(s)}{N(s)}$ $\quad iu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ahol i helyen van 1, a többi 0. i bemenetre vizsgáljuk a $W(s)$-t.
SISO-nál $iu = 1$
SS2TF → POLINOM / POLINOM
SS2ZP → tényezős alak
RESIDUE → résztörtekre
} alakja leírás.

– RENDSZER
- STABILIS – ha kimozdított-juk nyugalmi az eredeti helyzet KÖRNYEZETÉBE
- LABILIS – NEM

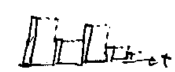
– RENDSZER ÁLLAPOTA
- STACIONÁRIUS $X(t) = $ áll, ha $t > T_x$
- KVÁZISTACIONÁRIUS: $X(t)$ periodikus az egyensúly körül
- gerjesztett: tranziensnél vizsgálom a stacionerre.

– rendszervizsgálat $Y(t)$, $W(t)$
IMPULSE (A, B, C, D) → $W(t)$
STEP (A, B, C, D) → $V(t)$
lehet IMPULSE (M, N) is!
STEP (M, N)

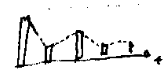
– MINTAVÉTELEZÉS:



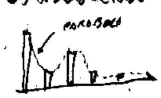
TARTÁS:
- ZÉRUSRENDŰ:



- ELSŐRENDŰ



- MÁSODRENDŰ



– LAPLACE TRAFÓ:
$X(t+T) \to X(s) \cdot e^{-sT}$
$X(t)$ T-szerint periodikus:
$\mathcal{L}\quad \dfrac{X(s)}{1 - e^{-sT}}$
$X(t)\,e^{at} \to X(s+a)$
alap:
$1 \to 1/s$ $\quad t \to 1/s^2$
$e^{-at} \to \dfrac{1}{s+a}$ $\quad \cos\omega t \to \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

– véges jelű rendszerhez át kell térni 1 jelű jelre a vizsgálathoz.
tervezéskor direkt a célra analízis → folytonos
– F.I. → D.I. áttérés
állapotegyenlet ezeken: $s \to z$

— ÖSSZEKAPCSOLT RENDSZEREK

ÁLLAPOTEGYENLETE

új paraméterekkel az eredeti összetevőkből.

• SOROSAN:

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}$ $C = [D_2 C_1 \; C_2]$

$D = D_1 D_2$

MATLABBÓL

SERIES → SOROSAN

PARALLEL → PÁRHUZAMOSAN

FEEDBACK → 1 IKA MÁSIK VISSZACSATOLÁSA

— ÁLLAPOT TRAFÓ:

új állapotváltozókat vezetünk fel, (nem csak az állapotok kiszerelei) amik az eredetiek lineáris kombinációi

X_r - új $\underline{X}$ - eredeti á.v.

$X_r = P^{-1} X$

(az KOORDINÁTA-TRANSZFORM)

P-transzformációs mátrix

Ekkor

$A \to P^{-1} A P$ $B \to P^{-1} B$

$C \to C P$ $D \to D$

denév

EZ HASONLÓSÁGI TRAFÓ

MATLABBAL

SS2SS utasítással

— KANONIKUS TRAFÓ

olyan állapottrafó, ahol

$P = (\underline{S}_1 \,|\, S_2 \,|\, S_3 \dots)$

amik $\underline{A}$ sajátvektorai.

$\det[\underline{A} - \lambda \underline{E}] = 0 \to \lambda_i$

$\underline{A}\, \underline{S_i} = \lambda_i S_i \to S_i$

így az új A mátrix:

$\underline{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ (DIAGONÁLIS LESZ)

MATLAB:

$\mathrm{EIG}(A)$ → amik a sajátvektorok → új $\underline{A}$ mátrixélével

CANON(A,B,C,D)

a paraméterekkel átalakítást transzformálja.

— $W(s) \to$ ÁLL. EGY. $\left(W = \frac{M(s)}{N(s)}\right)$

csak akkor ha minden pólus felsel van $W(s)$-ben.

• $W(s) \to U(s)$ (rendszeregy.)

$Y(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} U(s)$

~~elrejtem~~

$Y(s)\, N(s) = M(s)\, U(s)$

elrejteni, majd $Y(s) = f(Y(s), U(s))$ rendezni.

• átalakítani:

csak s^{-1} szorzat legyenek (kiemelés, közös nevező, szorzatok)

• a legnagyobb tagra (ha n db pólus volt → n db állapotváltozó lesz)

$\dot{X}_n$ = legkülsőbb tag eggyel külsőbb

$\dot{X}_{n-1}$ = eggyel külsőbb (legbelső) X_n

így tovább

X_1 - ig

• $X_n = Y$ lesz mindig

EZ A MEGFIGYELHETŐSÉGI ALAK

MATLABBÓL

EF2SS - nagyi

— IRÁNYÍTHATÓSÁG

• RENDSZER ÁLLAPOTIRÁNYÍTHATÓ: ha $\underline{X}(t)$ megfelelő $U(t)$-vel tetszőleges állapotba vihető át.

• KIMENETI IRÁNYÍTHATÓ: ha csak $Y(t)$ vihető át bárhova meg. $U(t)$-vel.

• x_i irányítható, ha

$\dot{x}_i = \dots$ -ben szerepel U

VAGY: szerepel benne X_j, aminek az egyenletében van U

MÁSKÉPP: (ÁLLAPOT. I.)

Ha a kanonikus alakban az egyes állapotváltozókhoz tartozó pólusok különbözőek.

VAGY HA A Z IRÁNYÍTHATÓSÁGI

$C_o = [B \,|\, AB \,|\, \dots \,|\, A^{n-1}B]$

MÁTRIX rangja $= n$, tehát $A^i B$ vektorok lineárisan függetlenek EZ A KALMAN FÉLE KRITÉRIUM. $(\det C_o \neq 0)$

MATLABBÓL

$C_o = \mathrm{CTRB}(\;)$

— MEGFIGYELHETŐSÉG

MEGF. A RENDSZER, HA $Y(t)$, $U(t)$ figyelése véges időintervallumban meghatározhatóvá teszi X_o-t.

KRITÉRIUMOK:

• Y függjön x_i-től

• rendszer pólusai különbözőek legyenek.

VAGY HA

$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ MEGFIGYELHETŐSÉGI MÁTRIX rangja n

(duális rendszer IRÁNYÍTHATÓSÁGI MÁTRIXÁNAK a transzponáltja)

- rendszer KALMAN féle dekompozíciója:

4 db alrendszer PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSÁRA:

X_i	IRÁNYÍTHATÓ	MEGFIGY.
JELLEMZŐ	0	0
	0	1
	1	0
	1	1

— ÁLTALÁNOSÍTOTT RENDSZER

ott a bemenet jel helyettesít-hető $U(t) \to \boxed{\text{GEREDETI}} \to Y_i$ - BEL:

$\delta(t) \to \boxed{\mathcal{L}\{U(t)\}} \to \boxed{\text{EREDETI RENDSZ.}} \to Y$

ott $\mathcal{L}\{U(t)\} \to W(s)$ - ket kell követni

(HOMOGENIZÁLT RENDSZER)

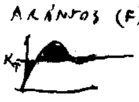
— HOLTIDŐS KÉSLELTETÉS

$Y(t) = U(t - T_h)$ $\quad W(s) = e^{-sT_h}$

az nem ha ilyen van.

ARÁNYOS IDŐKÉSÉSES TAG KÉSLELTETŐ HATÁSA:

LINEÁRIS SZABÁLYOZÁSI TERÜLET ÉVRE ARÁNYOS (F) $\quad U(t) = K_T \epsilon(t)$



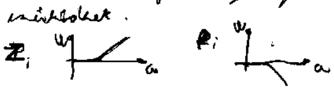
$F = \int_0^\infty V(t) - K \; dt$

ebből $T = \frac{F}{K_T}$

- MŰLÓZATOK ÖSSZEKAPCSOLÁSA:
  - SOROS: $W = W_1 \cdot W_2$
  - PÁRH.: $W = W_1 + W_2$
  - VISSZACSAT.: $W = \dfrac{W_1}{1 \pm W_1 W_2}$ — POZ/NEG VISSZACSAT.

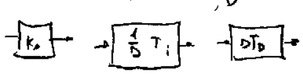
- NYQUIST DIAGRAM.
Minden ω-ra $W_{(j\omega)}$ komplex szám. Ezeket hozzárendeljük az ábrába Re, Im tengely.
MINIMUMFÁZISÚ, HA: $T_i > 0$, $T_i = -\frac{1}{p_i}$
pólusok és zérusok egymás konjugáltjai.
ÁBRÁZ.:
NYQUIST (M,N)
NYQUIST (A,B,C,D)

$W_{(s)}$ ilyen IDŐÁLLANDÓS ALAKRA HOZHATÓ:
$$\frac{(1+sT_3)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad \boxed{(z_i, p_i) = -f_i = -\frac{1}{T_i}}$$
$f_i = \frac{1}{T_i}$ - töréspont frekvenciák.
a nevezőben lévők ~~pólus~~ ($z_i - p_i$) a számlálóban lévők alapján ~~[illegible]~~ határfrekv. jellegűek működnek.

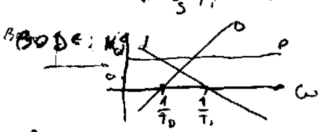


BODE(M,N) ábrázolja

- IDEÁLIS ALAPTAGOK
P, I, D



$W = K$ $\quad W = \frac{1}{s} T_i$ $\quad W = sT_D$

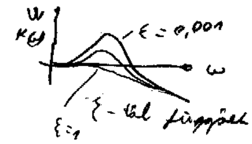


$\varphi(\omega)$-ra:
- P: 0°
- I: −90°
- D: +90°

- EGYTÁROLÓS ARÁNYOS TAG: $W(s) = \frac{1}{1+sT}$ (ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐ)
- KÉTTÁROLÓS ARÁNYOS TAG: $W(s) = \frac{1}{1+2\xi T_0 s + s^2 T_0^2}$

ez a SÁVSZŰRŐ (nem tő-n $W=1$)

$T_0 = \frac{1}{\omega_0}$



ha $\xi < 1$ akkor igazán SÁVSZŰRŐ
$\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ SAJÁTFREKV.
$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ VH lengési frekvencia (λ_i)
ω_r rezonanciafrekv. $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$
ω_c VÁGÁSI FREKVENCIA: $K(\omega) = 1$ lesz ott
~~$\omega_c = \omega_0\sqrt{2}\,1-2\xi^2$~~
$\omega_c = \sqrt{2}\,\omega_r$

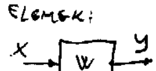
STABILITÁS:
- RENDSZER STABILIS, HA egyensúlyból kitérítve képes visszaállni. RENDSZER ÁLLAPOTÁNAK A JELLEMZŐJE.
  - MAGÁRA HAGYOTT RENDSZERÉ: nyugalmi állapotba vissza kell térni. $\int_0^\infty x(t) = 0$
  - GERJESZTETT RENDSZERÉ: kiindulási helyzetbe tér vissza. ASSZIMPTOTIKUS STABIL. HA $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $\mathrm{Re}\,p_i < 0$
- NYQUIST KRITÉRIUM: felnyitott kör $W_{(j\omega)}$-jával következtetés a ZÁRT KÖR STABILITÁSÁRA. STABILIS HA:
  - EGYSZERŰSÍTETT NQ KRIT.: ha a NQ DIAGRAM NEM VESZI KÖRÜL A (−1,0) PONTOT. HA $\lambda_i = p_i < 0$ ASSZIMPT. ÁLTALÁNOS: HA ~~[illegible]~~ NEM FELNYITOTT... annyiszor fogja körül a (−1,0) PONTOT, AHÁNY JOBB OLDALI(+) PÓLUSA VAN $W_{(j\omega)}$-nak.
- MÁSKÉPP ($-180° < \varphi < 180°$ lehet!!) A NQ DIAGRAM AHOL BELÉP AZ egységsugarú körbe, az ω_c VÁGÁSI KÖRFREKV. ~~ott~~ φ_c meg van $\varphi_c + 180° = \varphi_t$ FÁZISTARTALÉK

STABILIS, HA NQ OTT METSZI AZ EGYSÉGKÖRT, AHOL $\varphi_t > 0$, tehát $\varphi_c > -180°$ tehát az ALSÓ FÉLSÍKON LÉP BE A NQ ⊙ BELSE
- BODE KRITÉRIUM (az előző alapján) STAB, HA $K_{(\omega)}$ ott metszi az tengelyt ahol $\varphi(\omega) > 180°$ $\varphi_t > 0$
- STABILITÁSI TARTALÉK: (stab. határesethez képest)
ST. T. — K TART. / — φ TART.

K-TART.: ERŐSÍTÉSI TARTALÉK hányszorosára lehet megnövelni a felnyitott kör erősítését ahhoz, hogy ω_c $\varphi_c = -180°$-nál legyen. (STAB. HATÁRESETE)
φ-TART.: FÁZISTÖBBLET

MATLABBAL
MARGIN()
→ K-TART
→ ω_c ahol $\varphi_{tar} = 0$ le[illegible]

SZABÁLYOZÁSI KÖRÖK FELVÉTELE
- ELEMEK:



$W = \frac{y(s)}{x(s)}$

frekvenciatartományban kell analizálni.
- a frekvencia itt ~~[illegible]~~ általában nem tényleges frekvencia, hanem mennyiségváltozási sebesség. Így: $W(s) = \dfrac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t} = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
VAGY akár többet mond: $W(s) = \dfrac{\frac{\Delta y/y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x/x}{\Delta t}} = \dfrac{\Delta y \cdot x}{\Delta x \cdot y}$
- $\Delta x, \Delta x$ lehet feszültség, fázis, koncentráció, frekvencia, BÁRMI!!

STABILYZOZÓ TERVEZÉS

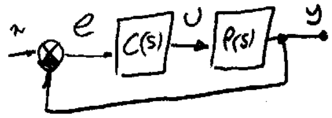
Ⓐ PÓLUSKIEJTÉS:

$$Q_1(s) = \frac{1}{P(s)} \cdot Q(s)$$

Q OLYAN, HOGY a ~~[illegible]~~ a szerkezeti ... legnagyobb folyamat ... mint a szabályzó.

$Q(s)$ -IDŐÁLLANDÓI: (ez kisebb)

$T \approx$



TÍPUS
- ARÁNYOS TAG – P
- GYORSASÁG → D
- MEG KICSI LEGYEN → I
- PÓLUSKIEJT. IDEÁLIS.

$$W_{zárt} = \frac{W_0}{1+W_0}$$

$$W_0 = C(s) \cdot P(s)$$

HIBÁK:
STATIKUS HIBA:

$$h_s = \frac{1}{1+K} \quad \text{(P-TIP)}$$

$$t_{beáll} \approx \frac{2\pi}{\omega_c} \approx T_{domin}$$

h_T - TÚLLENDÜLÉS

$$z, p = -\omega = -\frac{1}{\tau} \quad \text{HA } s = j\omega$$

$$z, p = -f = \frac{1}{T} \quad \text{HA } s = jf$$

VAGY:

DE $W_1 \neq W_2$

$$\frac{1}{s-p_i} \qquad \frac{1}{1+sT_i}$$

de $\frac{1}{s-p_i} = M \cdot \frac{1}{1+sT_i}$

$\varphi_T = 60°$, AKKOR
$h_T \approx 10\% \pm 5\%$

$\varphi_T \to \varphi(\omega) = \varphi_T - 180°$

$\varphi_T > 0$ AKKOR STABILIS

STRUKTURÁLISAN STABILIS:
Ha K tetszőlegesen stabilis.
VAGY A GYÖKHELYGÖRBE:
$p_i(k) < 0$
(KICSIT MOTLABBAL)
STABILIS, HA:

$$Re\{p_i\} \leq 0$$

Ⓑ P – ARÁNYOS SZABÁLYZÓ

$$C(s) = K$$

BEÁLLÁSI HIBA: $h_s = \varphi_0 \cdot \frac{1}{1+K}$

TERVEZÉS MENETE:
- KÉPLET (MÓDSZER) VÁLASZTÁS,
- PARAMÉTERVÁLASZTÁS. φ_T-VÁLASZTÁS
- ELLENŐRZÉS:
  - $K=1 \to W_0'$
  - $W_0(\omega)$ ÁBRÁZOLNI.
  - MILYEN ω-NÁL LESZ: $\varphi(\omega) = \varphi_T - 180°$, EZ AZ $\omega \to \omega_c$
  - $K = ?$ $A(\omega_c, K=1) = \frac{1}{K} \to K$

$$W_0 = K \cdot W_0'$$

- HA NEM JÓ PARAMÉTER VÁLTOZTATÁS, HOGY JÓ LEGYEN.
- MITŐL NEM JÓ: GYORSÍTÁS: ω → NÖV.
  $t_{beáll}$ TÚL NAGY, h_s NAGY → K-NÖV.
  h_T NAGY → T_i NÖV (K NÖV) T_D CSÖKK.
- DIGIT (HIBRID)
  HOLTIDŐ LESZ T_S MIATT.

Ⓒ PI – SZABÁLYZÓ

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = K\,\frac{sT_i+1}{sT_i}$$

(MINDIG ILYEN ALAKÚ)

$T_i \approx$ a folyamat legnagyobb időállandója

Ⓓ PID

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1+sT}\right)$$

$$= K\left(\frac{sT_i+1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1+sT}\right)$$

$T_i \approx$ FOLYAMAT LEGNAGYOBB IDŐÁLLANDÓJA

$T_D \approx$ F. 2. LEGN. ID.ÁLL.

$$T_i > T_D \gg T$$

Ⓔ PIPD (PI · PD)

$$C(s) = K\left[\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) \cdot \frac{1+sT_D}{1+sT}\right]$$

$$= K \cdot \frac{1+sT_i}{sT_i} \cdot \frac{1+sT_D}{1+sT}$$

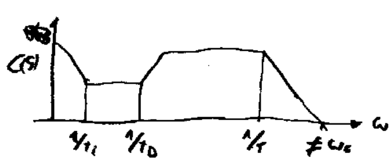
Ⓕ MINTAVÉTELESEN BÁRMELYIK CSAK: (HIBRID, DDC)

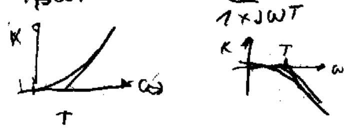
$$T_S \ll T$$

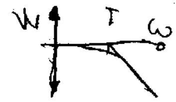
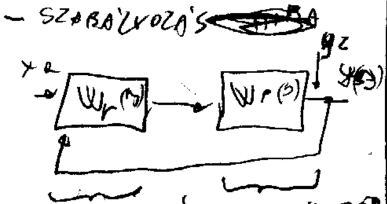
$$\boxed{T_S \underset{20}{\ll} T \underset{10}{\ll} T_D < T_i}$$

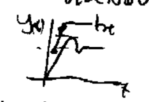
HIBÁT OKOZ A MINTAVÉTEL:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_c}{\pi} T_S$$



- NYQUIST DIAGRAM
: komplex amplitúdó az ω függvényében. annak az értékkörlete.
$W_0(j\omega)$ ábrázolása.
$K(\omega)=1$ kenensó felvezadott vonal.
Az amplitúdó és fázis is fel van tüntetve!
- Elmondás: (POLINOM ALAKBÓL)
• Ha a számláló polinom-rendje kisebb, mint a nevezőé, akkor a $\omega=\infty$ az origóba kerül.
• arányos tagnál $\omega=0$ vektor a valós tengelyre esik
• MINIMFÁZISÚ rendszernél:
arányosan fordul 90°-ot a görbe ($\omega=0$ - tól $\omega=\infty$-ig) annyival több elsőfokú gyöktényező van W_0 nevezőjében, mint a számlálójában
- BODE (gyöktényezős alakból)
$K(\omega)=\sqrt{Re W^2+Im W^2}$
$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{Im W}{Re W}$
aszimptotákkal közelíthető (elsőfokú, nagyí ...)
integráló, nagy diff. tag (100 hatása) 1 szelet régió. 1≥20dB/dekád.
$1+j\omega T$ $\frac{1}{1+j\omega T}$

- ~~[illegible]~~ $K(\omega)$ és $\varphi(\omega)$
• Minimalfázisú rendszerben: minden $K(\omega)$-aszimptotához 1 állandó φ érték tartozik. (TÖRÉSPONTOK VANNAK)
• Nem minimalfázisú: van SARKPONT IS, ahol φ változik, itt változhat K meredeksége is.

- átviteli függvény 2 része
$\to\boxed{W_r(p)}\to\boxed{W_{sz}(p)}\to$
↑ visszafelé   Tehetetlenség
- alaptagok ($\mathcal{L}w$)
P arányos:
$\to\boxed{K_p}\to$
INTEGRÁLÓ (I)
$\to\boxed{\frac{1}{s T_i}}\to$
DIFF (D)
$\to\boxed{s T_D}\to$
- 1 tárolós tag
$\to\boxed{\frac{1}{1+sT}}\to$

- 2 tárolós tag
$\to\boxed{\frac{1}{1+2\xi T_0 s+s^2T_0^2}}\to$
- Zárt kör strukturálisan stabilis, ha a minimálfázisú felnyitott kör bármely paraméter + értékénél stabilis.
- feltételesen stabilis, ha a stabilitás paraméter-függő.
- SZABÁLYOZÁS

SZABÁLYOZÓ   SZABÁLYOZOTT SZAKASZ
- SZABÁLYOZÁS CÉLJA:
$y(s)$ a szabályozott jellemző megegyezzen az alapjellel. Ez csak a valóságban megközelíthető lehet.
Az eltérés $y_h(s)$ hibajel
HIBA: y_{hK} - követési, és y_{hz} - zaj miatti hiba
$y_{hK}=\frac{U_a(p)}{1+W_0(p)}$ $y_{hz}=-\frac{y_z(p)}{1+W_0(p)}$

- DINAMIKUS HIBA
tranziens
KVÁZISTACIONÁRIUS HIBA: a beállt érték eltérése a kívánttól (STATIKUS HIBA)
BEÁLLÁSI IDŐ (t_s)
Egységugrás alatt $y(t)$ annyira megközelíti a kívánt értéket, hogy Δ hibasávon belül lesz.
BEÁLLÁS: aperiodikus, vagy lengő.
→ TÚLLENDÜLÉS JELLEMZI

A stacionárius hiba akkor tűnik el, ha a bemenő jel pólusa W_0-nak is pólusa.

SZINTÉZIS
- struktúra, és paraméterek meghatározása.
- lehetséges lehet:
• AUTOMATIZÁLT: követelményeket egzakt matematikai formában kell megadni. (pl. zárt kör pólusai) → IDŐTARTOMÁNYBAN
• INTERAKTÍV: kritériumokat kell megadni. a választható megoldásokat a ráfordításokkal vetik össze. A követelmények nem elég egzaktak, vagy megalapozottak. PRÓBÁLGATÁS! FREKVENCIATARTOMÁNYBAN
- TERVEZÉS W alapján:
Célok: • STABILITÁS
• kvázistacionárius hiba minél kisebb
• tranziens időtartama minél kisebb
tranziens: instabil szakasz időállandói és holtidő lassítják.
Holtidő hatása nem küszöbölhető el.
Tehetetlenségi késleltetés nagyfokú nagy lassú jellel minimalizálható (amit technikai korlátai van)
Túllendülés a fázistöbblet-től függ. pl. 60° körül lehet a legjobb. (fáziséval kb.)
- A szabályozott szakasz W-jét kompenzálni jel-formálással adják +. Erre kell a KOMPENZÁLÓ szerv.
Ez a kompenzáló a W_p-nek egyes tényezőit és pólusait semlegesíti, és új zérus-

zajokat és pólusokat hoz be a felnyitott körbe.

y_h hibajelből állítják elő a beavatkozó jelet. $W_0 = W_s \cdot W_c$, $W_e = \frac{W_0}{1+W_0}$

- Beállási idő csökkentése = felnyitott kör vágási frekv. növelése ($\varphi_{\text{TARTALÉK}}$ NÖVELÉS)

- Lineáris szabályozási tenület (kimenő jelre)

- Statikus hiba a nyitott kör erősítésének növelésével csökkenthető.

Ez csak 1 hiz. határig jó (stabilitás). E felett csak a kisebb frekikon lehet növelni az erősítést → PI kompenzáció

$$W = k_p \frac{1+sT_1}{sT_1} \qquad T_1 = T_i \text{ integrálási idő}$$

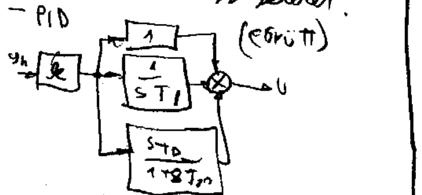
- Gyorsítás: vágási frekit úgy növelni, hogy a fázistöbblet változatlan marad.

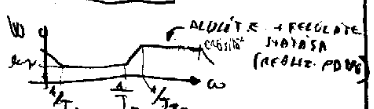
Ez a PD kompenzáció

$$W = k_p \frac{1+sT_2}{1+sT_{2a}} \qquad T_2 = T_{2a} + T_D \text{ DIFF.}$$

Realizálható PD tag: aluláteresztő szűrőt kell a DIFF. tag elé, hogy elkerüljük a ∞ nagy jeleket.

- PID (EGYÜTT)





- HOLTIDŐ

$$W = e^{-sT_h} \cdot W_{\text{EGYÉB}},$$

holtidős tagot késleltető tagokkal kell közelíteni.

A felnyitott kör vágási frekvenciája nem növelhető $\omega_h/2$ fölé $\omega_h = 1/T_h$

- ha a felnyitott kör: $k W_0$ - akkor a zárt kör: $W_e = \frac{k W_0}{1+k W_0}$

- STABILIS / LABILIS folyamat

Ha a kompenzálandó szakasz valamely pólusát eltüntetni, akkor a megfelelő állandót nem megfigyelhetővé, vagy nem irányíthatóvá teszi.

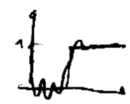
STABILITÁS: a bal félsíkon kell lennie az összes pólusnak. (a nem MF, ill. irányítható is)

- HOLTIDŐS TAG KÖZELÍTÉSE
- SZELEJEL

$$e^{-sT_h} \approx \frac{1}{\left(1+\frac{T_h}{n}s\right)^n}$$

- PADE

$$e^{-sT} \approx \frac{\prod^n (s-s_i)}{\prod^n (s+s_i)}$$



- FOLYTONOS – DISZKRÉT

PI $\quad W = k_p \frac{z-z_1}{z-1} = \frac{z-e^{-T_s/T_1}}{z-1}$

PD $\quad W = k_p \frac{z-z_2}{z-z_{2a}} = k_p \frac{z-e^{-T_s/T_2}}{z-e^{-T_s/T_{2a}}}$

- mintavételezés: $T_2 \to T_s/2$ lesz T_2/T_s túlmeréséssel

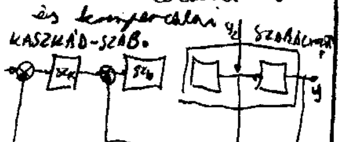
- DISZKR. $W \to W_{\text{DIS}} = W_0 \cdot e^{-s\frac{T_s}{2}}$

- DIR tervezés: kell a: szabályozott folyamat W_p és T_s mintavételi idő.

- ZAVARKOMPENZÁCIÓ

A többi zavarjelet a hatásuk kifejtése előtt érzékelni kell. És kompenzálni.

KASZKÁD-SZAB.



* tényleges szabályozás független lesz y_2-től

ÁTVITELI FÜGGVÉNYEK

z_i vagy $p_i = -f_i = -\frac{1}{T_i}$

TÖRÉSPONTI FREQ, IDŐÁLLANDÓ

HA $s = jf$ DE HA $s = j\omega$ AKKOR $p_i = -\omega_i$

- MEGADÁS:
- GYÖKTÉNYEZŐS

$$W = a \prod_{i=1}^{m,n} \frac{s - z_i}{s - p_i} = a \prod_{i=1}^{m,n} \frac{s+f_{z_i}}{s-f_{p_i}}$$

ZÉRUS, PÓLUS

SZORZOTT (ZÉRUSSAL)

$$W = a \frac{z_1 z_2 - s(z_1+z_2) - s^2}{p_1 p_2 - s(p_1+p_2) - s^2}$$

- IDŐÁLLANDÓS

$$W = a \prod_{i=1}^{m,n} \frac{1+sT_{z_i}}{1+sT_{p_i}} = a \prod_{i=1}^{m,n} \frac{1+\frac{s}{f_{z_i}}}{1+\frac{s}{f_{p_i}}}$$

- KANONIKUS

$$W = \sum_{i=1}^{m,n} a_i \frac{s+z_i}{s+p_i} = \sum_{i=1}^{m,n} a_i \frac{s-f_{z_i}}{s-f_{p_i}}$$

z_i → felüláteresztés (ALSÓ HATÁR F) (DIFFERENCIÁLÓ)

p_i → aluláteresztés (FELSŐ HATÁR F) (INTEGRÁLÓ)

- SZŰRŐK

1. FOKÚ ALULÁTERESZTŐ:

$$W = \frac{1}{1+sT} = \frac{1}{1+\frac{s}{f_1}}$$

TÖBBEDFOKÚ BÁRMILYEN SZŰRŐ:

$$W = \prod \frac{1+s/f_{z_i}}{1+s/f_{p_i}}$$

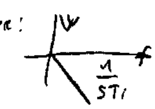
HA $s = j \cdot f$ (ÉS NEM ω)

ÁTÁROLÓS ARÁNYOS TAG

TK. SZERINT: (RC-KÖR)

$$W = \frac{1}{1+sT}$$

EKKOR:

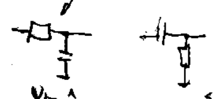


~~ÁTÁROLÓS ARÁNY~~

(VONTATÓ ≠ SZŰRŐ)

SZŰRŐ: RC, CC, RL, LC, RLC

ÁTÁROLÓS. TAG: SOROS L, SOROS C

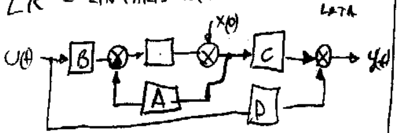


$W = \frac{1}{1+sT}$ $\qquad W = \frac{sT}{1+sT}$

ÁTÁR. DIFF. TAG

KISFELADATOK

- LR - LINEÁRIS RENDSZER HATÁSVÁZLATA



Az $\underline{A}$ mátrix mutatja a stabilitást

- INTEGRÁLÓ TAG

$\frac{d}{dt} U_{KI} \sim U_{BE}$; $U_B = 0 \rightarrow U_{KI} = áll$

U_{KI} folytonos (nem ugrik)

U_{KI} függ az eddigi lemenő jelektől

- 1 ÁLL. VÁLT. ESETÉBEN

ÁLLAPOTEGYENLET M.O.

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = c\,x(t) + D\,u(t) \qquad A = -\frac{1}{c}$$

VAGY: $y(t) = (\ldots) e^{\lambda t} + y_g$

TÖBBV.: $y_g = c\,x_g + D\,u(t)$

$\lambda_i = ?$

$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \rightarrow \lambda_i$

$s_1, s_2 \ldots$

$A s_i = \lambda_i s_i$

Ez 1 egyenletrendszer s_i egyik eleme $=1$, $k_i = ?$

$\underline{A} \cdot \underline{x_g} = -\underline{B}$

$\underline{x(t)} = k_1 s_1 e^{-\lambda_1 t} + k_2 s_2 e^{-\lambda_2 t} + \underline{x_g}$

$y(t) = \underline{c}^T x(t) + D s$

- ÁTVITELI MÁTRIX: ÁTVITELI FÜGGV.

$$W = \frac{\underline{c}^T \underline{B}}{s\underline{E} - \underline{A}} + D$$

- RENDSZER SAJÁT MOZGÁSA:

$U(t) = 0$ gerjesztés mellett az $(x_0 \neq 0)$ egyensúlyból kibillentett rendszer (x, y) mozgása

INITIAL függvény (MATLAB) számítja és ábrázolja

- GERJESZTETT MOZGÁS

$U(t) \neq 0$ hatására x_g gerjesztettválasz. $(U_0 = 0)$

$$x_g(t) = \int_0 e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

ISIM függvény: x_g számítása $x_0 = 0$, adott $U(t)$-re.

- ASZIMPTOTIKUSAN STABILIS, HA; $Re\{P_i\} < 0$

ha $\Phi(t) = e^{At} \rightarrow 0$

ill. $x_g \rightarrow 0$

- $\Phi(t) = e^{At}$ alapmátrix

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\underline{E} - \underline{A}}\right\}$

ez mutatja meg a STABILITÁST (zárt)

- STABILIS EGYENSÚLYI PONT:

akkor van, ha: $U(t) = áll$, és a rendszer aszimptotikusan STABILIS $(U(t) \rightarrow U_0,\ x_g \rightarrow 0)$

- STABILIS RENDSZER:

$$y_g = \underbrace{\left(\frac{-c^T B}{A} + D\right)}_{k\text{ - erősítés}} U_0$$

ezt a DCGAIN számolja

- LINEÁRIS TAGOK rendszerjellemző függvényei:

DIFFEGYENLET, $W(s)$, $W(j\omega)$, $v(t)$, $w(t)$, $v(t)$

Ezek ismeretében a tagot kimenőjele bármilyen $U(t)$-re meghatározható.

$y(t) = w(t) * u(t) = \frac{d}{dt} v(t) * u(t)$

$Y(s) = W(s) U(s)$

$Y(\omega) = W(j\omega) U(j\omega)$

- SZUPERPOZÍCIÓ

Ha $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$ és $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$ AKKOR (LR - ...)

$c_1 U_1(t) + c_2 U_2(t) \rightarrow c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$

- $W(t)$

$$W(t) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

$W(t)$ - SÚLYFÜGGVÉNY: Dirac tag válasza SA-ra

IMPULSE adja

- LINEÁRIS ALAPTAGOK

P, I ezekből a rendszer felépíthető

- RENDSZER n-ED rendű differenciálegyenlete és $W(s)$ közvetlenül átalakítható 1másba. (TF2SS, SS2TF)

$$n_0 y^{(n)}(t) + n_1 y^{(n-1)}(t) \ldots + n_n y(t) = m_0 U^{(m)}(t) + m_1 U^{(m-1)}(t) + \ldots m_m U(t)$$

$\Downarrow$

$$W_s = \frac{m_0 s^m + m_1 s^{m-1} + \ldots + m_m}{n_0 s^n + n_1 s^{n-1} + \ldots + n_n}$$

$$\boxed{\underset{SS}{n_i y^{(k)}} \xrightarrow{} \underset{TF}{n_i \cdot s^k}}$$

k. DERIV. — k. HATVÁNY

$$\boxed{W_s = \frac{P(s)}{Q(s)}}$$

- TF2ZP: POL → ZÉRUS PÓLUS ALAKÍTÁS

ZP2TF: FORDÍTVA

- LIN. RENDSZ. KARAKTERISZTIKUS EGYENLETE: (ÁLLAPOTE.-BŐL)

$\det(s\underline{E} - \underline{A}) = 0 \rightarrow s_{12}$

VAGY $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \rightarrow \lambda_{12}$

POLY(A) → KAR. EGYENLET POLINOMJA

EIG(A) → s_i, λ_i $\qquad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$W(s)$-BŐL: $P(s)$

$n_0 s^n + n_1 s^{n-1} + \ldots n_n = 0$

ROOTS: POLINOM GYÖKEI

- LSIM

$[Y, X] = LSIM(A, B, C, D, U, t_0, x_0)$

adott gerjesztésre a válasz $x(t)$, $y(t)$

ABCD helyett $W = \frac{P}{Q} \rightarrow P, Q$ is megadható.

(x_0 kezdeti feltétel, $t - t_{max}$)

- $W(t)$ RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁSA

$W_s = \sum \frac{R_i}{s - P_i}$ (NEM KANONIKUS) DE LEHET HA $R_i = -a_i$

$M < N$ kell legyen!!!

RESIDUE(M, N) → R_i, P_i KISZÁMÍTÁSA

- KEZDETI ÉS VÉGÉRTÉKTÉTELEK ($\mathcal{L}$-ből)

?

- INVERZ LAPLACE TRAFÓ
  - TÁBLÁZAT
  - REZIDUUM számítása
  - RÉSZLETTÖRTEKRE BONTÁS

$$\frac{M(s)}{N(s)} \to \sum \frac{r_i}{s-p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum r_i e^{p_i t}$$

- $A(t)\cdot B(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} A(s) * B(s)$

$A(s)\cdot B(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A(t) * B(t)$

$x(t)\cdot e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s+a)$

$X(s) e^{-as} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t-a)$

$\frac{d}{dt}x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$

$-\frac{d}{ds}X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t\,x(t)$

$\int_0^t x(t)\,dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$

$\int_0^s X(s)\,ds \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{t}x(t)$

- 1 VÁLTOZÓS DIFF. E.:

L.T.-val:

$sX(s) = aX(s) + bU(s) + x(0)$

$\to X(s) = \frac{bU - x_0}{s-a}$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$

IDŐT:

$x(t) = x_0 e^{at} - \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau$

- A KANONIKUS ALAKBAN

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & e^{a_{12}t} \\ e^{a_{21}t} & e^{a_{22}t} \end{bmatrix}$$

- REALIZÁLHATÓ 1 TAG, HA $m \le n$ $\quad W = \frac{M(s)}{N(s)}$

- W AMPLITÚDÓMENET:

$a(\omega) = abs\, W(j\omega) = \sqrt{Im(W)^2 + Re(W)^2}$

AMPL - ω FÜGGVÉNYÉBEN

FÁZISMENET:

$\varphi(\omega) = arc\, W(j\omega) = arctg \frac{Im(W)}{Re(W)}$

$u(t) = \sin\omega t$ -re ilyen választ ad a rendszer.

$y = a(\omega)\cdot \sin(\omega t + \varphi\omega)$

- POLINOM MEGADÁS MATLABBAL

$1 + sT_1 + s^2T_2$

N=[T2 T1 1];

MÁTRIX

A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];

FÜGGVÉNYHÍVÁS

f(A, B, C, D);

több elemet tárol

[m,n] = f(A,B,C,D);

1 ELEMENT:

F = f(A,B,C,D);

- NYQUIST DIAGRAM KÖR, HA $W(j\omega)$ LINEÁRIS TÖRTFÜGGVÉNY

$$W = \frac{a + bj\omega + c(j\omega)^2}{d + ej\omega + f(j\omega)^2}$$

- JELEK KIFEJEZÉSE

$y(s) = \dots \quad U(s) = \dots$

W_0 - FELNYITOTT KÖR ÁTVITELI FÜGGVÉNYE.

HA A NYITOTT KÖR ILYEN:

$y(s) = M + N + O + P + Q \dots$

AKKOR A ZÁRT:

$y(s) = \frac{1}{1+W_0}(M + N + O + P + Q \dots)$

- NYQUIST KRITÉRIUM
  - ÁLTALÁNOS: (STAB-HA)

NQ diagram annyiszor fogja körbe a (−1,0) pontot, ahány ⊕ pólusa van W-nek (zárt kör W-je)

- EGYSZERŰSÍTETT

ha nem fogja körül a (−1,0)-t

ha nincsenek ⊕ pólusok

- VÁGÁSI ω:

ahol $a(\omega) = |W_0| = 1$

NQ DIAGRAM itt lépi az r=1 körön. BODE D. itt metszi az ω tengelyt.

- FÁZISTÖBBLET (FELNYITOTT KÖRRE!!)

$a(\omega) = 1$-nél $180 + \varphi\omega = \varphi_T$

$\varphi_T = \pi + \varphi(\omega)$

Ha a FÁZISTÖBBLET 0-vá VÁLIK, akkor a LABILITÁS határára kerül a rendszer. $\varphi_T > 0$ legyen (60 FOKKAL) (a kimenet összegezni kell → + VISSZ)

- AMPLITÚDÓTÖBBLET

HÁNYSZOROSÁRA lehet megnövelni A FELNYITOTT KÖR ERŐSÍTÉSÉT, hogy még stabilis maradjon. (ahol $\varphi_T = 0$ lesz)

- 2 POLINOM SZORZÁSA ÚJ POLINOMMÁ

N = CONV (A, B) VAGY N = CONV([1 2 3],[4 5])

- ÉRTÉKKIÍRÁS

A ↵

- MARGIN:

MEGADJA A FÁZISTARTALÉKOT

ahol $K(\omega) = 1 \Rightarrow \varphi(\omega_c) = \varphi_T - 180°$

TEHÁT $\varphi_T = \varphi(\omega_c) + 180°$

MEGADJA ω_c-T IS (AHOL K(ω)=1)

MEGADJA AZ AMPLITÚDÓTÖBBLETET:

ahol $\varphi(\omega) = -180 \overset{\text{ott}}{\Rightarrow} a_T = \frac{1}{a(\omega_T)}$

VAGYIS OTT $a(\omega) = \frac{1}{a_T}$

(MILYEN A-NÁL, ω-NÁL VAN STABILITÁS HATÁRA)

$[a_t, \varphi_t, \omega_t, \omega_c]$ = MARGIN(P,Q,R)

AHOL

[P,Q,R] = BODE(M,N)

VAGY BODE(A,B,C,D)

- FÁZISTÖBBLET KRITÉRIUM:

ZÁRT SZABÁLYOZÁS akkor stabilis, ha a nyitott kör W₀-jának a FÁZISTARTALÉKA ⊕

- HOLTIDŐS TAG PADE KÖZELÍTÉSE

e^{-sT_h} függvény ALGEBRAI törttel való helyettesítése.

$$e^{-sT_h} \approx \frac{m_h}{n_h}$$

$[m_h, n_h] = \text{PADE}(k, T_h)$ ← k-ad fokú közelítés

STREJC-közelítés:

$$e^{-sT_h} \approx \frac{m_h}{n_h} \quad \text{de } m_h = 1$$

$$= \frac{1}{\left(1+s\frac{T_h}{k}\right)^k}$$

k db tárolós arányos tag sorbakapcsolása.

$n_h = \text{POLY}((-k/T_h) * \text{ONES}(k))$ $*(T_h/k)^k$

- HURVITZ STABILITÁSKRITÉRIUM

stabilis (össz) a rendszer, ha $(p_i < 0)$:

- a karakt. egyenlet együtthatóiból mátrixot képzünk: D_n
- $n_i > 0$, $\det D_n > 0$,

D_n aldeterminánsai > 0

- STRUKTURÁLISAN STABILIS, HA:

(zárt kör) ha a nyitott kör bármely $(k>0)$ KIERŐSÍTÉSÉNÉL STABILIS.

Vagy:

ha a gyökhelygörbe a bal félsíkon marad

- GYÖKHELYGÖRBE:

$1 + k W_0(s) = 0$ kar. egyenlet gyökeinek a vándorlása k függvényében $k: 0 \dots \infty$

- PZMAP: felrajzolja W zérushelyeit.

RLOCUS: gyökhelygörbe.

(PZMAP(M,N))

- TAGÖSSZEKAPCSOLÁS:

PARALLEL: $W_1 + W_2$

SERIES: $W_1 \cdot W_2$

FEEDBACK: $\frac{W_1}{1+W_1 W_2}$

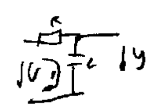
CLOOP: nyitott kör → zárt kör

$$W_0 \to \frac{W_0}{1+W_0}$$

így:

SERIES(M1,N1,M2,N2)

- RC-TAGRA EGYENLETEK



$T = R \cdot C$

$$W(s) = \frac{y}{u} = \frac{1 \cdot \frac{1}{sC}}{1\left(R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{1}{sRC + \frac{sC}{sC}} = \frac{1}{sT+1}$$

DIFF. E.: ez alapján:

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+sT} \Rightarrow y(s)(1+sT) = U(s)$$

$$y(s) + sT y(s) = U(s)$$

$$y(t) + \frac{d}{dt} T y(t) = U(t)$$

$$y' = -\frac{1}{T} y(t) + \frac{1}{T} u(t)$$

- 2 TÁROLÓS ARÁNYOS TAG:

$$W = \frac{1}{1+Ps+Qs^2} = \frac{1}{1+2\xi T s + T^2 s^2}$$

ALAKRA HOZHATÓ.

(ξ – csillapítási tényező)

$W(j\omega) = a(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

a(ω) lehet nagyobb 1-nél még passzív áramkörön esetén is!!!

akkor, ha $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (rezon.)
és $0 < \omega < \sqrt{2} \cdot \omega_k$
ahol $\omega_k = \frac{1}{T}\sqrt{1-2\xi^2}$

Ez hirtelen frekvenciánál, és diz. paramétereknél.

- ha $W(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} W(t)$ – szinuszos akkor nem önbeálló

- ÖNBEÁLLÓ: $y(t\to\infty) = y_0$ = KONST ha $u(t)$ = konst

- 2 TÁROLÓS TAGNÁL

ha $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ → $a(\omega)$ MON. CSÖKK.

ha $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ → KIEMELÉSE VAN (SZÉLSŐ ÉRTÉK)

MAX HELY:

$$\omega_r = \frac{1}{T}\sqrt{1-2\xi^2}$$

- ADATBEKÉRÉS:

A = INPUT('A=');

vagy:

A = ide be kell majd írni.

- SZABÁLYOZÁS RENDSZERTECHNIKAI MÉRETEZÉSE (KOMPENZÁCIÓS SZABÁLYOZÓ)

W_p (SZABÁLYOZOTT FOLY.) ADOTT.

Ehhez W_c (SZABÁLYOZÓ) keresése, ami az előírt paramétereket teljesíteni tudja.

- P SZABÁLYOZÓ:

$W_c = k_c = \frac{k_c}{1}$

BODE(k_c,1)

I-SZABÁLYOZÓ

$$W_c = k_c \cdot \frac{1}{sT_i}$$

$n = [T_i\ 0]$

BODE(k_c, n)

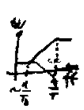
PI-SZABÁLYOZÓ (KVÁZIST. HIBA CSÖKKENTÉS)

$$W_c = k_c\left(1+\frac{1}{sT_i}\right) = k_c + \frac{k_c}{sT_i}$$

$$k_c\left(\frac{sT_i+1}{sT_i}\right) = \frac{sT_i k_c + k_c}{sT_i}$$

PD-SZABÁLYOZÓ (SZABÁLYOZÁS GYORSÍTÁSA)

$$W_c = k_c\left(1+\frac{sT_D}{1+sT}\right) = k_c\left(\frac{1+s(T+T_D)}{1+sT}\right)$$



BE VAN IKTATVA A T-IDŐÁLLANDÓJÚ ARÁNYOS SZŰRŐ, HOGY NE LEGYEN SH A KIMENETEN. $T \ll T_D$

PID-SZABÁLYOZÓ $\quad W_c \approx k_c \frac{1+sT_D}{1+sT}$

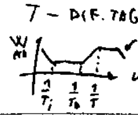
$$W_c = k_c\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1+sT}\right)$$

$m =$, $n =$: KI KELL FEJEZNI $W = \frac{M}{N}$

T_i - INTEGRÁLÁSI IDŐÁLLANDÓ

T_D - DIFF. ID. ÁLL.

T - DIF. TAGBAN SZŰRŐ A SH-K ELLEN



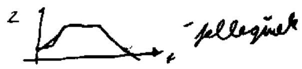
- PIPD – SZABÁLYOZÓ

$$W_c = k_c \, \frac{1+sT_i}{sT_i} \, \frac{1+sT_d}{1+sT}$$

– HA AZ ERŐSÍTÉS VÁLTOZIK:
más helyre kerül ω_c ($|W_0(j\omega)| = 1$) így minél [redacted] ugyanaz marad: más φ-hez kerül ω_c ($\varphi_{\omega_c} > 0$ legyen)

– zárt rendszer ÁTMENETI függvényét kell +FELELŐ ALAKRA HOZNI. Ez a SZABÁLYOZÁS TERVEZÉS CÉLJA

$W_{\text{szabályozott ágon}}$ – LÉVŐ ZAVAROK:



– jellegűek

ezeket kell kiírtani SOROS KOMPENZÁCIÓVAL

– STATIKUS HIBA
HIBAJEL ÁLLANDÓSULT ÉRTÉKE

$h(t) = U(t) - y(t)$

ha a szabályozás célja: $U(t) = y(t)$ elérése.

$h(\infty) = \varepsilon(t=\infty) - U(t=\infty) = h_s$

– BEÁLLÁSI IDŐ T
(zárt kör) $v(t)$ – függvénye T idő után marad a megengedett hibasávon belül $\pm\Delta$

$y(\infty) - U(\infty) < \pm\infty$

TÚLVEZÉRLÉSI ARÁNY
IRÁNYÍTÓJEL (x_{m_j}) – re

$$\frac{x_{MAX}}{x(\infty)} = U_t \quad (U(\infty) \neq 0)$$

– Ha $\varphi_T \approx 60° \Rightarrow h_T < 10\%$.

h_T – TÚLLENDÜLÉS:

$$h_T = \left(\frac{x_{MAX}}{x_\infty} - 1\right) \cdot 100\%$$

– Ha ω_c – adott:
t_s – SZABÁLYOZÁSI IDŐ:

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_s < \frac{3\pi}{\omega_c}$$

– Szabályozás TÍPUSSZÁMA: i

Ha $i = 0 \rightarrow h_s = \frac{1}{1+k}$ (ARÁNYOS) – KÖR ERŐSÍTÉS

Ha $i > 0 \rightarrow h_s \approx 0$ ($i=1 \rightarrow$ INTEGRÁL)

i: A felnyitott körben lévő (SZABAD) VISSZACSATOLATLAN integrátorok száma.
(W_0 – ORIGÓBAN LÉVŐ PÓLUSOK SZÁMA)

– SOROS KOMPENZÁCIÓNÁL:
a folyamat [redacted] legnagyobb időállandóját [redacted] T_i-vel, a 2. LEGNAGYOBBAT T_d-vel kompenzálni

$$- \; U(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} W(s)\right\}$$

– FÜGGVÉNYÁBRÁZOLÁS MATLABBAL:
$f = f(x)$ [redacted] – MEGADNI
[redacted] $t = 0 : t_{max}$
PLOT (t, f)

– $\varepsilon(t) = 1(t)$ – EGYSÉGUGRÁS
$t \cdot \varepsilon(t) = t \cdot 1(t)$ – SEBESSÉGUGRÁS

– Ha arányos a típ szabályozás
$\varepsilon(t) \rightarrow$ állandósult hibával követi.
$t \cdot \varepsilon(t) \rightarrow$ hiba folyamatosan növekszik

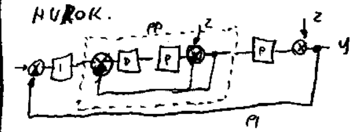
az 1.-TÍP INTEGRÁLÓ:
$\varepsilon(t) \rightarrow 0$ HIBA
$t \cdot \varepsilon(t) \rightarrow$ állandósult HIBA

– minél nagyobb a KÖRERŐSÍTÉS, annál kisebb az ÁLLANDÓSULT HIBA ide annál könnyebben lesz labilis.

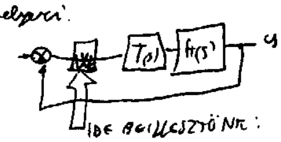
Δy – zavaró hatással
$\Delta y_{\omega} = \Delta y \cdot \frac{1}{1+k}$ – lesz

– A KOMPENZÁCIÓ A P,Z – MAP – ON:
W_0 – nek: $z_i = \frac{1}{T_i}$

– KASZKÁD SZABÁLYOZÁS:
1 BELSŐ (ÁLT. PD) SZABÁLYOZÓ HUROK kívül kiválasztott KÜLSŐ (ÁL. PI) HUROK.



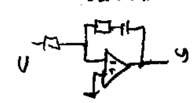
– SMITH – PREDIKTOROS SZABÁLYOZÓ.
a holtidőt a kör kívülre helyezi.



IDE BEILLESZTJÜK:

– ZAVARKOMPENZÁCIÓ
Mérjük X_z-t, és Θ-an hozzáadjuk az X_{m_j}-hez (hozzáadjuk a módosítóshoz)

– PI SZABÁLYOZÓ



– ABS W = ?

$$\frac{\text{ABS}(1+sT_i)(1+sT_d)}{\text{ABS}\; sT_i(1+sT)} = \frac{\text{ABS}\, M}{\text{ABS}\, N}$$

$$= \frac{\sqrt{\cdots}}{\sqrt{\cdots}}$$

MINDEN TAG A HELYÉN MARAD CSAK A GYÖKÉ

KELL EMELNI MINDET KÜLÖN. (GYÖKTÉNYEZŐS ALAK)

– Ha $W_0 = k e^{-sT_k}$ akkor $k \geq 1$-nél gerjed a zárt kör
?

– FELADAT
- ω_c = ? – BEHELYETTESÍTENI
  MIVEL $A_0(\omega_c) = \text{ABS}\, W(j\omega_c) = 1 \rightarrow \omega_c$
- $\varphi_T = \varphi(\omega_c) = \arg W(j\omega_c)$
- ξ – CSILLAPÍTÁSI TÉNYEZŐ, T_0 – SAJÁT PERIÓDUSI. (MÁSODFOKÚNÁL)

$$\frac{W_0}{1+W_0} = \frac{1}{s^2 T_0^2 + 2\xi T_0 s + 1}$$ ALAKRA HOZHATÓ

BEHELYETT. KISZÁMOLNI $\rightarrow \xi, T_0$

• h_T – túllendülés: (2-tárolós tag)

$$h_T = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100\%$$

$t = \ln h_T \cdot \frac{T_0}{\xi}$

– ha W-ben e^{-sT_h} időkésés van, és matlabbal dolgozunk: ezt kell alkalmazni:

$[m_h, n_h] = \text{pade}(T_h, k)$ ← k-ad fokú

Polinomok (vektoroknak) a szorzása:

$m_{új} = \text{conv}(m_1, m_2)$

vagy

$m_{új} = \text{conv}(\text{conv}(m_1, m_2), \text{conv}(m_3, m_4))$

m_i-ket lehet névvel + adni, vagy direktben: [1 2 3]

– $y(0) = s \cdot Y(s)$ ← több is lehet: él-o-aár. + 2H farkasok

$s = \infty$ (a végén beh.)

$Y(s) = W_{zár} \cdot \mathcal{L}\{U(t)\}$

így megvan tagok.

$Y(s) = \frac{1}{1+W_0} \cdot \sum_i \mathcal{L}\{U_i(t)\} \cdot W_i$

U_i-re ható átviteli függvény.

$Y(\infty) = y_g = s\, Y(s)$ ← $s = 0$ a végén beh.

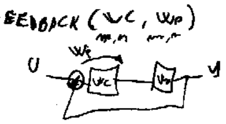
Ez bármilyen jelre fel lehet írni, ha ismert a jel spektruma (U_i-re is)

– hányas típ. szab.: Hány pólusa van W_0-nak a 0-ban: (nevező gyökjele)

hányad rendű: hanyadik fokon van benne s (számlálóban + nevezőben együttesen)

– cloop: eredő W – a zárt körre

FEEDBACK (W_C, W_P)



– Kritikus körerősítés (ampl. tart) ekkor kerül a stabilitás határára.

– i-típusú szabályozás

max. $U(t) = t^i$ – szerint változó alapjel követésére képes. Ha $U(t) = t^k$ és $k < i$ akkor a követési hiba 0

$k = i$ → állandósult hiba van.

– Gyorsítás

az instabilitást túlkorrekcióval, így az ~~[...]~~ y jobban igyekszik közelíteni U-t. PD-taggal

– Időállandók kiszedése:

$W_0 = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$W_0 \to W_0 \cdot W_{komp}$

$W_{komp} = \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{1} \cdot W_{új}$

$\boxed{W_{komp} = \frac{W_{új}}{W_{régi}}}$

~~[...]~~

– Ha felnyitott kör:

$W_0 = k \frac{1}{s(1+sT)}$ egytárolós tag,

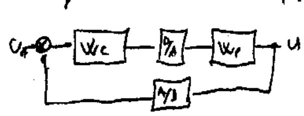
akkor a zárt kör:

$W = \frac{W_0}{1+W_0} = \frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1}$

2-tárolós taggal modellezhető. Persze T_0, ξ – lehet, hogy van, de ki kell szépen számolni. Az alak a lényeg.

– Hibrid szabályozás

W_p – folytonos idejű, W_c diszkr.



– DDC – szabályozás

hibrid szab. W_C – 1 differencia-egyenlet (számítógép számítja)

– DAC

digitális → analóg + tartó

– Mintavételi idő: T

T-ként kap bemenetet a szabályozó.

– A hibridnél a mérleg $\frac{T_{min}}{2}$ –

holtidős tag iktatódik be.

– $T_{minv.} = T_s$ megválasztása:

$T_s = \frac{\pi(\Delta\varphi)}{\omega_0}$ ahol $\Delta\varphi$ – fázistartalék romlás (fok)

ez, és a hatiódő a mintav. + zérusrendű tartós miatt van

T_h – a fázis eltolt ($T_h = \frac{T_s}{2}$)

$\Delta\varphi = \frac{-\omega T_s}{2}$ – vel módosítja

– Hibrid rendsz. tervezés:

• adott W_p – hez $W_c = \frac{1}{W_p}$-t kell tervezni (folytonos)

• $T_s = ?$ ← ω_c, $\Delta\varphi$ választani ← meghatározni

• $W_{cd} = e^{-s\frac{T_s}{2}} \cdot W_{cf} \Rightarrow Z \cdot W_{cf}$ $\boxed{z^{-1} = p(\omega)}$

(matlabbal: $[m, n] = \text{c2dm}(m_f, n_f, T_s)$ $= \text{c2dm}(m_c, n_c, T_s, \text{'zoh'})$)

• ~~[...]~~ ellenőrzés a zárt láncon, DI-ben. ← zérusrendű tartás

– FI → DI átírás

$(s - p_i) \to (z - e^{-T_s p_i})$ ← új pólus

$W(z) = (1 - z^{-1})\, Z\{W(s)\}$

$= (1 - z^{-1}) \left[\frac{W(s)}{s}\right]_{s = z^{-1}}$

– folyamat T_h-jára:

$T_h = k\, T_s$ – legyen, hogy az $e^{-sT_h} \to z^{-k}$ legyen, ahol így k egész szám.

– Komplex f. tart:

$e^{jk\vartheta} = z^k$

– DI-ben külön ábrázold függvények vannak:

DBODE

DNYQUIST

DSTEP

DIMPULSE …

– $\omega_{Nyquist} = \frac{\pi}{T_s}$

– TERVEZÉS DI – alapján

- T_k HOLTIDŐK alapján
  T_s - VÁLASZTÁS $k \cdot T_s = T_k$
- ALGORITMUS
  (PI, PD, P, PID)
- W_c meghatározása: folyamat 2 legnagyobb idő-állandóival meneteli pólusok $(p_i = \frac{1}{T_i})$ kompenzálása zérusokkal
  $z_{id} = e^{-T_s/T_i}$
  VAGY PÓLUSÁTHELYEZÉSE
  $p_{ic} \to p_{id} = e^{-T_s p_i}$ $z_{id} = p_{id}$ KOMPENZÁLÓ SZABÁLYOZÓ
  ELŐBB $W_{op} \to W_{pd}$
- k_c – MEGHATÁROZÁS (erősítés)
- ELLENŐRZÉS

k_c-MEGHATÁROZÁS: úgy beállítani, hogy a tudott fázistöbblet legyen.

– VÉGES BEÁLLÁSÚ (DB) SZABÁLYOZÓ
y a $k \cdot T_s$ -alatt a végértékre áll be. (AMPLITÚDÓ + KVANTÁLÁSI)

– AZELLENŐRZÉS

$W_p \xrightarrow{series} W_c \xrightarrow{c2d} W_{pd}$

$W_{cd} = f(W_{pd})$

[ci] = SERIES (W_{cd}, W_{pd})

[TELJES] = CLOOP[ci]

DSTEP (TELJES); GRID;

MÓDOSÍTOTT VÉLEMÉNYEZŐ:

[RENDSZ ÚJ] = FEEDBACK([W_c][W_p])

STEP[RENDSZ ÚJ]

– KARAKTERISZTIKUS EGYENLET:

$\varphi(z) = 1 + W_0 = 0$

A RENDSZER STABILIS, HA $\varphi(z)$ – GYÖKEI AZ 1-SUGARÚ KÖRÖN BELÜL VANNAK.

$\mathrm{abs}(z_i) < 1$

– Z TRAFÓ:

$Z\{f(t)\} = \sum^{n} f(kT_s)\, z^{-k} = F(z)$

$Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz$

– INTEGRÁLÓ TAG:

$W = \frac{1}{z-1}$ [1 1 1 1]

[0 1 2 3]

– Z TRAFÓ:

$S(t) \to 1$ $e^{-t/T} \to \frac{z}{z - e^{-T_s/T}}$

$E(t) = 1(t) \to \frac{z}{z-1}$

– $s \to z$

$z = e^{sT}$

$Z\{f(t - kT_s)\} = z^{-k} F(z)$

– $f(t=0) = F(z=\infty)$

$f(t=\infty) = F(z=0)$

HA STABILIS $(|p_i| < 1)$

– Z-TRAFÓ MÓDSZEREK:

- TÁBLÁZAT
- RÉSZTÖRTEKRE $r_i \frac{z}{z - z_i}$
- POLINOMOSZTÁS

– ROSSZ T_s labilissá teheti a rendszert.

$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t)$

$y(t) = C x(t) + D u(t)$

⇓

$x_{(k+1)T_s} = A_d x(kT_s) + B_d u(kT_s)$

$\forall t: t \to kT_s$

$A_d = e^{AT_s}$

$B_d = A^{-1}(e^{AT_s} - 1)B$

– REALIZÁLHATÓ ALGORITMUS: ha $W_0 = \frac{M}{N}$ $m \le n$

– ZÉRUSRENDŰ TARTÓSZERV:

$W = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$

– ÁLLAPOTTRAFÓ:

új állapotváltozók, RENDSZER ismérvei. $A_{új} = T A T^{-1}$ [illegible]

– KANONIKUS EGYENLET!

A – DIAGONÁLIS [illegible]

– IRÁNYÍTHATÓSÁGI ALAK:

$\underline{A}$ – első sora: $|\underline{A} - \lambda \underline{E}|$ – együtthatóit tartalmazza.

TF2SS(M, N) → ilyen alakra hozza

– W közvetlen felhasználása

$W(\frac{m}{n})$-ből a HATÁSVÁZLAT

– W PÁRHUZAMOS FELB. RESIDUE-VÉGZI

– ha $p_i \ne z_i$ (W–ben) akkor: ÁLLAPOTIRÁNYÍTHATÓ, és MEGFIGYELHETŐ

– VISSZACSATOLÁSSAL (X_i-ről való) a PÓLUSOK BÁRHOVÁ ÁTHELYEZHETŐK (ÁLLAPOTVISSZACSATOLÁS) HA ÁLLAPOTIRÁNYÍTHATÓ,

RANK(C_0) = n

ACKER – [illegible] vektor megadás.

$A \cdot W$. -sal STABILIZÁLHATÓ LABILIS FOLYAMAT

– HA TÖBBSZÖRÖS p_i, z_i-k vannak: Nem ÁLIRÁNYÍTHATÓ, VAGY NEM MEGF.-HETŐ.

– AKÁR LABILIS FOLYAMAT IS lehet állapotirányítható.

ha rank(C) = n

- VAGY STABILIS FOLYAMAT NEM ÁL.-ható IS LEHET

ha rank $C \ne n$

– Á. TRAFÓ:

SS2SS(A, B, C, D, T) TRAFÓ

– ÁLLAPOTIR.-HATÓ, HA

$T \cdot B$ – NEK NINCS CSUPA 0 SORA

MEGF.-HETŐ, HA

$C \cdot T^{-1}$ – NINCS CSUPA 0 SORA.

~~OBSV(A, C)~~

~~CTRB(A, B, C, D)~~

OBSV(A, C) → MEGF. MÁTR.

CTRB (A, B) → IR. M.

– PÓLUSKIESÉS (W_0): ODA TESZÜNK A ZÉRUST (W_c)

– ZP ALAK:

[Z, P, k] TF2ZP(M, N)

$k \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$

MATLAB

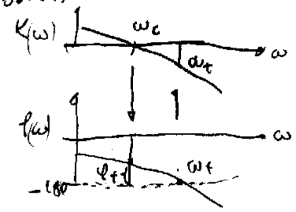
PARAMÉTERT MEG LEHET SZOROZNI KONSTANSSAL!

- MARGIN

[Af, ff, wf, wc] = MARGIN(a, f, w)

bode diagramból kiírhatjuk a főbb adatokat (fázistöbblet, vágási frekvencia ...)

BODE D.:



FÁZISTART. AMPL. TART. - VÁGÁSI F.

- HOLTIDŐS ~~TAGOS~~ RENDSZER frekvenciafüggvénye.
fázismenet módosul: $\varphi_h = -\omega T_h$
tehát fáziskésés.
Tehát a fázistöbbletet is rontja
PADE közelítés: $\frac{P}{Q}$
törtet kell látni

e^{-sT_h} → [M, N] = PADE(T_h, n)

- DISZKRÉT:
DBODE(A, B, C, D) vagy (M, N)
DNYQUIST

- PARAMÉTEREZÉS (POLINOM)

$\boxed{a s^2 + b s + c}$ (a, b, c)

nagyobb!
~~lehet még 1~~

m = ...
n = ...
BODE(M, N)

lehet még 1 paraméter: ábrázolási tartomány.
w = ...
BODE(m, n, w)

- MARGINNAK PARAMÉTEREKET LEHET ADNI A BODE ÁLTAL KÖPÖTT PARAMÉTEREKET.
[x, y, z] = BODE(M, N)
[E F G H] = MARGIN(x, y, z)

- ha kimenő paramétert [] nem adunk +, akkor kiír, kirajzol.

- HOLTIDŐS RENDSZER FÁZISTÖBBLET ...:
BODE-val mp np (W_{holt}) MEGHATÁROZÁSA.
MAJD A $W \cdot W_{holt}$:
[m, n] = SERIES (m, n, mp, np);
MAJD ABBÓL MARGIN

- STABILITÁSVIZSGÁLAT.
NEM STABILIS, HA a NYQUIST DIAGRAM körülfogja a (-1, 0) PONTOT. (N.Q. felett)

- IDŐTARTOMÁNY → ÁTVITELIF.
[m, n] = SS2TF (A, B, C, D)
VISSZA:
[A, B, C, D] = TF2SS (m, n)

- UGRÁSVÁLASZ, IMPULZUSV.

STEP (A, B, C, D)
STEP (m, n)

IMPULSE (A, B, C, D)
IMPULSE (m, n)

- ÁLLAPOTTRAFÓ
[A, B, C, D] = SS2SS (A, B, C, D, F)

MÁTRIXOKAT KANONIKUS ALAKRA:
[A, B, C, D] = CANON = (A, B, C, D, 'PARAM')

2 féle PARAMÉTERREL:
'MODAL': A → DIAGONALITÁL
'COMPANION': MEGFIGY. KAN. ALAK

- EIG
SAJÁTÉRTÉKEK, SAJÁTVEKT.

- E = CTRB (a, b)
IRÁNYÍTHATÓSÁGI MÁTRIX

F = OBSV (a, c)
MEGFIGYELHETŐSÉGI M.

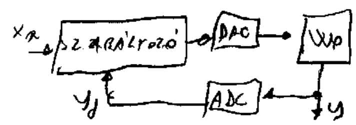
r = RANK(a)
MÁTRIX RANGJA

RESIDUE
W részlettörtekre bontása.

TF2ZP
zérusok, pólusok W-BÓL

- ADATBEVITEL
$A = [a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}]$

- HIBRID SZABÁLYOZÁS



(ANALÓG ÉS DIGITÁLIS)

Leírása analóg vagy diszkrét modellel.
ANAL: a DAC, ADC-t mint holtidős tagot
DIGIT: a szabályozott folyamat
W_p jelét: ~~LAPLACE~~ ZÁN
$Z\left\{\frac{1-e^{-sT_s}}{s} W_p\right\}$ -vel
helyettesítjük

- DISZKRÉT BODE-NÉL
T_s-t is meg kell adni paraméternek.

- EGYSZERES Pl -SZEG:
$$\frac{1}{(z-P_i)}$$

- PÓLUSKIEJTÉS, KOMPENZÁLÁS:
$W_p = \frac{M}{N} \cdot k_1$

$W_c = \frac{N}{(z-1)z^2} \cdot k_2$

- POLY ($\underline{v}$) (POLINOM ALAKRA)
$\underline{V} = (z-P_1)(z-P_2)(z-P_3)$ -nál:
$[P_1\ P_2\ P_3]$

POLY(V) → POLINOM ALAK (VEKTOR)

$\frac{\text{POLY } V_1}{\text{POLY } V_2} = ZPZTF\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$

- VISSZAFELÉ A ROOTS ALAKÍTJA. (ZEROS)
- FÁZISTARTALÉK ADOTT φ_t

$\varphi_{(wc)} = 180° - \varphi_t$

- $[\underbrace{a, \varphi, \omega}]$ = DBODE(M,N,TS)

3 VEKTOR

EGYMÁS UTÁN KÖVETKEZŐ a, φ értékek MINDEN ω-ÉRTÉKNÉL

a = ⋮

φ = ⋮

ω = ⋮

HA DBODE(M,N,TS,OMEGA) -t adunk meg, s OMEGÁT mi magadjuk (VEKTOR, ω ÉRTÉKEKKEL) akkor

DLDBODE kimenetén az ω-VEKTOR ez lesz. (a megadottal =)

- PL: OMEGA = LOGSPACE(H1,H2,N)

$\omega = 10^{H_1} \ldots 10^{H_2}$ N DARAB

- HA EZEKET A MATRIXBA RENDEZZÜK (TÁBLÁZAT)

$\underline{M} = [\varphi, \text{OMEGA}, a] = \left(\begin{array}{ccc} \varphi & \text{om} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$

y = TABLE1(M, x)

M-TÁBLÁZATBÓL; AZ ASOR, AHOL AZ ELSŐ ELEM ≈ X, OTT A TÖBBI ELEM ⇒ OM, a

- VÁGÁSI ω_c:

WC = TABLE1 $[M, 180 - \varphi_t]$

- IRÁNYÍTÓJEL ÁTVITELI FÜGGVÉNYE

$W_0' = \frac{W_c}{1+W_0}$ $W_0 = W_c \cdot W_p$

- AZ IRÁNYÍTÓJEL:

DSTEP (W_0)

- TÚLLENDÜLÉS: $W_{ERE} = \frac{W_0}{1+W_0}$

$H = MAX(DSTEP(\widetilde{M,N},db))$

TÚLVEZÉRLÉS W_0'

$TL = MAX(DSTEP(M,N,db))$

- X = DSTEP (M,N, db)

NB PONTBAN kiszámolja és x-be helyezi az eredményeket.

- $W_0 = k \cdot \frac{M}{N}$

Milyen k-ra lesz STABILIS?

k-NÖVELÉSÉVEL A NQ-DIAGRAM NAGYÍTÓDIK AZ ORIGÓ KÖRÜL.

(NQ.KRIT: annyiszor kell körülvennie a DIAGRAMNAK a (-1, 0) PONTOT, ahány ⊕ PÓLUSA VAN W-NEK.)

hanyszoros nagyításnál (k) lesz a határhelyzet, milyen nagyításnál. ⇒ k.

ekkor k=1-nél ábrázolni KELL A NQD-T. hogy lássuk.

- NEM MEGF./IK HA:

egyik kiütése kompenzálja zérus.

- ÁE KANONIKUS ALAK W-ből

$W = \frac{M}{N}$ [I J K] = RESIDUE(M,N)

$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + U$

$y = \underline{1}\ \underline{x}$

- EGYENLET FELÍRÁS

akkor fel kell írni W_i-kkel kiegészít. le a RAJZOT

W_i-ket P, Z alakra, MAJD ABBÓL a RAJZ

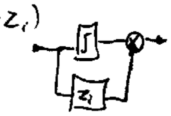
$W = k\,\frac{s-Z_1}{s-P_1}$

k: 

$\frac{1}{s-P_i}$

EBBŐL mar az egyenlet LÁTSZIK

$(s-Z_i)$



– ÁTTÉRÉS FOLYTONOS IDŐRŐL DISZKRÉTRE

$\dot{x}(t) = A x(t) + B u$

$y(t) = C^T x(t) + D u$

$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$

$y[k] = C_d^T x[k] + D_d u[k]$

$A_d = e^{A T_s}$ $B_d = A^{-1}[e^{A T_s} - 1]B$

$C_d = C$ $D_d = D$

MATLABBAL:

$[A_d, B_d] = c2d(A, B, T_s)$

HA VAN HOLTIDŐS KÉSLELTETÉS: (ha $D=0$)

$[A_d, B_d, C_d, D_d] = c2dt(A, B, C, T_s, T_h)$

(VISSZA: D2C)

EBBŐL ÁTVITELI FÜGGV. (IMPULZUSÁTVITELI FÜGGV.)

$[m, n] = ss2zp(A_d, B_d, C_d, D_d)$

– TAGOK

F.I D.I

$\frac{1}{s}$ $\frac{T_s}{z-1}$

$\frac{1}{1+sT_1}$ $\frac{1-e^{-T_s/T_1}}{z-e^{-T_s/T_1}}$

– DIFFEGYENLETEK:

$\dot{x} = A x + B u$

$x(t) = k_1 S_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 S_2 e^{\lambda_2 t} + x_g$

- $S_1, S_2 = ?$

  $A S_i = \lambda_i S_i$

  VAGY

  $[\Lambda, S] = \mathrm{EIG}(A)$ sajátért. sajátvekt.

- x_g: $A x_g = -B$ egyenletrendszer x_g-re

- k_i: $x_0 = k_1 S_1 + k_2 S_2$

  x_0 – KEZDETI FELTÉTEL (adott)

– 1 állapotváltozónál:

$y(t) = (y_0 - y_\infty) e^{\lambda t} + y_\infty$

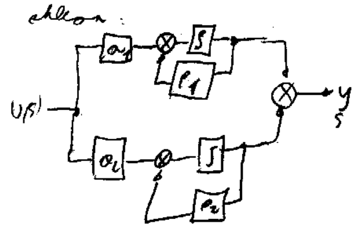
$\lambda = A$

– ÁTVITELI F.V. ALAPJÁN

~~[illegible]~~

$W = \sum a_i \frac{1}{s - p_i}$ felbontott alakban

akkor:



W ilyen alakban van, ha a RESIDUE-t alkalmazzuk.

$[a, p, k] = \mathrm{RESIDUE}(M, N)$ polinomos alak

így

$W = (\sum a_i \frac{1}{s - p_i}) + k$

– F.I → D.I

innen

$[A, B, C, D] = \mathrm{TF2SS}(M, N)$

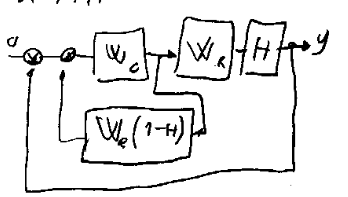
$[AD, BD, CD, DD] = c2dt(A, B, C, D, T_s, T_h)$

$[MD, ND] = ss2zp(AD, BD, CD, DD)$ vagy $[MD, ND] = c2dt(M, N, T_s, T_h)$; $[MD, ND] = ss2zp(MD, ND)$

– $W_f = e^{-sT_h} \to W_d = z^{-\frac{T_h}{T_s}}$

– $W_f = \prod \frac{1}{s - p_i} \to W_d = \prod \frac{z}{z - e^{p_i T_s}}$

– SMITH PREDIKTOROS SZ.



– MINTAVÉTELEZÉSI HOLTIDŐ

$T_s/2$ – késleltetés FOLYTONOS MODELL

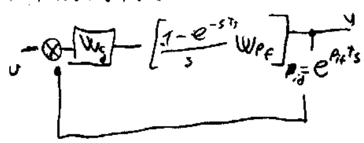
– $y(\infty) = \mathrm{DCGAIN}(M, N)$ AHOL M, N – A ZÁRT kör átviteli F.-F.

(VAGY DCGAIN)

0-TÍP. SZABÁLYOZÁSNÁL:

$y(\infty) = \frac{k}{1+k} \neq y(\infty)$

– MINTAVÉTELEZÉSES DISZKR. MODELL



– ZÉRUSHELYEK HATÁSA:

ott $W = 0$

– DISZKR. MODELLEL TERVEZÉS:

- T_s – választás

  $T_s < \frac{\sum T}{12}$ és $T_h = k \cdot T_s$

- $W_p(s)$ és T_h adottak

  $W_p(z)$ (SZABÁLYOZOTT SZAKASZ)

  $[MD, ND] = C2DT(M, N, T_s, T_h)$

  $[MU, NU] = SS2ZP(MD, ND)$

- ALGORITMUS VÁLASZTÁS

  $W_c(z)$ (PID általában)

  PÓLUSKIEJTÉSES KOMPENZÁCIÓVAL a SZAKASZ z legnagyobb időállandójából adódó pólusokat kell kiejteni.

  $W = k \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z-1)z}$

  $z_1, z_2 = e^{T_s/T}$

- k erősítés meghatározása:

  – ~~[illegible]~~ ω_c-n $\varphi_t = 60°$ ~~[illegible]~~

  $k = 1$-nél milyen ω_c-n van $\varphi(\omega) = -120°$

  ott $a(\omega)$ ada ~~[illegible]~~ $a(\omega) = 1$

  $a(\omega_c) = \frac{1}{k}$ (FELNYITOTT KÖR!!)

- ellenőrzés

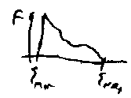
12. fejezet

Híradástechnika

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

- ÉRTELMEZÉS
a) sokaság alapú: a realizációk sokasága (önmaga) a sztochasztikus folyamat.
b) paraméteres: ξ_t folytonos idő-paraméterű valószínűségi változó.
- MEGADÁS:
a) sok realizációval (önmaga)
b) előfordulási valószínűséggel
c) néhány valváltozóval: $\xi_t = f(t, \varphi, \ldots)$ & eloszlással megadva
- MATEMATIKAI LEÍRÁS
n dimenziós eloszlásfüggvény
Minden t_i-ben (vagy t-mintában) ξ_{t_i} sűrűségf.

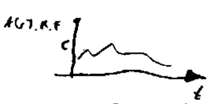
eloszlása:



$F^{(n)}(x_1, x_2 \ldots t_1 t_2 \ldots t_n)$
$= P(\xi_{t_1} < x_1$ és $\xi_{t_2} < x_2 \ldots)$

Gyakorlatban:
$F^{(1)} = (\xi_{t_1}, t_1)$
$M(\xi_{t_1})$
$M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2})$

- AUTOKORRELÁCIÓS FÜGGVÉNY
feltevés: $\xi_{t_2} = C \cdot \xi_{t_1}$ (becslés: ξ_{t_i} (becslés))



$$\frac{M(\xi_1 \cdot \xi_2)}{M(\xi_1 \cdot \xi_1)} = \frac{L(t_1, t_2)}{L(t_1 t_1)}$$

$L(t_1, t_2)$ – autok. f. $\boxed{C = \frac{R(\tau)}{R(0)}}$
$= M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2})$
- transzformációja (lin):
$L(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1) = R(\tau)$
$R(\tau) = M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_1 + \tau})$

- van ξ_t, $R(\tau)$, és $S(f)$
mivel ξ_t véletlen folyamat, a spektrumára így [illegible], ha $R(\tau) \to S(f)$ kapjuk.
$R(A+B) = R(A) + R(B) = M(A) + M(B) = M(A+B)$

- OSZTÁLYOK (szt. f.)
a) erősen stacionárius
ha a folyamat minden valószínűségi tulajdonsága független a megfigyelési pontok egyszerre való (azonos) eltolásától.
(csak $t_2 - t_1 = \tau$-tól függ)
Ekkor lehet $L(t_1 t_2) = R(\tau)$
b) gyengén stac.
$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = R(\tau) = R(-\tau)$
$M(\xi_1) = m$ nem függ t-től (0 – DC szint)

$R(\tau)$-ban ott is integrálni, így külön kell

ZDC $\to$ kéft

c) ERGODIKUS
(időátlagok és sokasági átlagok felcserélhetők)

$M(\xi_1) = M(\xi_1 \cdot \xi_2)$ – várható érték ξ-nek
$\xi_1 \cdot \xi_2$ várható értékek
$M(\xi_1 \cdot \xi_1) = R(0)$

- $M[(a \cdot \omega)^2] = a^2 M(\omega^2)$
- $R\tau$ csak is érvelhető, mint a konkrét megoldásban ξ_t-nek.

ELŐREJELZÉS:
$\xi_{t_2} \to N = a \cdot \xi_{t_1} \approx \xi_{t_2}$
négyzetes középhiba:
$E = M(\xi_{t_2} - N)^2 = L(t_2, t_2)$
Hogy E ∞ legyen:
$a = \frac{L(t_1 t_2)}{L(t_1 t_1)}$
$E = R(0) \quad 1 - \frac{L^2(t_1 t_2)}{L(t_1 t_1) L(t_2 t_2)}$
- STACIONÁRIUS FOLYAMATRA:
$\alpha = \frac{R(\tau)}{R(0)}$

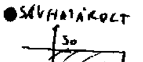
$M(\xi_t) = \int x f_\xi(x, t)\, dx$

- HÁLÓZAT:

$S_\xi(f)$ $\quad S_\eta(f)$ – teljesítmény-sűrűség jellegű (teljesítmény jellegű)
$S_\eta(f) = |H(f)|^2 S_\xi(f)$
$P_{átlag} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(f) = R(0)$
$= 2B \cdot S_{átlag}$
$R_\xi(\tau) = \mathcal{F}^{-1} S_\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi e^{j2\pi f\tau} df$
$S_\xi(f) = \mathcal{F} R_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

FELADATOK

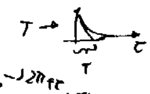
- SÁVHATÁROLT FEHÉR ZAJ
spektr. sűr. f. $\left[\frac{V^2}{Hz}\right]$



$P_{átl} = 2BS_0$
$S(f) = S_0 \quad \begin{cases} B \text{ – sávban} \\ 0 \text{ – máshol} \end{cases}$
$R_\xi(\tau) = \mathcal{F}^{-1} S(f) = \int_{-B}^{B} S_0 e^{j2\pi f\tau} df$

$R_\xi(\tau) = \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}$

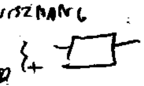
- EXP. LECSENGŐ AUT. K.F.-ű JEL:
$R(\tau) \to S(f)$
$R = R_0 e^{-|\tau|}$ $\quad T \to$



$S(f) = \int_{-L}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

cc: $\int A e^B e^C = A \int e^{B+C}$
$= A\left[\frac{e^{B+C}}{B+C}\right]_{-\infty}$
$+ A\left[\frac{e^{-B+C}}{-B+C}\right]^{\infty}$

- VISSZHANG HATÁSA A ~~[illegible]~~ STAC. ξ-RE.
visszhang

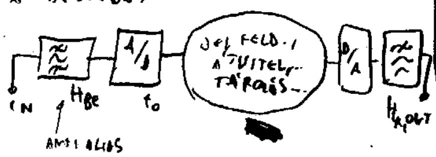


$\eta_t = \xi_t - \xi_{t-T}$
Választunk 2 időpontot: t_1, t_2
$L(t_1, t_2) = M(\eta_{t_1} \cdot \eta_{t_2})$ $\Big|$ $R_\eta(\tau) = ?$ $R_\xi(\tau)$ adott!

$= M\left[(\xi_{t_1} - \xi_{t_1 - T})(\xi_{t_2} - \xi_{t_2 - T})\right]$ (A, B, C, D)
$M(AC - AD - BC + BD) =$
$M(AC) - M(AD) - M(BC) - M(BD)$
$= M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2}) - M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2 - T})$
$- M(\xi_{t_1 - T} \cdot \xi_{t_2}) + M(\xi_{t_1 - T} \cdot \xi_{t_2 - T})$
$\left(\tau = t_2 - t_1 \text{ így:}\right)$
$= R_\xi(\tau) - R_\xi(\tau - T) - R_\xi(\tau + T)$
$+ R_\xi(\tau) = 2R_\xi(\tau) - R_\xi(\tau - T) - R_\xi(\tau + T)$
$= R_\eta(\tau)$
$S_\eta(f) = 2 S_\xi(f) - S_\xi(f) e^{-j2\pi fT}$
$- S_\xi(f) e^{+j2\pi fT}$
$= S_\xi(f) \cdot (2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT})$
$H(f) = \frac{S_\eta(f)}{S_\xi(f)} = 2 - (e^{-j2\pi fT} + e^{j2\pi fT})$
$= 2 - 2\cos(2\pi fT)$

- MINTAVÉTELEZETT JEL:
$\hat{x}(t) = T \cdot \sum_k x(t - kT)$
$\hat{x}(f) = H(f) \cdot \sum_k X(f - k \cdot f_0)$
átlapolódás van, ha ~~[illegible]~~
$B < \frac{f_0}{2}$ $\quad H_f$ [illegible] $-2B$
jel-zaj viszony: 1 bit 6 dB-t javít.

ÁTLAPOLÓDÁSMENTES DIGITÁLIS ÁTVITEL



- SZIVÁRGÁS, ÉS ÁTLAPOLÓDÁS

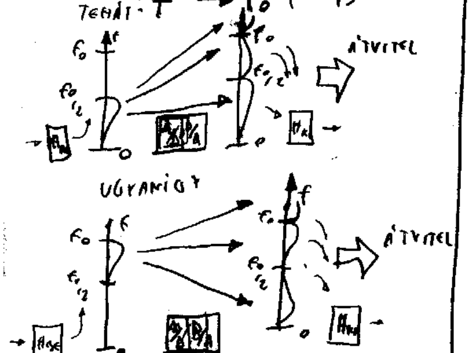
$f_0/2$-NÁL NAGYOBB JEL ÁTVITELEKOR:

ÁTLAPOLÓDÁS: (HOLMEZETT SP.) $k \cdot f_0$-VAL ELTOLÓDIK MINDEN JEL.

MÁSKÉPP: $f_0/2$-re tükröződik

(MINDEN JEL $-f$-ből előre TOLÓDIK f_0-VAL
$-f + f_0 = f_0 - f$ TEHÁT

TEHÁT: $f \rightarrow f_0 - f$ IS KERÜL



$f_1 \rightarrow f_1$ és $(f_0 - f_1)$ és $(f_0 + f_1)$

ÁTVITT JELBEN:

BEMENŐJE: $U_1 = U_1 e^{j2\pi f_1 t}$
$= \bar{U}_1(f)$

KIMENET:

$U_k = U_1(f_1) \cdot H_{BE}(f_1) \cdot H_{KI}(f_1)$
$+ U_1(f_1) \cdot H_{BE}(f_1) \cdot H_{KI}(f_0 - f_1)$

MINDEN BEMENŐ FREKVENCIAÖSSZETEVŐRE

- LINEÁRIS PREDIKCIÓ

~~$\hat{\xi}_k = a \tilde{\xi}_{k-1}$ ... PREDIKÁLT, DEKÓDOLT ...~~

~~$P_{ZAJ} = ?$~~

~~... feltétellel ...~~

$M(\varepsilon_k^2) \approx M(\xi_k^2) + M(\varepsilon_k^2) \neq 0$

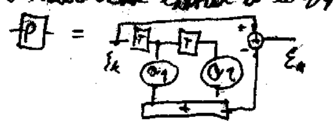
Ha így van megadva a predikció! (PREDIKC. EGYENLET),

$\xi_k = a_1 \xi_{k-1} + a_2 \xi_{k-2} + \varepsilon_k$

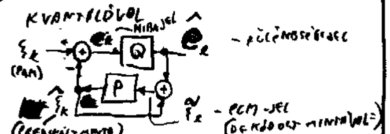
ez megfelel:

$\varepsilon_k = \xi_k - (a_1 \xi_{k-1} + a_2 \xi_{k-2} \dots)$

összevonva lesz a lánc:



- A MEGSZOKOTT PREDIKTOR, A KVANTÁLÓVAL



KVANTÁLÁSI HIBA: $\hat{e}_k - e_k = \xi_k - \tilde{\xi}_k$

Q - EGYENLETES KVANTÁLÁS

(A PREDIKCIÓ: ^ - DEKÓDOLT JELBŐL képzi)

EGYENLET: $\tilde{\xi}_k = ? = \hat{\xi}_k + Q(\xi_k - \hat{\xi}_k)$

- ELŐKIEMELÉS (PREEMPHÁZIS), ÉS UTÓELNYOMÁS

H_1 … H_2

JEL-ZAJ -VISZONY MÉRÉSEGE:

$\frac{SNR_2}{SNR_1}$ $\qquad H_2 = \frac{1}{H_1}$

alapelv: lapítani kell a jelek sűrűségfüggvényét, és kiemelni, ameddig lehet (keret)

AHOL:

$SNR = \frac{P_{HASZN}}{P_{ZAJ}}$

$P_x = \int_B S_x(f)$

- KÁBEL, KÖZELVÉGI ÁTHALLÁS. $l_{max} = ?$

ADOTT:

$R, G, L, C \Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (HA ILLESZTVE) SZÁMÍTHATÓ

$\alpha = (20\lg e)\left(\frac{1}{2}\frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G Z_0\right)$ dB/km

$a_S = -2l$

k - KVANT

ÁTHALLÁSI VÉDETTSÉG dB

a_{KV} - KÖZELVÉGI ÁTHALLÁS (MEG VAN MÉRVE)

$K = S_{HASZ} - S_{ÁTHALL}$

$K = a_{KV} - \alpha l$

$K_{KIVÁN} > K = a_{KV} - \alpha l_{max} \Rightarrow l_{max}$

R-FÜGG f-TŐL ADOTT f-EN R ADOTT

$f \uparrow \rightarrow R \sim \sqrt{f}$ ...

- $P = M(\xi_t^2) = \sigma_\xi^2$ = NÉGYZETES KÖZÉPÉRTÉK $= R(0)$

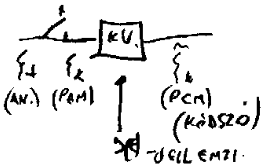
$\varrho = SNR = \frac{P_{JEL}}{P_{ZAJ}}$

- AUTOKORR. F. DISZKRÉTEN:

$R(n) \rightarrow R(0), R(1), R(2) \dots$

- KORRELÁCIÓ ÉRTÉKEZ MINTA KÖZÖTT $= R(t_1, t_2) = R(\Delta t)$

- KVANTÁLÁS



- $R(\Delta t) = ?$:

$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D(f) e^{j2\pi f \tau} df$

$R(\tau = \Delta t) = R(\Delta t)$

$\Delta t = \frac{1}{f_{MV}}$ (MINTÁK TÁVOLSÁGA)

- MINTÁK FÜGGETLENEK HA KORRELÁLATLANOK:

ha: $R(k \cdot \Delta t) = 0$

- KVANTÁLÁSI ZAJ:

$SNR = \varrho = \frac{P_J}{P_Z} = \frac{M(\xi^2)}{N} = 2^{2n}$

ADOTT lehetnek

$\frac{1}{2} \operatorname{ld} SNR = n$ - BITESNEK KELL LENNIE ILYEN SNR-HEZ

- PREDIKCIÓS FELADAT

$P_{KV.ZAJ} = ?$, $SNR = ?$ HÁNY BITES KELL adott SNR-HEZ?

predikciós egyenlet adott:

$\xi_k = a \xi_{k-1} + \varepsilon_k$

ebből:

$P_1 = a P_2 + P_3$

(MIVEL P_1 POZÍCIÓ FÜGGETLEN: $P_1 = P_2$)

$\sigma^2 = P_{\varepsilon}$
$\varrho = SNR$

$M(\xi_k^2) = P_1 = a^2 M(\xi_{k-1}^2) + M(\varepsilon_k^2)$

$M(\xi_k^2) = a^2 M(\xi_k^2) + \sigma^2$

TOVÁBBALAKÍTVA, KIFEJEZVE:

$M(\xi_k^2) = \frac{\sigma^2}{1 - a^2}$

$M(\xi_k^2) = P_{SE} = P_{JEL}$

Ha SNR adott:

$\varrho \rightarrow SNR = \frac{P_{JEL}}{P_{ZAJ}} \rightarrow P_{ZAJ}$ (f.v.)

KVANTÁLÁSI SZINTEK:

$SNR = 2^{2N} \rightarrow N$

db SZINT,

N - A KÓDSZAVAK HOSSZA.

- (TELJESEN) REKONSTRUÁLT MINTA HIBÁJA (eltérés az eredetitől):

$h = \tilde{\xi}_k - \xi_k$ $\quad$ $\tilde{\xi}_k$ - AZ ADÓ KIMENETÉBŐL

ebbe P-t $\quad$ $\hat{\xi}_k = P(\,)$ BEHELYETTESÍTEM

$SNR = 2^{2N} = \frac{M(\xi_k^2)}{P_Z} = \frac{M((\xi_k - \hat{\xi}_k)^2)}{M((\xi_k - \tilde{\xi}_k)^2)}$ (KVANTÁLÁSI) $P_{Z, \text{PREDIKCIÓ}}$

ALAPOK

- FOURIER SORFEJTÉS (periodikus)

$x(t) = \sum X_k (jk\omega)$

$= X_{DC} + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^A \cos k\omega t + X_k^B \sin k\omega t \right)$

ahol

$X_{DC} = \frac{1}{T} \int_0^T x_t \, dt$

$X_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_0 t \, dt$

$X_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_0 t \, dt$

$\omega = 2\pi f$

$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{T}$

- DISZKRÉT IDŐBEN

$\bar{X} = \sum_{p=1}^{m} X(p\vartheta)$

ahol

$X(p\vartheta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x[k] e^{-jp\vartheta_0}$

$x[k]$ ϑ_0-szerint periodikus, vagy K-szerint

$\vartheta_0 = \frac{2\pi}{K}$

- FOURIER TRAFÓ

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x_t\}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

(inverz: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$)

transzformálható, ha $\int_{-\infty}^{\infty} x_t \, dt < \infty$

(DC-nél + D-ban)

diszkrét:

alapok:

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$\varepsilon(t) \to \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$\varepsilon(t) e^{-\alpha t} \to \frac{1}{\alpha + j\omega}$ $\quad \varepsilon(t) e^{j\omega_0 t} \to \frac{1}{j(\omega-\omega_0)}$

$1 \to 2\pi \delta(\omega)$ $\quad e^{-\alpha|t|} \to \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$\cos \omega_0 t \to \pi \left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0) \right]$

$\sin \omega_0 t \to -j\pi \left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0) \right]$

DISZKRÉTEN:

$x[k] \to X(e^{j\vartheta})$

$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] e^{-ji\vartheta}$

JELEK LEÍRÁSA

- Jel: fizikai mennyiség, aminek a megváltozása jelentéssel bír. (vagy matematikai modellje)
- Értelmezési tartomány, értékkészlet alapján lehetnek folytonos/diszkrét idejű, ill. folytonos/diszkrét értékkészletű.
  folyt. folyt: analóg
  di/di: digitális.
- determinisztikus jel: előre megjósolható egy rögzített függvénnyel
- sztochasztikus jel: közös vonásokkal rendelkező függvényhalmaz.
- determinisztikus jelek fajtái:
  1. véges idejű: ha $t_2 < \infty$ akkor $x(t > t_2) = 0$
  2. abs. integrálható: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
  3. véges energiájú: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$
  4. korlátos: $\exists K, \forall t$-re $x(t) < K$
  5. véges átlagú: $A = \lim_{\substack{t_2 \to \infty \\ t_1 \to \infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt = U_{DC}$

  tehát $A < \infty$

  6. véges teljesítményű, ha: $P_x = \lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to \infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty$
  7. periodikus: ha $\exists T$, hogy $x(t) = x(t+T)$
  8. harmonikus jel (szinuszos)

  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

  9. KVÁZI PERIODIKUS

  $x(t) = \sum_i^n A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

  inkommenzurábilis, vagy lantos? [illegible] jelek.

- rendszerek vizsgálatánál a KI/BE menő jeleket érdemes harmonikus jelek összegeként felírni.

$x(t) = \sum_i x_i e^{\frac{j 2\pi i t}{T}}$ (periodikus jel)

ahol $x_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{j 2\pi i t}{T}} dt$

- SÁVKORLÁTOLT JEL:

$f_1 < f_2$ között: ha $f < f_1$ vagy $f > f_2$ $\to X(f) = 0$

- KIS RELATÍV sávszélességű jel:

ha $\frac{B}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_2} \ll 1$

- EFFEKTÍV frekvencia:

$B = \sqrt{\frac{\int f^2 (X(f))^2 df}{\int (X(f))^2 df}}$

SZTOCHASZTIKUS JELEK (folyamat)

- ha $\xi_t = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ akkor φ - egyenletes eloszlású valószínűségi változó $0 \ldots 2\pi$-n.
- φ konkrét értékével 1 realizációja a véletlen jelnek.
- A jel $\xi(t)$ egy t paraméterű valószínűségi változó sereg.
- Ha t_1, t_2 rögzített, valószínűleg $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$ is rögzített érték.
- VALÓSZÍNŰSÉG:

$F_\xi(x, t) = P(\xi_t \leq x)$

(egydimenziós eloszlásfüggvénye ξ folyamatnak.
- Ha ξ [illegible] analóg jel:

$f_\xi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} F_\xi(x, t)$

ami az 1 dimenziós valószínűség-sűrűség-függvény

— ξ_t várható értéke: (idő-f.)

$$m\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, F_\xi(x,t)\, dx = M(\xi_t)$$

(DC-szint)

— 2 dimenziós sűrűségfüggvény:

ξ_{t_1}, ξ_{t_2} együttes viselkedését írja le, hogy mennyire mozdulnak eltérni egymástól.

$$F_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)$$

$$F(x_1,x_2,t_1,t_2) = P(\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2)$$

— AUTOKORRELÁCIÓS FÜGGV.

$$L_\xi(t_1,t_2) = M(\xi_{t_1}\xi_{t_2}) = R_\xi(\tau)$$

$$= F^{-1}\{S_\xi(f)\}$$

bármely realizációra értelmezhető jel.

$$P_{átlag} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} x^2\, dt$$

— STACIONÁRIUS folyamatok: eloszlásfüggv. az időbeli eltolásra érzéketlen (időbeli homogenitás). (SZTOCHASZTIKUS)

SZTOCH. GYENGESTAC. ERŐS STAC. ERGO.

— ERGODIKUS folyamat: Majdnem minden realizációból kikövetkeztethető a folyamat tetszőleges dimenziójú eloszlásfüggvénye.

$$m(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \xi_t\, dt \approx \xi_{DC}$$

(SZTOCHASZTIKUS, STACIONÁRIUS)

— zaj kimenő jele:

$\eta_\theta = y_\theta = h_t * \xi_t$ (h — a zaj súlyfüggv.)

— autokorrelációs függv. Fourier transzformáltja a SPEKTRÁLIS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY. $S_\xi(f)$ (Sz valószínűségi spektrum)

$$\mathcal{F}\{R_\xi(\tau)\} = S_\xi(f) \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$$

$$M(\eta_t)^2 \approx 2S_\xi(f)\,\Delta f$$

valószínű spektrum, az a spektrum ami előfordulhat, lehetőség.

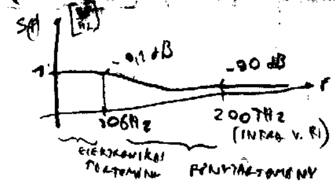
— Ergodikus folyamat: ha nincs benne DC szint

— Teljesítmény-sűrűség-spektrum (spektrálsűrűség)

$S_\xi(\omega)$ P $1\,\Omega$-on mért átl.

$$P_{(\omega_1,\omega_2)} = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_\xi(\omega)\, d\omega$$

— TERMIKUS ZAJ (GAUSS ELOSZLÁS, NORMÁLIS ELOSZLÁS)



$$S(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}$$

$P = kTB$ a 50 GHz alatt, $S = kT$

— aktív eszközökben sönt zaj van:

— Eszközök zajtényezője:

$$F = \frac{N}{GkTB}$$

G — ERŐSÍTÉS

N — zaj teljesítmény $\left(1\,\Omega\text{-on } P = \frac{1}{2}\right)$ $\tilde{N} = N_{ee}$

$$N = GkTB + \tilde{N}$$

$$\tilde{N} = GkT_{ee}B$$

$$T_{ee} = T_0(F-1)$$

(BEMENETRE REDUKÁLT ZAJHŐMÉRSÉKLET)

SORBA KAPCSOLT ESZKÖZÖKNÉL

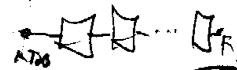
$$N_i = G_i k T_0 B + N_{i-1}$$

$$F_e = F_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{F_i - 1}{\prod_{k=1}^{i-1} G_k}$$

EREDŐ ZAJTÉNYEZŐ

$k = 5{,}5 \cdot 10^{-24}$ BOLTZMANN ÁLLANDÓ

az első erősítő fokozata meghatározza így. F_1 kicsi, G_1 nagy legyen (lehet hűteni az első fokot)



SORBAKENEZÉS: $F = \frac{G_i}{F_i}$ UTOLSÓNAK A LEGNAGYOBB LEGYEN ÉS ÍGY SORBA, LEGKISEBB A LEGKISEBB.

— CSILLAPÍTÓ

F = L

ATOB

N_{ATOB} OFL $\frac{OFL}{L}$

→ OFL-ZAJ VISZONY ROMLIK.

Így az első erősítőket a forrás közelébe kell helyezni.

CSATORNÁK, BIRANDOK:

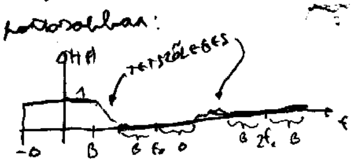
MINTAVÉTELEZÉS:

— SHANNON TÉTEL: $f_s > 2B$

— TÉTEL ÉRTELMEZÉSE: visszaállítható, ha $f_s \geq 2B$ vagy $H(f) = M(f)\cdot G(f)$

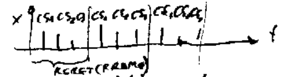
ha igaz: $\forall f_x > B$-re $H(f) = 0$

gyakorlatban:



(PL. $f_s/2$ aluláteresztő szűrő)

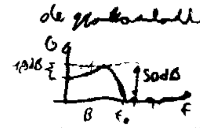
— A PCM jeleket multiplexelni lehet



TDM — időosztás

— a kimeneti szűrő: látszólag ideális

de gyakorlatilag sokkal jobb! (PÓLUSOKNÁL a körül a 0)



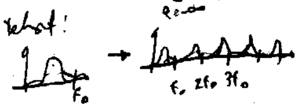
- AZONOS MINTÁJÚ JELEK!

Az azonos mintájú jelek kulönöző spektrumai megegyeznek.

Kulönöző spektrum:

$$X(f) \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} X(f+if_0) \quad \text{vagy} \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X(f-\ell f_0)$$

tehát!

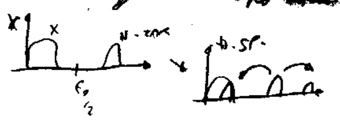


- a kulönöző spektrumot a minták határozzák meg, és a visszaállított jelet (PAM) a kulönöző spektrum.

- kulönöző sp.: DIGITÁLISNÁL

$$T_0 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jnT_0 2\pi f} \right]$$

- Az $f > \frac{f_0}{2}$ frekiket ki kell szűrni, különben átlapolódás lesz.
(nem egyezik vissza egyértelműen az $X(f)$ a kulönöző sp-ból)
- lehet illegra visszalapolás:



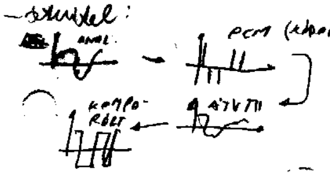
MINDEN JEL a bal oldalon, és a zavarok is eltolódik kf_0-akkal. És a visszaállításkor nem odavaló összetevők kerülnek be a jelbe. (ehhez is a szűrő kell)

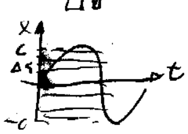
- VISSZAALAKÍTÁS nem az eredeti, hanem a kulönöző spektrum alapján történik

- KVANTÁLÁS (1938)

nagyfrekvenciás átvitelnél a jel-zaj viszony romlás javítására

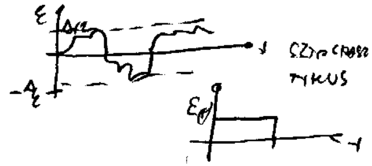
- átvitel:





- KVANTÁLÁSI HIBA: ε

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta}{2} \qquad X_{t_{0\varepsilon}} \neq X_{t_{\varepsilon 1}}$$



$$P_{ZAJ} = M(\varepsilon^2) = R_\varepsilon$$

$$= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta}\, d\varepsilon = \boxed{\frac{\Delta^2}{12} = P_{ZAJ}}$$

- Ha N db szint van: $N = 2C \cdot \Delta$

$\Delta = \frac{1}{2^N}$ $\quad P = \frac{C^2}{12}$ $\quad$ n-BITES KÓDSZÁM

JEL-ZAJ VISZONY!

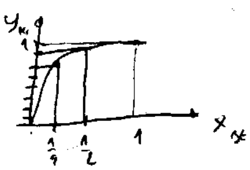
$$SNR = \frac{P_x}{P_{ZAJ}} = \frac{3}{2} 2^{2n} = 1{,}7 + n \cdot 6{,}2\,dB$$

VAGY $SNR = \frac{3}{2} 2^{2n}$ [illegible]

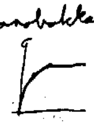
- NEMLINEÁRIS KVANTÁLÁS

a ~~[illegible]~~ a kisebb hangerő-arányokat hallani. Nagyobb hangerőnél az észlelhető legkisebb különbség nagyobb ~~mint~~ ~~[illegible]~~ hangerőnél (ABS) tehát kisebb hangerőnél nagyobb felbontás kell.

KVANTÁLÁSI KARAKTERISZTIKA:



Ezt lineáris darabokkal helyettesítjük.



Így nem kell sűrűn kvantálás nagyobb hangerőn, kevesebb adat is elég. (TÖMÖRÍTÉS)

- PÉLDA: BESZÉD ÁTVITEL (TELEFON)

8kHz MINTAV. F.

8 BIT → 64 kbps

8 TARTOMÁNY 4 BIT, TARTOMÁNYONKÉNT 4 BIT

(LINEÁRISAN 12 BIT KÉNE)

LINEÁRIS PREDIKCIÓ

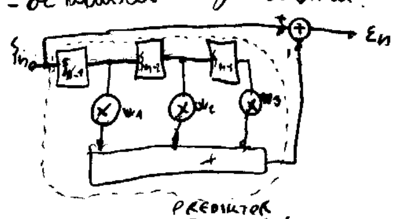
- A beszédben vannak-e összefüggések? az egyes minták között.
- mintákat (ξ_n) a következőt (ξ_{n+1}) becsülni: KORRELÁCIÓS függvény. BECSLÉS!

$$\xi_n = w_1 \xi_{n-1} + w_2 \xi_{n-2} + \dots w_M \xi_{n-M}$$

w_i-k meghatározása:

$$M\left(\xi_n - \sum_i^M w_i \cdot \xi_{n-i}\right)^2 \rightarrow \text{MINIMUM LEGYEN}$$

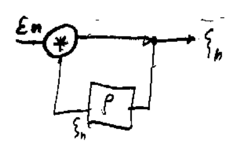
- az átvitel megvalósítása:



PREDIKTOR
FIR-SZŰRŐ

tehát:

VISSZAÁLLÍTÁS:

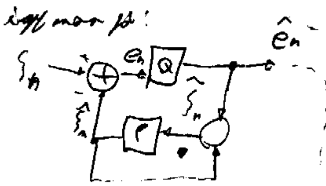


- E_n eltérés jelet visszük át, mert az eltérések az egyes minták között általában kicsik, ezért E_n kicsi, és kevesebb biten megadható.

- PROBLÉMA:

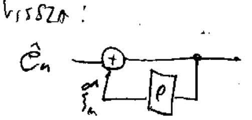
HIBAPROPAGÁCIÓ: ΔE hibák felgyülemlenek, kiakasztják a rendszert.

így már jó:



Q - KVANTÁLÁS

VISSZA:



HIBA:

$$\Delta \xi_n = \xi_n - \tilde{\xi}_n = e_n - \hat{e}_n = \text{KVANTÁLÁSI HIBA.}$$

= áll. nem növekszik

w_i meghatározása:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1,M} \\ \vdots & & \\ R_{M,1} & & R_{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,0} \\ \vdots \\ R_{M,0} \end{bmatrix}$$

↓ számításigényes

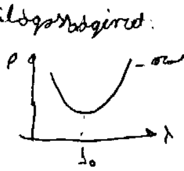
általában $M = 12$

R-ek:
veszünk egy lélda mintasoro-zatot, 120 minta alapján vesz a 12 mintás ablakban kiszámoljuk R-eket. Majd léptetjük az ablakot 1-gyel .. az eredményeket [redacted] (10-M^2) átlagoljuk.

KÉP

- Látásérzet:
  - VILÁGOSSÁG ~ teljesítmény
  - SZÍN ~ spektrum (400-700 nm)
  - telítettség (mennyi fehér van benne)

világosságérzet:

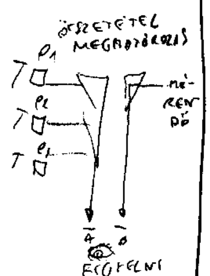


SZÍNMÉRÉS:

$\lambda_R = 700$ nm

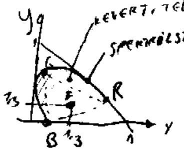
$\lambda_G = 546$ nm

$\lambda_B = 436$ nm



Minden fényinger megadható egy P_1, P_2, P_3 összeg-hasonlóval

- TRANSZFORMÁCIÓ: $R,G,B \to X,Y$ SZÍNPATKÓ



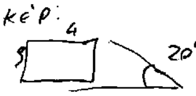
A Δ-ön kívül eső pontokat nem lehet kikeverni. Ezeket helyezzük a 3D-be

A-fehér pont.

úgy, hogy a színezettől távoli alapszínt adunk hozzá mindig.

- színtelítettség: (DOMINÁNS λ) a spektrálszín és a fehér pont közötti egyenesen való arányos

- KÉP:



felbontóképesség $2'$ → 800x600

- FF. állókép
  50-100 VILÁGOSSÁGI FOKOZAT:
  6-7 bit. 6·0,5 Mpx = 3 Mbit

  MOZGÓKÉP: 25 FPS
  (VILLOGÁSMENTES: MIN 50-85 Hz)

  3 · 25 ≈ 75 Mbps = 10 MBps

- SZÍNESEN:
  3 adat: Y, R-Y, B-Y

  A színfelbontóképesség rosszabb, mint a világossági (10') 25 px-enként elég a színfelbontás. 20 000 színpont 256 SZÍNNEL → 8 bit ↓ 160 kbps

  Σ ≈ 75 Mbps

- CCD kamerák

  állóképnek kialakított tábla. (640×480)

  500 kpx · 25 FPS = 12,5 Mpx/s

  12,5 MHz - mintavétel → 6 MHz analóg jel.

  Átvitel:

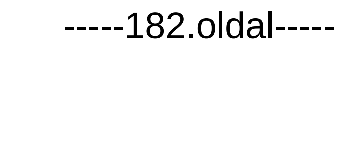
  Y   B = 6 MHz

  R-Y }
  B-Y } SZÍNKÜLÖNBSÉGI JELEK   ⅕ B   1,2 MHz

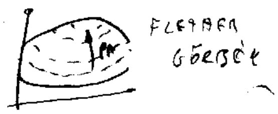
  Ezt el lehet rejteni a videojelben mert fésűs spektruma van, mivel az Y jelek (az egymás utáni képek hasonlóak, így majdnem periodikus a jel) n×15 kHz (SORF.)-szerint fésűs. Ezt kell tolni az egyes jeleket különbözőképpen

HANG

- hangosság ~ HANGNYOMÁS $L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0}$
- hangmagasság f
- HANGSZÍN (SPEKTRUM) $P_t = 20 \mu P_a$

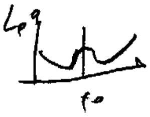


- azonos hangosságérzetek a vonalak vannak.



Hangerő: [PHON]

- Ha ... hang szól egyszerre, a hallásküszöb megváltozik. (Nagy intenzitású hang megemeli a küszöböt a környékén)



f_0 elfedi a közeli f-eket.

(Időbeli elfedési lehetőség időtartományban is van ugyanis ($\pm\Delta t$))

JELÁTVITEL

- Igények
  - képjelnél

    6 MHz, 36 dB SNR

    lineáris torzítás < 10%.
  - hang

    0,3-3,4 kHz   36 dB SNR

    torzítás < 5%.
  - igényes zene

    0,1-4 kHz 40 dB
  - igényes, 0,02-15 kHz 60 dB — 1%
  - CD 0,02-20 kHz < 96 dB SNR, 0,005%

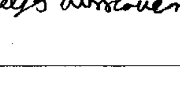
- Átvitel lehet
  - vezetékes
  - rádiós

VEZETÉKES ÁTVITEL

elektromágneses hullám, ami vezetékhez van kötve

1. OPTIKAI KÁBEL

ÜVEGSZÁL



$\lambda = 1,3$; $1,5 \mu m$

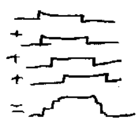
(INFRAVÖRÖS ESZTERGA?)

$\alpha = 0,1$ dB/km

ESAK DIGITÁLIS JELEKRE?

Ha elég laposan érkezik a fénysugár, akkor teljes visszaverődés van.

- különböző végű szagok vannak. Ezek különböző idő alatt érnek a kábel túl végéből a másikba
- τ_{min}, τ_{max}
a verseték végén a jagonak összeadódnak.



$\Delta\tau < T$ kell legyen.

módszerek: (tereh)
több módus van, eltérő terjedési sebességgel.
van MONOMÓDUSÚ SZÁL:
MAG $\phi < n \cdot \lambda$

FOLYT KÖV MÁSHOL!

- JELÖLÉS: $\xi(t)$-BEMENET $h(t)$-ÁTV. $\eta(t)$-OUT
- Autokorrelációs függvény:
A spektrális sűrűségfügg- vényből számolt (mester- séges) van valódi jel

$$R_{\xi}(t) = F^{-1} S_{\xi}(f)$$

$\xi(t)$?

- Mintavételezettjelnél autokorrelációs függvény

$$L(t_2, t_1) = R(t_2 - t_1) = R(\Delta t)\, \xi(t)$$

- ξ_{t_1} alapján ξ_{t_2} JÓSLÁSA:
$\nu = a_0 \xi_{t_1}$
ahol

$$a_0 = R(0) \cdot \left[1 - \frac{R(t_2 - t_1)}{R^2(0)}\right]$$

$$= \frac{M(\xi_{t_1} \xi_{t_2})}{M(\xi_{t_1}^2)} = \frac{L(t_1, t_2)}{M(\xi_{t_1}^2)}$$

- FOURIER TRAFÓNÁL HA $(R \to)$ szakaszonként eltérő a függvény, akkor darabokban kell integrálni. $S = \int R\, dT + \int R\, dT$

- ELŐREJELZÉS

$$\xi_t = a \cdot \xi_{t-1}$$

$$a = \frac{R(\Delta t)}{R(0)} = R(0)\left(1 - \frac{R^2_{(\Delta t)}}{R^2_{(0)}}\right) = a$$

- VALSZÁM
- VÁRHATÓ ÉRTÉK: SŰRŰSÉGF. $\xi_t \neq \xi_{t_1 + \Delta t}$

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

LEGVALÓSZÍNŰBB ÉRTÉK.
$\xi(t)$-re ξ_t $[A, A]$
intervallumon egyenletes eloszlású $f(A) = \frac{1}{2A}$
$m(x,y) = \iint xy\, f(x,y)\, dx\, dy$

- ELOSZLÁSFÜGGVÉNY:

$$P(x < k) = \int_{-\infty}^{k} f(x)\, dx = F(x)$$

- SZÓRÁSNÉGYZET:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)\, dx$$

$$\sigma^2_{(x+y)} = \sigma^2_{(x)} + \sigma^2_{(y)} + 2\,COV(x, y)$$

$$COV(x, y) = \iint xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= m(x \cdot y) - m(x)\, m(y)$$

($= 0$ ha x, y függetlenek)

$$R(x, y) = \frac{COV(x,y)}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)}$$

KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ

MATEK: $\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$
$1 - \cos x = 2\sin^2 x$

- $R(t) = R(\Delta t) = R(t_2 - t_1)$
- autokorrelációs függvény ha adott, az alapján kiszámolható
$L(t_1, t_2)$ ha tudjuk, mennyi a köztük levő Δt

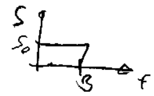
$$L(t_1, t_2) = R(T) \quad T = t_2 - t_1$$

tehát dönthető 2 PONTOT összekapcsoló AUTOKORRELÁCIÓS FÜGGVÉNY (L) csak az időközöktől valószínűséggel függ (T) (ERŐSEN STACIONÁRIUS)

$\xi_{t_2} \cdot \xi_{t_1} \neq R_{(t_2 - t_1)} = L(t_1, t_2) = R(T)$

$\xi_{t_2} \neq \xi_{t_1} + R(T)$ ha $t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$ akkor $\xi_{t_2} \cdot \xi_{t_1} = R\left(\frac{T}{2}\right)$

~~FÜGGVÉNY~~ STACIONÁRIUS JELEKRE (Folytonos L-van)
- $R = L$
- A hosszú STACIONÁRIUS FOLYAMAT!
- R, L meghatározható több feldolgozás alapján.
- SÁVHATÁROLT FEHÉR ZAJ



$$R_{(T)} = F^{-1}\{S_{\xi(f)}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(f)\, e^{j2\pi f T}\, df$$

$$= \int_{-B}^{B} S_0\, e^{j2\pi f T}\, df$$

$$= S_0 \left.\frac{e^{j2\pi f T}}{j2\pi f T}\right|_{-B}^{B}$$

- $L(t_1, t_2) = M(\xi_{t_1} \cdot \xi_{t_2}) = R(T)$
- DOBOZ:
KIMENŐJEL AUTOKORRELÁCIÓS FÜGGVÉNYE:

a) ξ_t adott, és ami ezzel történik: pl VISSZHANG (R is adott)

$$\eta_t = \xi_t + \xi_{t-T} \quad R(T) \to S(f)$$

$R_\eta(T) = ?$ $= R$

$R(T + \Delta T) \to S(f)\, e^{j2\pi f T}$
(T+ΔT akár 0 is lehet)
de előtte: ∃

tehát (vesszük 2 pillanatot)

$$L_\eta(t_1, t_2) = M\left[\left(\xi_{(t_1)} \xi_{(t_1 - T)}\right)\left(\xi_{(t_2)} \xi_{(t_2 - T)}\right)\right]$$

$$= R(t_2 - t_1) - R(t_2 - t_1 + T) + R(t_2 - t_1 - T) + R(t_2 - t_1)$$

FORMAILAG:
A különbségek szorzatából kapott párosítási szabály kell használni: M-ből R-lesz

a: $\xi(t_1)$ b: $-\xi_{(t_1 - T)}$ c: $\xi(t_2)$ d: $-\xi_{(t_2 - T)}$

$L_\eta(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) + R[t_1 - (t_2 - T)] + \ldots$

a $t_2 - t_1$ az indexeket (t_1, t_2) fel kell cserélni, összegzett felbontás

EZ A KIMENŐ JEL AUTOKORR. F.-E tehát

$\mathcal{F}\{L_\eta(t_1,t_2)\} = S_\eta(f)$
a dobozra így

$S_\xi(f) = \mathcal{F}\{R_\xi(t)\}$ $S_H(f) = \mathcal{F}\{R_\eta(t)\}$

[redacted]

$S_H(f) = \frac{S_\eta(f)}{S_\xi(f)}$ átviteli függvény

TEHÁT kimenő jel autok.f.:

$L_\eta(t_1,t_2) = M[(\eta_{t_1})\cdot(\eta_{t_2})]$ gen.

ha ismert a $\eta(t) = f(\xi(t))$

$\mathcal{F}$

$S_\eta(f)$ kim. sp. s.f.

– HA ADOTT:
$R_\xi(t)$, $R_H(t)$ akkor:
$R_\eta(t) = R_\xi(t) * R_H(t)$
$\mathcal{F}$
$S_\eta(f) = S_\xi(f) \cdot S_H(f)$

– WIENER SZŰRŐ:
IDEÁLIS ALULÁTERESZTŐ
NÉGYZETES KÖZÉPHIBA?

ZAJ

– EKVIVALENS ZAJHŐMÉRSÉKLET
S SÁVBELI TELJESÍTM. elosztva
$T = \frac{P_{zaj}}{kB}$

– BEMENETRE REDUKÁLT SAJÁT ZAJ HŐMÉRSÉKLETE
(4pólus saját zaj a bemeneten keletkezőnek modellezzük)
$T_{SAJÁT} = \frac{P_{saját\ zaj\ ki}}{kB\cdot G}$

– BEMENETRE REDUKÁLT ZAJ
$T = T_{x} + T_{SAJ} = \frac{P_{zaj\ ki}}{kB\,G}$

– ZAJTÉNYEZŐ
$F = \frac{P_{zaj\ ki}}{kBT_0\cdot G} = 1 + \frac{T_{SAJ}}{T_0}$
T_0 (T_0 – szobahőm) forrás és a 4pólus eredő zaját hasonlítja össze

– CSILLAPÍTÓ (PASSZÍV ELEMEK)
$P = kBT$ zajt termel
$G = \frac{1}{L}$ $kGT = kBT\frac{1}{L} + P$
$F = 1 + (L-1)\frac{T}{T_0}$
szobahőmérsékleten:
$F = L$

VALSZÁM ++

– σ^2 SZÓRÁS NÉGYZET
$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)\,dx$
$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$

– BINOMIÁLIS ELOSZLÁS:
$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $q = 1-p$
$\sigma^2 = npq$ $m = np$

– POISSON ELOSZLÁS:
$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $\lambda = \lim \frac{k}{n} = np$

– Ha $f(x,y) = g(x)\,h(y)$
és téglalap az integrálási terület:
$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx + \int_c^d h(y)\,dy$

– FELTÉTELES ELOSZLÁS:
$P(x \in D_1 \mid x \in D_2)$
$= \frac{P(x \in D_1 \cap D_2)}{P(x \in D_2)}$

[redacted]

– NORMÁLIS ELOSZLÁS (BINOMIÁLIS → FOLYTONOS)
[redacted]
$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$
(táblázatból)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}{2}}$

Ha $\sigma = 1$, $m = 0$:
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

– EGYENLETES ELOSZLÁS
$a - b$:
$\sigma = \frac{b}{2}$ $f(x) = \frac{1}{b}$

HÍRKÖZLŐ CSATORNÁK

– HÍRKÖZLŐ RENDSZER:
– hírtartalmak átvitelére
– az átvitel:
- EGYIRÁNYÚ
- VÁLTAKOZÓ IRÁNYÚ
  2 irány, de nem egy időben
- 2 IRÁNYÚ

ANALÓG CSATORNA HATÁSAI

1. LINEÁRIS TORZÍTÁSOK

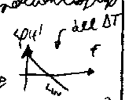
- IDŐINVARIÁNS: ΔT = áll.

A jel csillapodik, és késik.
H(f) csatorna átvitele frekvenciafüggő

ÁTVITELI KAR:

$H(f) = \alpha_0\, e^{-j 2\pi f T}$

$\varphi(f) = 2\pi f T$



(Az átviendő Ω ... impulzusok késleltetések)

VISZHANG:

$y(t) = \sum_i c_i \cdot x(t - T_i)$

(többutas terjedés, illesztetlen lezárások miatt)
Ha T >> 50 ms → visszhang-nak, külön hangnak halljuk; ha T < 50 ms → zengő hatást kelt.

- IDŐVARIÁNS

a (H(f)) csatorna átviteli függvénye időben nem állandó

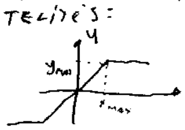
FÁZISJITTER:
– Minden frekvencián azonos fázistolás, ami időben összevissza változik (sztoch.)

FREKVENCIAELCSÚSZÁS:
Az előbbi fázistolás időben lineárisan változik. Ekkor minden frekvencia-összetevő azonos Δf frekvenciával tolódik el. (zenénél jól hallható, fontos lesz)

2. NEMLINEÁRIS TORZÍTÁSOK

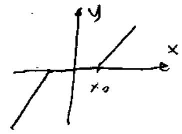
Ezek emlékezetmentesek: $X(t_2)$ nem függ $X(t_1)$-től.

TELÍTÉS:



Y_{max}-nál nagyobb Y_{max}-nál.

HOLTZÓNA HATÁS



$A \to A - a_0$ ha ez > 0
$\searrow$ 0 ha ez < 0

$y(t) = n(x(t))$

(Ez a függvény tetszőleges...)
Megjelennek az egyes f komponensek felharmonikusai a jelben: $2f_0$, $3f_0$

3. ADDITÍV ZAJOK

$y(t) = x(t) + v(t)$

Jeltől független zaj adódik a jelhez
(stacionárius, sztochasztikus)

JEL-ZAJ VISZONY:

$SNR = 10 \lg \frac{P_X}{P_Z}$ [dB] $P_Z \to P_N$

$\frac{S}{N} = \frac{P_X}{P_N}$

ABSZOLÚT TELJESÍTMÉNYSZINT:

$S_{jel} = 10 \lg \frac{P_x}{P_0}$ [dB]

(P_0 – MEGADOTT VONATKOZTATÁSI TELJ.)

$SNR = S_{jel} - S_{zaj}$

LOGARITMIKUS LÉPTÉKEK!

AMPLITÚDÓARÁNY:

$20 \lg \frac{U_1}{U_2}$ [dB]

TELJESÍTMÉNYARÁNY:

$10 \lg \frac{P_1}{P_2}$

VAGY

$20 \lg \frac{U_1}{U_2}$ $P = f(U^2)$

DIGITÁLIS CSATORNA

Működése időben ütemezett
– JELZÉSI SEBESSÉG: időegység (s) alatti továbbított szimbólumszám (KARAKT.)
V_{JEL} [BAUD]
– HÁNY BIT/SZIMBÓLUM:
N féle szimbólum $= \log_2 N = \mathrm{ld}\, N$
– ADATÁTVITELI SEBESSÉG (BIT/s)
$V_{ADAT} = V_{JEL} \log_2 N$ [BIT/s]
– EMLÉKEZETMENTES CSATORNA:
n BIT elektlolása nem függ n-1. bit, n-2... -től.
JELLEMZI AZ ~~ÁTMENET~~ SZIN

ÁTMENET-VALÓSZÍNŰSÉG:

$P = P(y \mid x)$ pl. $P_{01} = P(y=0 \mid x=1)$

bit-meghibásodási valószínűség: $1 - P$

$P_{01} = P_{10} = P$

– HIBAFELISMERÉS
az üzenetet K-HOSSZÚ blokkokra tördeljük és mindet kiegészítjük N BITRE egy függelékkel.
Hibafelismerés: a vett K BITBŐL az az (N-K) függelék képződik-e, mint ami jött?

– BINÁRIS SZIMMETRIKUS CSATORNA (BSC)
p-valósz. dcsatorna + 1 visszajelzőcsatorna (visszajelez, hogy jól jött-e át)

- N_0 BITET küldünk, pN_0-MEGY ÁT, paritásüzenetet kérünk. (N BIT) (ez is meghibásodhat)

így N BIT ÁTVITELÉHEZ

$\Sigma n = n \cdot \frac{1}{1 - H(P)}$ BITET kell átvinni

SZIMB. VAL. $\boxed{H(P) = \sum P_i \,\mathrm{ld} \frac{1}{P_i}}$ FORRÁS ENTRÓPIÁJA

A hatékonyság: CSATORNAKAPACITÁS

$C = \frac{n_0}{\Sigma n} = 1 - H(P)$

- K/N < C esetén és $N \to \infty$ képezhető olyan kód, hogy minden hiba felderíthető

FORRÁSKÓDOLÁS

– ÁTALAKÍTANDÓ jelkészlet elemei FORRÁSSZIMBÓLUMOK. A képzett jelkészlet: KÓDSZIMBÓLUMOK (KÓDOLÁSSAL alakítjuk át)
Ez a FORRÁSKÓDOLÁS
ÜZENET: kódolandó szimbólumok sorozata.

– PREFIX KÓDOK:
Bármely pozícióban eldönthető, hogy vége van-e ott-e egy kódszónak. ~~Tehát~~ Tehát az egyes kódszavak nem elsősorban egyenlőek, és nem hasonlítanak

– KRAFT EGYENLŐTLENSÉG:
akkor egyértelműen megfejthető 1 kód, ha:

SZÓHOSSZAK

$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1$

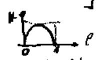
– NEM EGYENLŐ HOSSZÚ kódszavak esetén a KÓDSZAVAK VÁRHATÓ ÉRTÉKE:

$\lambda = \sum l_i P_i$

o nagy valószínűségű (gyakori) kódszavakat célszerű a legrövidebbre választani.

- FORRÁS ENTRÓPIÁJA:

$H(P) = \sum_i^n P_i \operatorname{ld} \frac{1}{P_i}$ [BIT / SZIMBÓLUM]



$H(P) \le \lambda \le H(P)+1$ SHANNON TÉTEL

jó a kódhatásfok, ha H(P)-nagy (ez a forrásra jellemző)

- K SZIMBÓLUMOS (F BITES, KARAKTERES) ÜZENETEKNÉL:

Az üzenetek entrópiája: $K\cdot H(P)$ tehát ez nagyobb, mint az eredeti forrásszimbólumoké.

ÚJ SZABÁLY:

$K\cdot H(P) \le \lambda_{K\,szimb.} < 1+K\cdot H(P)$

$H(P) \le \frac{1}{K}\lambda_{K\,szimb.} < H(P)+\frac{1}{K}$

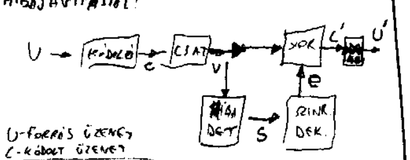
HIBAKORLÁTOZÓ KÓDOLÁS

- feladata:
  - HIBAJELZÉS
  - HIBAJAVÍTÁS
- REDUNDÁNS információval bővítjük az eredetit, hogy hibára átviteli közegen történő átvitel esetén is is HIBÁTLAN legyen az átvitel.
- HIBAJELZÉS: visszajelzünk az adónak, hogy mit kell újraküldenie
  HIBAJAVÍTÁS: bizonyos hibákat magától ki tud javítani a vevő.
- EGYSZERŰ ÁBRÁK:

FORRÁS

$U \to$ KÓDOLÓ $\xrightarrow{c}$ CSATORNA $\xrightarrow{v}$ DEK. $\to U'$

HIBAJAVÍTÁSNÁL:



U-FORRÁS ÜZENET
C-KÓDOLT ÜZENET
V-VETT SZÓ
S-SZINDRÓMA
e-HIBAVEKTOR

- A KÓDOLÁS: $\underline{U} \to \underline{C}$
  K ELEMŰ, N ELEMŰ, N>K
- SZAVAK HAMMING TÁVOLSÁGA: $d(a,b)$ azon bitek száma ahol a 2 kar. különbözik
- KÓD: n-hosszúságú vektorok k elemű halmaza. (nem minden n elemű vektor eleme, nem minden kódszó) jelölés $C(n,k)$ KÓD PARAMÉTEREI

- DEKÓDOLÁS! vettből -t C'-be képezzük le. majd C'-hez U-üzenetet rendelünk (KÓDOLÁS INVERZE)
- KÓD [illegible]:
  a kódszavak Hamming-távolsága a lehető legnagyobb legyen
- ha n kicsi, a dekódolás táblázatos lehet ($V \to C'$ HOZZÁREN.) (nagy legalább K kicsi)
- KÓDTÁVOLSÁG: d_{MIN}: kódszavak páronkénti H-távolságának a minimuma
- HIBAJELZÉSNÉL: $d_{MIN} >$ MAX. HIBASZÁM/ÜZENET
  akkor ha hibaszám ≤ MAX, nem keletkezhet olyan vett szó, ami éppen egy másik kódszóként értelmezhető (hibátlan)

$d_{MIN}-1$ számú hibát lehet max. jelezni.

- HIBAJAVÍTÁSNÁL: $\frac{d_{MIN}-1}{2}$ EGÉSZRÉSZÉNEK megfelelő hiba javítható ($d_{MIN} \ge 2$(MAX HIBASZÁM) + 1)

VISSZAÁLLÍTÁS: (egyszerűen) a V-hez legközelebbi C kódszót rendeljük hozzá.

- LINEÁRIS KÓDOK

KÓDOLÁS! [U, C - SORVEKTOROK]

$\underset{n\times1}{\underline{C}} = \underset{k\times1}{\underline{U}} \cdot \underset{k\times n}{\underline{G}}$

BÁZISVEKT.

KÓDSZAVAK: $\underline{0}$, G sorai, és ezek lineáris kombinációi $a\cdot g_1 + b\cdot g_j$, $a,b \in \{1,0\}$ (tehát a kód lineáris teret alkot)

LINEÁRIS A KÓD, HA

- ugyanahhoz a kódhoz több G-t találhatunk, ahogy több bázis 1 térhez.
- viszont 1 adott $U \to C$ összerendeléshez csak 1 G.

- SZISZTEMATIKUS KÓDOK (LIN!)

HA $\underline{G} = (\underline{E} : \underline{B})$

$E_{k\times k}$ ÜZENETSZEGMENS, $k\times(n-k)$ PARITÁSSZEGMENS

- V kódszó-e: ($V \in C$?) $H = (-\underline{B}^T : \underline{E})$
  ha $\underline{H}\,\underline{V}^T = 0$ akkor IGEN
  H-PARITÁSELLENŐRZŐ MÁTRIX

- DEKÓDOLÁS

$e = v - c$ HIBAVEKTOR

ott 1 ahol v, c különbözik

(MIVEL $HV^T = Hc^T + He^T = He^T$)

$\underline{S} = \underline{e}\,\underline{H}^T$ - SZINDRÓMA

$(n-k)\times 1$ SORVEKTOR

- SZINDRÓMADEKÓDOLÁS:

1: S MEGHATÁROZÁS

$V \to HV^T = He^T = (eH^T)^T = S^T$

vagy $\underline{V} \to \underline{V}\cdot\underline{H}^T = \underline{S}$ S

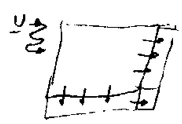
2: DEKÓDOLÁSI TÁBLÁZAT: $\underline{S} \to \underline{e}$ $\boxed{V \xrightarrow{VH^T} S \xrightarrow{S=eH^T} e}$

3: $\underline{C}' = \underline{V} - \underline{e}$ DEKÓDOLÁS

4. $C' \to U$ HOZZÁRENDELÉS (2. DEKÓDOLÁS)

EGYSZERŰ LINEÁRIS KÓDOK

1. ISMÉTLÉSES KÓD: $C(n,1)$
   $k=1$, $n \gg k$ pl $n=3$
   n szor küldjük az 1 db bitet.
   $\{111, 000\} = C$ így 1 bit hibát javít.
2. EGYSZERŰ PARITÁSKÓD: $C(n, n-1)$ $\underline{C} = (\underline{U} ; P)$
   P - 1 PARITÁSBIT
   1 BIT JELEZHETŐ
3. 2DIM. PARITÁSKÓD



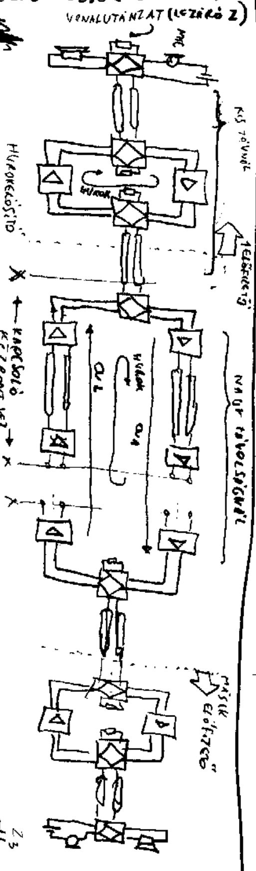
PARITÁSBITEKET KÉPZŐNK

$d_{MIN} = 4$ → 3 JELEZ 1 JAVÍT

$\underline{\underline{-M}} = \underline{\underline{M}}$ HA $\underline{\underline{M}}$ - BINÁRIS MÁTRIX!!

- BESZÉDÁTVITELNÉL A CÉL A MONDAT-ÉRTHETŐSÉG 95-97%.

- DUPLEX 2 IRÁNYÚ HANGFREQ TÁVBESZÉLŐ ÖSSZEKÖTTETÉS



Ez 4 kapu, ami: 2 egyik kapura adott teljesítményt megfelezi a 2 szomszéd kapu között, a szemköztire nem kapcsol jelet, ha $Z_1=Z_2$ és $Z_3=Z_4$

2-4 huzal átalakítást a hibrid (gyűrű, ánnkör) végzi

- A szomszéd kapura jutó jel 3 + 3,5 dB csillapítással jut tovább.

- Az előfizetői részről a $Z_H >> Z_h$ akkor a mic nem ad ki (sok) hangot.

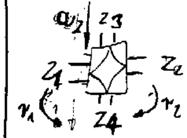
- A hurokerősítő: Mindkét erősítőjére jut a beszélő jelből, de csak az kerül vele kapcsolatba, amelyik bemenetére kapja. Az egyes erősítők kimenetei a hibrid által el vannak szigetelve egymástól. Az erősítőpár IN/OUT impedanciája = (Z_0)

- A HIBRIDEN a lezáró (Z_L) hullámellenállásnak közelítenie kell a vezeték hullámimpedanciáját. nem pontosan, ezért lesz áthallás.

Ezt jellemzi a tanszínányi csillapítás ($f=\frac{\omega}{2\pi}$)

$a_z(f) = 20 \lg \frac{U_3}{U_4}$ ← EREDETI ← ÁTHALLATSZÓ

$a_z = Z - 20 \lg (r_1 - r_2) \approx 25dB$



$r_1 = \frac{Z_1-Z_4}{Z_1+Z_4} \approx 1$

$r_2 = \frac{Z_2-Z_4}{Z_2+Z_4} \approx 1$

$Z_1=Z_2$, $Z_0=Z_L$ kellene!!

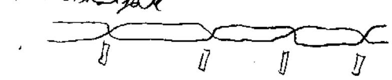
(itt Z_3, Z_4 1 közelítéssel van, pontosan beállítható. ezért $Z_3-Z_4 << Z_1-Z_2$)

(Ha $Z_2=\infty$ → Z_1 felől van -7dB azért)

Emiatt a hurokerősítő erősítése, de a HUROKCSILLAPÍTÁSA 25+25=50dB, az erősítők erősítése nem lehet akkora: 20+20=40dB

- TEM HULLÁMVEZETŐK: 2 fémvezeték, köztük szigetelő. Ezen csak a TEM (TRANSZVERZÁLIS ELEKTRO MÁGNESES) alapmódus terjed.

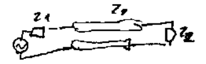
- LÉGVEZETÉK veszi a rádióműsorokat, ezért MAX 150KHZ-IG használható. Van áthallás a vezetékek között, ezt szakaszok után keresztezéssel csökkenthetjük



- SZIMETRIKUS KÁBEL: (SZOLAG K.) Előfizetői önmagában szakaszokon. Ha több ilyen fut egymás mellett, akkor áthallás lehet. Ez 600KHZ felett. Tehát ez alatt használható. Ha nem kötegelt: MAX 5MHz-ig.

- KOAX KÁBEL belső réz vezető, külső vezetőköpeny, szigetelőgyűrű. 60KHZ < f < 60MHz

- Használatuk:



$Z_1 = Z_0 = Z_2$

így lesz reflexiómentes.

A jel csillapodik:

$Y(j\omega) = X(j\omega)\, e^{-\gamma l}$

$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$

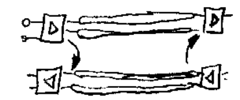
$\alpha = \sqrt{RG}$ $\beta = \omega\sqrt{LC}$ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$\left[\frac{\Omega}{km}\right]$ $\left[\frac{rad}{km}\right]$ Ω

$\alpha = 10^{-2} \dots 10^{1}$ dB/km

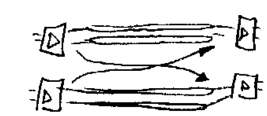
- vezetékkel áthidalható távolság: (4VEZ)

Ezt szakaszokra osztják. Ezt hossza a KÖZELVÉGI ÁTHALLÁS korlátozza.



a_k - JELLEMZI

TÁVOLVÉGI ÁTHALLÁS IS VAN:



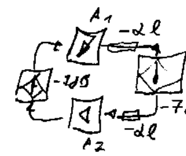
a_t JELLEMZI

- A hurkolt határon a_1, a_2-t 7dB erősítésre csökkentjük (Minden 2 2 huzalos szál között 4 huzalos szakaszt, és fordítva)

- 2 HIBRID között szál vagy egyes szakasz, vagy hurok. A hurkok rontják a stabilitást, ezért 3 a MAX számuk.

- áthallási csillapítást bele kell kalkulálni körök stabilitásába!

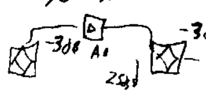
- Ha a KAPCSOLÓ KIZÁRT SZAKADÁSSAL zár le 1 előfizetőt: ERŐSÍTÉSEK



$\Sigma A < 0$ kell

$+14dB + 2\alpha l > A_1 + A_2$ legyen.

De, ha van, a városi tanszínányi csillapítással



25 - 7 = 18dB-t lehet erősíteni 1 helyen. úgy, hogy ne gerjedjen. 63x TELJESÍTM. ARÁNY, 7,9 FESZ.A.

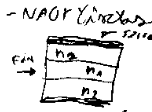
SZINTENTARTÓ SZAKASZ:

$A_1 - \alpha l = 7dB$

- a 4 vezetékes szervezett lehet MULTIPLEXÁLNI.

DIELEKTROMOS HULLÁMVEZETŐ

- NAGY távolsági üvegszálban $\alpha = 92dB/km$



Teljes visszaverődés miatt

NUMERIKUS APERTÚRA: (BEESÉSI SZÖGRE)

NA: $\sin\delta = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

- Ebben vannak ~~[illegible]~~ HIBRID módusok terjednek, TEM-mód ~~[illegible]~~(KB 1000) ezek futási ideje eltérő. Ez módus diszperziót okoz.
- $B = 0{,}44/\Delta\tau = f_{MAX}$

ahol $\Delta\tau$ a futásidő-különbség τ_{MIN}, τ_{MAX} sugarak (módusok) közt.

JELLEMZŐJE:

$K = B \cdot l$ — sávszélesség-hossz jellemző

adott l-ről B

(egyes és üvegszálonkénti sugarak közti különbség $\neq -k$)

- kromatikus diszperzió

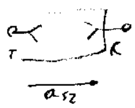
$n(\lambda)$ nem állandó, és a fényforrás $\Delta\lambda$ ~~[illegible]~~ spektruma: $\Delta\lambda \gg 0$

- a kábelek 1…3 km-es hosszokban gyártják. Ezeket összekötik, hegesztik.

RÁDIÓCSATORNA

T-TRANSZMITTER
R-RECEIVER

- ANTENNA: Elektromágneses hullámok kisugárzására és vételére alkalmas.
- RÁDIÓCSATORNA

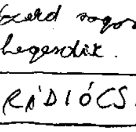


a_{sz} - SZAKASZCSILLAPÍTÁS

$$a_R = 10\lg \frac{P_{BE}}{P_{VETT}}$$

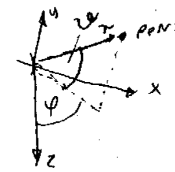
- Antennák sugárzása és érzékenysége különböző irányokban nem egyezik. (IRÁNYKARAKTERISZTIKA írja le) az antenna táplálása az érdekes.
- ~~[illegible]~~

IZOTRÓP ANTENNA:



$S = S(r)$

- iránykarakterisztika:



$E(r, \vartheta, \varphi)$

$F(\vartheta, \varphi) = \sqrt{p\,\vartheta, \varphi}$

AMPLITÚDÓ-IRÁNYKAR.

$S = S(r) \cdot F(\vartheta, \varphi)$

Ahonnan a legerősebb, az a főnyaláb, főirány.

- Megadunk főnyaláb 3dB-es (10 dB) ~~[illegible]~~, érzékenységi szöget, KÚPSZÖGET 0dB-es érz. szög

- IRÁNYHATÁS

$$D = \frac{S_{FŐIRÁNY}(ADÓ)}{S_0} \qquad S_0 = \frac{P_{KI}}{4\pi r^2}$$

AZONOS P_{KI} (ADÓ)

S-TELJ. SŰRŰSÉG

S_0: IZOTRÓP ANTENNÁBÓL vehető, ADÓ

- ANTENNANYERESÉG:

$$G = \frac{S_{FŐIRÁNY}(ADÓ)}{S_0} \qquad S_0 = \frac{P_{BE}}{4\pi r^2}$$

AZONOS P_{BE} ESETÉN (ADÓ)

S_0: IZOTRÓPA

- ANTENNAHATÁSFOK:

$$\eta = \frac{G}{D} = \frac{P_t}{P_{BE}}$$

VAGY
$\frac{P_A}{4\pi r^2} = S_V$
$P_V = S_A \varphi_A$

- ANTENNA

ADÓ: $P_{BE} \rightarrow \boxed{ANT} \rightarrow P_{KI}$, P_{VESZT}

D, G összehasonlítás: adott antenna és IZOTRÓP ANTENNA.

VEVŐNÉL: $P_{VETT} \rightarrow \boxed{ANT} \rightarrow P_{KI}$ (áramkör), P_{VESZT}

- VEVŐANTENNA hatásos felülete

Z_{BE}, U_R (ürességi), P_R (P_{MAX}) jellemzik

HATÁSOS FELÜLET: A_R

$$A_R = \frac{P_R}{S}$$

P_R ← P_{VETT}; S ← BEESŐ TELJ. SŰRŰSÉG

$$\left(P_R = \frac{U_R^2}{2 Z_{BE}}\right) \qquad A_R = G_R \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

(Ha polarizációilleszkedés van)

$$\boxed{\frac{G}{A_R} = \frac{4\pi}{\lambda^2}}$$

- KÖZVETLEN (SZABADTÉRI) HULLÁMTERJEDÉS

akadálymentesen terjed szabad térben

szabadtéri térerősség:

$$E_0 = \frac{\sqrt{60 P_{BE} G_T}}{r}$$

vevőből kivehető MAX teljesítmény:

$$P_R = P_{BE_T} \frac{G_T A_R}{4\pi r^2}$$

a SZABADTÉRI CSILLAPÍTÁS:

$$a_{sz} = \frac{(r\lambda)^2}{A_T A_R} = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{G_T G_R}$$

$$a_{sz} = 20\lg\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right) - G_T - G_R \;[dB]$$

- TALAJREFLEXIÓ

földreflexiós tényező

$$\Gamma_t = \frac{E_{VISSZAV}}{E_{BEESŐ}}$$

Ez kis beesési szögekre $-1 = \Gamma$

- 2 UTAS TERJEDÉS (SZABAD + TALAJREFLEKTÁLT)

látóhatáron belüli összeköttetés. A 2 hullám interferál, az útkülönbségekkel kell számolni.

$$E_{VEVŐ} = E_{SZ} + E_R = E_{SZ}\left(1 - e^{j\beta(\Delta s)}\right)$$

$$\Delta s = \Delta = \frac{2 h_T h_R}{r}$$

$l_1 = \sqrt{(h_T - h_R)^2 + r^2}$

$l_2 = \sqrt{(h_T + h_R)^2 + r^2}$

$\Delta = l_1 - l_2$

így

$$a_{SZ} = 20\lg \frac{r^2}{h_T h_R} - G_T - G_R$$

$$a_{sz} = \left(\frac{r^2}{h_T h_R}\right)^2 \cdot \frac{1}{G_T G_R}$$

- REFRAKCIÓ elhajlás

a levegőrétegek eltérő törésmutatói miatt

A számításokat nem görbült úton végezzük, de nem eredeti, hanem EFFEKTÍV FÖLDSUGÁRRAL (8500 km) számolunk.

- DIFRAKCIÓS terjedés

Ha akadály van az úton, pl. épület, attól még tovább terjed.

- FELÜLETI HULLÁMTERJEDÉS

föld és levegő határfelületén terjednek. ha $\lambda > h_T$ kHz…MHz

itt ez az elsődleges terjedési mód. $d_{max} = n \cdot 100$ km (HATÓTÁVOLSÁG)

$A(p)$ - felületi hullám csillapítási tényezője (GENTOLULT)

nagy távolságra $A_p = \frac{1}{2p}$, $p = \frac{\pi d}{60\lambda^2\sigma}$

$$a_{sz} = 10\lg\left(\frac{d\lambda}{4\pi A_p}\right)^2 - G_T - G_R \;[dB]$$

$$= 20\lg \frac{240\lambda 6}{d^2} - G_T - G_R$$

- TROPOSZFÉRIKUS SZÓRÓDÁS

A légköri rétegek közti törésmutató nem egyenletesen változik, ugrás van benne.
~ ezen a határfelületen visszaverődik az EM jel.
200MHz-10GHz használható
jelentősen ingadozik a vételi térerősség.
MAX 800km.

- IONOSZFÉRIKUS SZÓRÓDÁS

Az ionoszférából szóródik vissza az EM.
Az ionoszféra állapota szorosan összefügg a NAPTEVÉKENYSÉGGEL
Erőssége a levegő felső
~ 40...100 km-es magasságaiban lévő ionizált gázatomok (molek) számától függ.
D, E, F rétegek vannak
A nap ibolyántúli, és röntgensugárzása, opt. meteoritok okozzák az IONIZÁCIÓT.

ZAJ

- MINDEN PASSZÍV kétkapu
~ 2 kapcsa közt mérhető, nem függ az áramától.
$S(f) \cong kT$
(teljesítmény-sűrűség)
$P_{ZAJ} = \int_0 G(f)S(f)\,df = GBkT$
 L teljesítmény erősítés
- Minden átviteli rendszer hozzáadja a saját zaját a bemenetről kapott, és felerősített értékhez.
- SOKOR (ITT SZÁMÍTÁSKOR NORMALIZÁLT jellel számolnak.
~ ez: $S = \frac{U}{\sqrt{R}} = \sqrt{P}$ $P=S^2$
 R - ellenálláson U mérhető

így a. $P_{ki} = A(S_{be}+N_{be})+N_{saját}$

- Ez a zajhozzáadódás olyan: mintha megnövekedett volna a ~~zajhőm~~ bemeneti ZAJHŐMÉRSÉKLET a bemenetre redukált ~~zajhő~~ zajhőmérséklettel:

$P_{ZAJBE} = BkT \rightarrow Bk(T+T_{red})$

$P_{ZAJKI} = GBk(T+T_{red})$

$P_{KIM} = P_{ZAJKI} + P_{JELKI}$

$(P_{JELKI} = G P_{JELBE})$

- ZAJTÉNYEZŐ

$$F = \frac{P_{ZKI}}{GP_{ZBE}} = \frac{GBk(T+T_{red})}{GBkT}$$

[dB]
HA $T = 290K$ $\Big| = 1 + \frac{T_{red}}{T}$

így $T_{red} = (F-1)T_0$

- TÖBB HÁLÓZAT EREDŐJE:

$$T_{erede} = T_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{T_{ired}}{\prod_{m=1}^{i-1} G_m}$$

$$F_e = F_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{F_i - 1}{\prod_{m=1}^{i-1} G_m}$$

$$P_{ZKI} = F \cdot GP_{ZBE}$$
$$= P_{ZBE} \cdot Bk T_{erede} \prod_{i=1}^{n} G_i$$

- Kritikus pontokban a első fokozat erősítése (NAGY legyen) és zajtényezője (kicsi legyen).
- CSILLAPÍTÓ

$L = \frac{1}{G}$ ← erősítés
L csillapítás

$L[dB] = -G[dB]$

$F_L = L$ ha a csillapító $\approx 290K$-en van.

FELADATOK

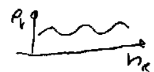
- SZABADTÉRI RÁDIÓÁTVITEL:

$S = \frac{P_{adó} \cdot G}{4\pi r^2}$ $\frac{P_{adó}}{P_{vevő}} = a_{sz}$

$P_{vevő} = S \cdot A_R$ $A_R = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}$

$U_R = \sqrt{P_{vevő} Z_{ANT}}$ $P_{ki} = \frac{U_{ki}^2}{R}$

- 2 UTAS TERJEDÉS
ÚTKÜLÖNBSÉG: Δ (PITAGORASZ)
h_R-t változtatva P_R-változik



Ahol P_R-nek maximuma van (állandó h_R mellett λ-t változtatom) az az ÜZEMI HULLÁMHOSSZ.
ott $\Delta = k \cdot \lambda$.
ilyenkor $P_1 + P_2 = P_R$
P_1 - közvetlen P_2 - visszavert
$(P_1(R_1), P_2(R_2, \Gamma))$

$E_R = E_0 + \underbrace{\Gamma}_{=-1} \cdot E_0 e^{-j2\pi \frac{\Delta}{\lambda}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda}\right)$

$a_{2utas} = \frac{1}{G_T G_R}\left(\frac{\lambda r}{h_T h_R}\right)^2$
$= \frac{1}{G_T G_R}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^2$

$\Delta = \frac{2h_T h_R}{r}$

Ha úgy akarjuk üzemeltetni a (FIX ADÓ, VEV) rendszert, hogy ~~E_R ...~~
E_R a lehető legnagyobb legyen:
$\Delta_{INT.MIN}$ $\Delta = \lambda$

$E_R(\lambda) = E_0 \underbrace{\sin\frac{\pi\Delta}{\lambda}}_{=1} \Rightarrow \frac{\pi\Delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$

ÜZEMI HULLÁMHOSSZ $\boxed{2\Delta = \lambda}$ ← λ_{max}

- KÁBEL TERJEDÉSI ZAJA
Ami dB-ben van rodva át kell számítani. (P arány, 10log)
~~veszteség~~ = L

- KÓDOK
kódhatásfok
$\eta = c = \frac{k}{n}$
- CSATORNAKAPACITÁS
ellenőrzéses csatorna. MEGTESZSZÓ
q - VALÓSZÍNŰSÉG
qn
átvitel: $n + qn + q \cdot qn + \dots = \sum_{i}^{\infty} n q^i = \frac{n}{1-q} = m$

$c = \frac{n}{m}$

– ENTRÓPIA = ÁTLAGOS SZÓHOSSZ

$H(P) = \lambda$

lehet-e adott szóhosszakkal kódot szerkeszteni:

lehet ha a KRAFT egyenlőtlenség teljesül. $\sum 2^{-l_i} < 1$

$\lambda = \sum p_i l_i$

$H(P) = \sum p_i \, ld\left(\frac{1}{p_i}\right)$

Ha nem tudjuk p_i-t, akkor lehet $p_i = p_j = \dots \frac{1}{m}$

akkor $\lambda = \frac{1}{N}\sum l_i$ (m-féle szimb.)

ha nem, akkor $H(P) = \sum p_i \, ld\frac{1}{p_i}$ és $H(P) \le \lambda < H+1$

Ha $l_i = ld\frac{1}{p_i}$ (akkor jól közelíthető λ a H-val)

akkor $p_i = 2^{-l_i}$

$H(P) = \sum p_i \, ld\frac{1}{p_i} = \left(\sum p_i l_i\right)$

– SHANNON KÓD SZERKESZTÉS

forrásszimbólumok p_i-je adott

- BEVEZETJÜK A SZÁMOT: $F_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k$ előzőek p-jének az összege; $F_1 = 0$; minden szimbólumra.
- Előtte pontosan p_i szerint csökkenő sorrendbe kellett u-kat állítani

u_i	p_i	F_i
A	p_1	0
B	p_2	F_2
C	p_3	F_3
D	p_4	F_4

- $l_i = ld\frac{1}{p_i}$ felkerekítve a kódszóhossz értéket kiszámolja

u_i	p_i	F_i	l_i
⋮	⋮	⋮	⋮

- F_i felírása kettes számrendszerben ($F_i < 1$, tizedes)

$0,\dots$

HÁNY BITOT VAN MEG BENNE: $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}\dots$

u_i	p_i	F_i	l_i	$F_{i\,BIN}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- C_i KÓDSZAVAK: F_i-ből l_i ELSŐ l_i db BIT.

– KELL NEKÜNK ? db BIT hibajavító felírása

MIN $e+1$ legyen a kódtáv (C_i kódszavak HAMMING távolsága)

$\frac{d_{min}-1}{2}$ db hiba javítására alkalmas

– lineáris kód

$C_i = A C_k + B \cdot C_l$

$0 \in C$ és $\underline{G} = (\underline{E} | \underline{B})$

– kódszavak száma k, hossza n

– n-k féle szindróma lehet.

– HÁNY 1-2-3 BITES HIBÁT JELEZHET?

MAX $z = 2^{n-k}$ - db jelezhető (ennyi szindróma van)

1 BITES H: n féle $n = h_1$

MARAD $z - h_1$

2. BITES $n \cdot \frac{n-1}{2} = h_2$

akkor jelezhető mind, ha van elég szindróma

MARAD $z - h_1 - h_2$

3. BITES: $n\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = h_2$

MARAD $z - h_1 - h_2 - h_3$

...

– SZINDRÓMADEKÓDOLÁS

$v \to vH^T = s$

$s = eH^T \Rightarrow s(H^T)^{-1} = e$

$c' = v - e$

Ha BLOKK KÓDOT HASZNÁLUNK:

S - hányadik eleme 1? = x

- n+x -edik elem VOLT a hibás v-ben, azt invertáljuk.

(több hibát is jelezhet egyszerre)

– KÓD SZISZTEMATIKUS, ha $\underline{G} = (\underline{E} | \underline{B})$

ha nincs benne $\underline{E}$, még szisztematikussá tehető, a $\underline{G}$ sorait más sorok LIN. KOMB.-val ÖSSZEADJUK, amíg kijön az $\underline{E}$ az elején

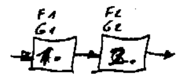
– KÓDOLÁS

$\underline{c} = \underline{u} \cdot \underline{G}$ (SORVEKTOR)

– $\log_B A = \frac{\lg A}{\lg B} = \frac{\ln A}{\ln B}$

$ld\, A = \frac{\ln 2}{\ln A}$

– ZAJ ÖSSZEADÓDÁS



$F_e = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$ (G_2-vel nem számol)

NEM dB-ben

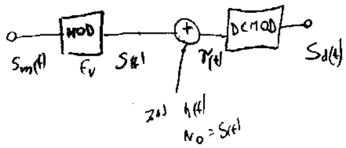
tehát mindent át kell számítani normál formába.

CSILLAPÍTÓ

$G = 1$ $G = -L$ (dB)

$F = L$

ANALÓG MODULÁCIÓS ELJÁRÁSOK



— REFERENCIA ZAJ TELJESÍTMÉNY

$$P^*_{zaj} = 2 B_{BE} \frac{N_0}{2} = B_{BE} N_0$$

A DEMOD BEMENETÉN

— SZINUSZOS VIVŐJŰ MODULÁLT JEL ÁLTALÁNOSAN:

$$S_v(t) = a(t) \cos[\Theta(t)]$$

(pillanatnyi amplitúdó, pillanatnyi fázis)

— VIVŐ PILLANATNYI FREKVENCIÁJA:

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \Theta(t)$$

$$\omega_p = \frac{d}{dt} \Theta(t) \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

— AMPLITÚDÓ MODULÁCIÓ: (AM)
$a(t)$ változhat, $\Theta(t)$ nem

SZÖGMODULÁCIÓ (FM, PM)
$\Theta(t)$ változhat, $a(t)$ ~~nem~~

— AM:

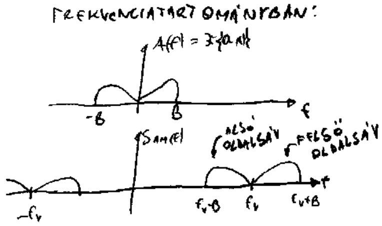
pillanatnyi; vivő átlag ω

$$\Theta(t) = \omega_p t + \varphi = \omega_v t + \varphi$$

általában az indulási fázisszög φ közömbös, $(=0)$

$$S_{AM}(t) = a(t) \cos(\omega_v t)$$

FREKVENCIATARTOMÁNYBAN:



$$S_{AM}(f) = \frac{1}{2} A(f - f_v) + \frac{1}{2} A(f + f_v)$$

tehát $f \to f \pm f_v$

(MÁSKÉPP:

$$S_{AM}(f) = \frac{1}{2} (A\, f_v - f) + \frac{1}{2} A(f_v + f)$$)

a jel sávjával lesz 2db félamplitúdójú sáv, egymás tükörképei f_v körül (FREKVENCIA ELTOLÁS f_v-VEL) általános spektrumeltolódás, keverés...)

feltétel:
$f_v > 2 f_M$ kell legyen.

— $a(t)$ hogy függ $S_m(t)$ moduláló jeltől:

- egyszerűbb lenne ha: $a(t) = S_m(t)$ de akkor burkolódetektorral nem lehetne demodulálni, persze HETERODIN VEVŐVEL még lehet. BURKOLÓVAL $|S_m(t)|$-et kapnánk.
- $a(t) = U_v + S_m(t)$

feltétel: $\hat{S}_m(t) < U_v$

U_v-KONSTANS hozzáadott DC szint

így

$$S_{AM}(t) = U_v \cos(\omega_v t) + \frac{1}{2} U_m \cos[(\omega_v + \omega_m)t] + \frac{1}{2} U_m \cos[(\omega_v - \omega_m)t]$$

$U_m = \hat{S}_m(t)$

A VIVŐ IS MEGJELENIK A JELBEN

— AM FAJTÁI:

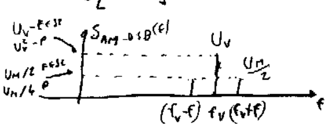
- AM-DSB

KÉTOLDALSÁVOS AMPLITÚDÓMODULÁCIÓ
AZ EGYENLET $(S_{AM}(t))$ mindhárom tagját felhasználjuk és kisugározzuk.

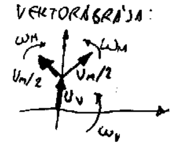
$$B_{AM} = 2 B_{BE}$$

$$m_a = \frac{U_M(t)}{U_v} \quad \text{MODULÁCIÓS MÉLYSÉG,}$$

$m_a \in [0..1]$



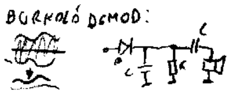
VEKTORÁBRÁJA:



VEKTORÁBRÁK:

- ω_v-vel forog körbe AZ EREDŐ
- $a(t)$ vel az AMPLITÚDÓ VÁLTOZIK ($U_m/2$)
- az U_v vektor végéhez rögzítve a 2 db $U_m/2$ hosszú MODULÁLÓ vektor az U_v vége körül forog ω_m-mel, a 2 vekt. egymással ellentétesen.
- az eredő állandó ω_v-vel forog

BURKOLÓ DEMOD:

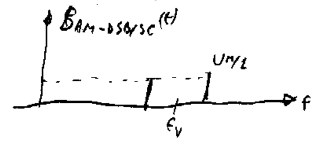


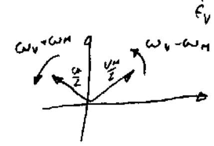
- AM-DSB/SC

2 oldalsávos AM, elnyomott vivővel.
vivőállandósítás: szűréssel, vagy kiegyenlített szorzással.

$$B_{KI} = 2 B_{BE}$$

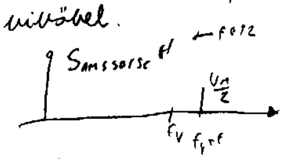
nem kell feleslegesen teljesítményt pazarolni a vivő kisugárzására.

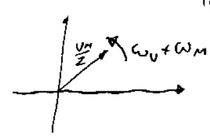




- AM-SSB/SC

1 oldalsávos AM, elnyomott vivővel.





— DEMODULÁLÁS:

szorzódemodulátorral (keverő, heterodin vevő), de az AM-DSB-t lehet burkolódetektorral is.

$$S_d(t) = \frac{1}{2} a(t) \underbrace{\cos\varphi}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} a(t) \cos(2\omega t + \varphi)}_{\text{leszűrjük}}$$

így $\frac{a(t)}{2}$-t kapjuk az alapsávban

— JEL-ZAJ VISZONY:

a demodulátor bemenetén az SNR = a demod. kimenetén lévővel.

$$SNR = \frac{P_{JEL}}{P_{zaj}} = \frac{M[a^2(t)]}{2 f_M N_0}$$

csak akkor, ha az összes teljesítmény hasznos (AM-DSB/SC)
~~Ha~~ az m_a nő, SNR is nő.

AM SSB/SC-nél

$$SNR = \frac{SNR_{DSB}}{2} = \frac{M[a^2(t)]}{2 f_M N_0}$$

(N_0 - a zaj teljesítménysűrűsége)

tehát SSB-nél rosszabb a JEL-ZAJ VISZONY

SZÖGMODULÁCIÓK QAM
(KVADRATÚRA MODULÁCIÓ)

- f_p és ezzel φ_p is változik a modulálójel szerint. (f_p - PILLANATNYI)

$$f_p = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\Theta(t) = \boxed{k_{FM} S_m(t) + f_v} = f_p$$

VIVŐ ALAPFREKV.

FREKVENCIAMODULÁCIÓ (FM)

FÁZISMODULÁCIÓ (PM)

$$\boxed{\Theta(t) = k_{PM} S_m(t) + \omega_v t}$$

[redacted]

$$S_{FM}(t) = U_v \cos\left(\omega_v t + 2\pi k_{FM}\int_0^t s_m(\tau)d\tau\right)$$

$$S_{PM}(t) = U_v \cos\left(\omega_v t + k_{PM} S_m(t)\right)$$

FM: vivő pillanatnyi frekvenciája az f_V körül ingadozik $a(t)$-től függően. k_{FM}, k_{PM}: ÁLLANDÓK.

$f_d = k_{FM} S_m(t)$ - PILLANATNYI FREKVENCIALÖKET

$f_D = k_{FM} S_m(t)_{MAX}$ - MAXIMÁLIS FREKVENCIALÖKET

$\varphi_d = k_{PM} S_m(t)$ — PILL. FÁZ. LÖKET

$\varphi_D = k_{PM} S_m(t)_{MAX}$ - MAX. FÁZISLÖKET

- MODULÁCIÓS TÉNYEZŐ:

$$m_f = \frac{f_D}{f_m} = \frac{k_{FM} U_m}{f_M}$$

$$m_p = k_{PM} U_M$$

$\left(S_m(t)_{MAX} = U_M \text{ - MAX MODULÁLÓ FESZ}\right)$

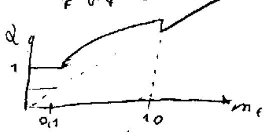
- SÁVSZÉLESSÉG:

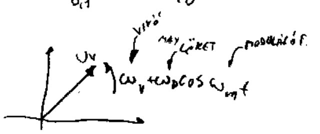
$$f_B = B = 2\alpha f_m$$

$\alpha = 1$ ha $m_f < 0{,}1$

$\alpha = m_f$ ha $m_f > 10$

$\alpha = 1 + m_f + \sqrt{m_f}$ $\boxed{m_f = 1\text{-re } \alpha = 3}$



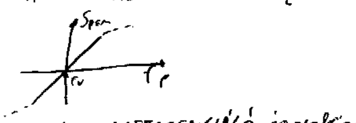


- FM DEMODULÁLÁSA:

olyan áramkör kell, ami a bemeneti f_p-vel arányos feszültséget ad ki

Ez a FREKVENCIA DISZKRIMINÁTOR

$$S_{DEM}(t) = k_{DISZKR} \cdot 2\pi f_p = k_{DISZKR} 2\pi\left[f_v + k_{FM} S_m(t)\right]$$



PL. ha DIFFERENCIÁLÓ áramkörre vezetjük, majd BURKOLÓ DETEKTORRA

- ZAJ:

a MODULÁLT jelhez GAUSS zaj adódik, ami FÁZISZAJT IS OKOZ.

$$\varepsilon(t) = \frac{n^*(t)}{U_V}$$

DEMODULÁTORON

$$SNR_{KI} = SNR_{BE} \cdot \frac{k_{FM}^2 M\left[S_m^2(t)\right]}{f_M^2}$$

MODULÁLÓ F.

$$SNR_{BE} = \frac{U_V^2}{2 f_M N_0} \qquad SNR_{KI} = SNR_{BE} \cdot \frac{f_{D_{EFF}}^2}{f_M^2}$$

f_M - MODULÁLÓ JEL F.

U_V - vivő AMPLITÚDÓ

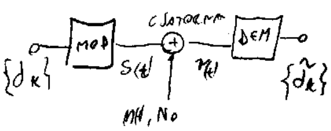
N_0 - zaj spektrálsűrűsége

DIGITÁLIS MODULÁCIÓ

- Digitális jelek átvitelére
- ALAPSÁVI / VIVŐS RENDSZEREK

ALULÁTERESZTŐ CSATORNÁN TOVÁBBÍTJUK

SÁVÁTERESZTŐ JELLEGŰ CSATORNÁN (VAGY KIOSZTOTT SÁVBAN)



a forrásból T időnként érkeznek a $\{d_k\}$ szimbólumok

$S(t)$ - MODULÁLT jel. $\{\tilde{d}_k\}$ - BECSÜLT szimbólumsorozat

- A rendszer minőségét a P_b (szimbólum) HIBAARÁNY JELLEMZI. ez az $r(t)$-re vonatkozó JEL-ZAJ-VISZONYtól függ.

Ezzel megegyező $SNR_{dig} = \frac{E_b}{N_0}$ - 1 BITRE JUTÓ JELENERGIA

(N_0 - A GAUSS zaj teljesítménysűrűsége)

- ALAPSÁVI RENDSZEREK

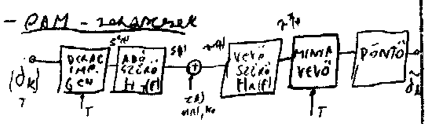
PAM - IMPULZUS AMPLITÚDÓ MODULÁCIÓ

PDM - IMPULZUS IDŐTARTAM MOD. (PWM)

PPM - IMPULZUS-HELYZET MOD.

(PAM a leghatékonyabb)

- PAM - rendszerek



- a VEVŐSZŰRŐ kimenetén elvárjuk:

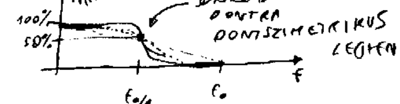
- az összes zaj teljesítménye a lehető legkisebb legyen (akkor lehet, ha $H_T^*(f) = H_R(f)$ ILLESZTETT SZŰRŐS STRUKTÚRA)
- a jel T időnkénti mintái csak 1 bemeneti szimbólumtól függjenek. TEHÁT a SZIMBÓLUMKÖZTI ÁTHALLÁS (ISI) = 0 legyen (Ehhez kell, hogy $H(f) = H_T(f) H_R(f)$; $\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = h(t)$ mintái közül csak 1 legyen nem nulla)

- NYQUIST KRITÉRIUM:

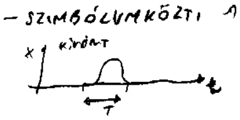
nem lesz szimbólumközti áthallás, ha:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} H\left(f + \frac{l}{T}\right) = T \text{ ahol } |f| \leq \frac{1}{2T} = \frac{f_0}{2}$$

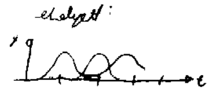
GRAFIKUSAN: $f_0 = \frac{1}{T}$



- Az áthallás nem szüntethető meg, ha $B_{ÁTV.} < \frac{f_0}{2}$ $B_{ÁTV}$ a $H(f)$-nek a $\neq 0$ részei
- nincs szükség f_0-nál nagyobb sávszélességre, attól már nem lesz jobb.
- Tehát f_0-hoz $f_0/2 = B$ sávszélességű csatorna kell
- SZIMBÓLUMKÖZTI ÁTHALLÁS!



helyett:



a k-1. és a k+1. bit is belezavar a k. bit vételébe.

A vevőszűrő kimenetén az ideális ±1 értékek helyett adott eloszlással bármilyen jel megjelenhet.

BIT ERROR

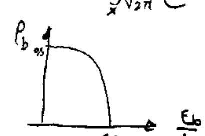
$$P_b = P\left\{r^*(nT) \geq 0 \mid d_n = -1\right\}$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \boxed{Q\left(\sqrt{2SNR_d}\right) = P_b}$$

ahol E_b - hasznos jel 1 BITIDŐRE eső energiája, N_0 - zajspektrum

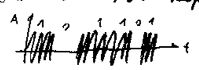
Q: GAUSSI HIBAINTEGRÁL FÜGGVÉNY

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



VIVŐS (DIGITÁLIS) MODULÁCIÓ

– FAJTÁI
- DISZKRÉT AMPLITÚDÓ MODULÁCIÓ
  a vivőt KI/BE kapcsolgatják

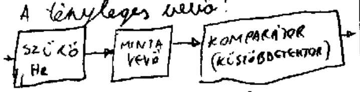


- AMPLITÚDÓBILLENTYŰZÉS (ASK)
- FREKVENCIA BILLENTYŰZÉS (FSK): a vivő f-ját kapcsolgatják 2 érték között. f_1, f_2
- FÁZISBILLENTYŰZÉS: (PSK). a vivő fázisa változik ugrásszerűen ha a bemenet értéket vált.
- minőség vivőt amplitúdóban modulálja a bemenő DIGI. jel. a modulációs mélység $m<1$, a bemenő jelet előtte + kell szűrni, simítani. MAJD AM-DSB így lesz a legkisebb a sávszélességigény.

– ITT IS a hibavalószínűség minimalizálása a cél. az OPTIMÁLIS vevőbe itt is ILLESZTETT SZŰRŐ KELL. Ez MEGVALÓSÍTHATÓ 1 KORRELÁTORRAL ami egy SZORZÓ + INTEGRÁTOR.

a vevőben előállított vivő fázisban van az adóval (és a f. is) (koherens vétel)

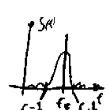
A tényleges vevő:



küszöbértékkel összehasonlítjuk a jelet $\lessgtr 1$

– BINÁRIS ASK

a modulált jel:



$S(t) = d(t)\, A \cos(\omega_c t)$

$d(t)$ – alapsávi impulzussorozat.

$$S(f) = \frac{A^2}{4}\left[D(f-f_c) + D(f+f_c)\right]$$

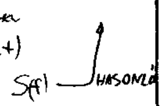
$$= \frac{A^2}{4}\left[D(f_c-f) + D(f_c+f)\right]$$

BURKOLÓDETEKTORT használnak vagy integrálás + döntés (KOHERENS)

– BINÁRIS PSK MODULÁCIÓ

a $d_K = \pm 1$ -alapján

$S(t) = d_{KT} A \cos(\omega_c t)$



$S(f)$ HASONLÓ csak nincs benne a vivőn lévő DIRAC IMPULZ.

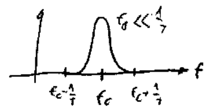
DEMODULÁLÁS: csak koherens eljárással. Ezzel fele teljesítménnyel lehet ugyanazt P_e-t elérni

– BINÁRIS FSK MOD.

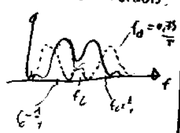
főleg kis sebességű adatátvitelre. dunod: mérni kell a jelzési frekvenciát. Nem hatékony (P, B)

$S(t) = A\cos(\omega_c t + d_{KT}\, \omega_d t)$ ← FREKV. LÖKET

Ha ω_d KICSI:



Ha ω_d NAGYOBB:



CSATORNA MEGOSZTÁSA

– Több információforrás jeleit együtt kell továbbítani közös csatornában. (MULTIPLEXELÉS, NYALÁBOLÁS)

– FREKVENCIASÁVBAN, VAGY IDŐBEN lehet MEGOSZTANI (FDM / TDM)

– analóg forrásoknál a legnagyobb f. összetevő határozza meg a f. sávot az ALAPSÁVBAN. A DIG. modulációs rendszereket a HATÉKONYSÁG JELLEMZI: $\frac{BIT/S}{Hz}$: 0,5 … 5

– FDM: (FREQ DIVISION MULTIPLEX) AM-DSB-vel felső oldalsávot kiszűrjük, majd az ilyen jeleket, (különböző f_c-jű vivőkkel) összeadjuk.

DEMULTIPLEXÁLÁS: 1 szűrő (SÁVSZŰRŐ) 1 csatornát választ ki majd 1 szorzó (keverő) + aluláteresztő szűrő tolja vissza az adott csatornát az alapsávba.

– TDM

Itt 1 csatorna sebessége sokkal nagyobb, mint 1 forrás adatsebessége. Minden forrás kap 1 időszeletet az adatátvitelre, és az kerül be.

– Ha térben szétszórva vannak a források, akkor is lehet osztani a csatornát. ekkor FDMA, TDMA

FDMA-hoz különböző adók, vevők kellenének. TDMA-nál 1 széles f-sáv van, azt osztják ki időrésenként.

– KÓDOSZTÁS (CDMA) (spektrumszórás) Minden ADÓ-VEVŐ pár 1 (hosszú) bináris kódszót használ. az az 1/0 → KÓD$_1$/KÓD$_2$

FREQ. UGRATÁSOS SPEKTRUMSZÓRÁS: az adó spec. szinuszos jeleket választ ki, és ad. Az adó teljesítménye széles sávban oszlik el, nehéz zavarni. így ugyanabban a sávban több rendszer működhet egymás zavarása nélkül.

– CSATORNÁHOZ HOZZÁFÉRÉS:

- RUGALMAS IDŐOSZTÁS (POLLING) mindenki kap időrést, de aki nem akar kommunikálni, az továbbadja egyből a szólásjogát.
- VÉLETLEN HOZZÁFÉRÉS 1 TÖBBSZÖRÖS hozzáférésű, és 1 adatszóró csatorna van. pl 1 KÖZPONTI állomás, és sok adó/vevő állomás.

RÁDIÓLOKÁCIÓ (RADAR)

Az adóantenna egy adott térrészt besugároz, az ott lévő céltárgyaknál visszaverődik, azt a vevőantenna veszi. Az adó és a vevő jelét összehasonlítjuk, és az eltérésből határozzuk a céltárgyak paramétereit (helyzet, sebesség, méret)

– $F = 10\,MHz \ldots 100\,GHz$

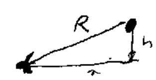
– Az adó és a vevő lehet ugyanaz.

– A céltárgy lehet PASSZÍV (visszaver), vagy AKTÍV (válaszol, erősít, visszasugároz)

– Nagyméretű céltárgyak leképezése a TÁVÉRZÉKELÉS

– VETT TELJESÍTMÉNY:

$$P_V = \frac{P_{Adó}\, A_{hasznos}\, A_{vevő}^2}{4\pi R^4 \lambda_a^2}$$



$A_{TÁRGY}$ – A céltárgy hatásos keresztmetszete. R-szerinti távolság

– MAX. HATÓTÁVOLSÁG akkor, ha $P_V = P_{MIN.\ ÉRZÉKELHETŐ} = P_{VMIN}$

$$R_{MAX} = \sqrt[4]{\frac{A_{T.h.} P_a}{4\pi P_{VMIN}}} \cdot \sqrt{\frac{A_{vevő}}{\lambda_a}}$$

– többnyire 1 impulzust bocsát ki az adó, majd az visszaverve a vevőre érkezik $T = \frac{2R}{c}$ idő múlva.

– mozgó céltárgy DOPPLER-HATÁST eredményez $f_{ADÓ} \neq f_{VEVŐ}$

$f_{ADÁS} = f_{VÉTEL} + f_d$ ← DOPPLER FREKVENCIA

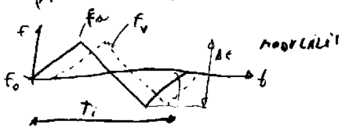
$f_d = \frac{2 v_r}{\lambda_{adó}}$ ← sugár irányú sebesség

– 2 ÜZEMMÓD: FOLYTONOS (CW) és IMPULZUS ÜZEMŰ

– FOLYTONOS üzemmű
adó és vevő jelének összehasonlítása
az ADÓ jelét MODULÁLJÁK frekvenciában
az adó és a vevő frekvenciájának a
eltérését mérjük → távolság.

$$R = \frac{T_i}{4\Delta f} f_ü$$

$f_ü$ – ÜTKÖZÉSI FREKVENCIA $f_ü = f_{adó} - f_{vevő} = f_i$
(MODULÁLATLAN jelre)



Δf – frekvencialöket, T_i MOD. jel periódusideje

– IMPULZUSÜZEMŰ
Az adó T_i időnként τ_n ideig működik. ($\tau \ll T_i$)
$T = \frac{2R}{c}$ idő múlva visszaér a jel.
Ha $T_i > T$ akkor lehet az adóantenna a vevő is. persze az átkapcsolást meg kell oldani.
adóoszcillátor 1 magnetron.

- Ha adás közben F változik, az pontosabb távolságmérést tesz lehetővé.
- Vétel: ~~késleltetéssel~~ kell összehasonlítani a vett jelet (KOMP.) (BURKOLÓDEMOD. UTÁN)
  a min. küszöbszintet a zaj határozza meg:
  $$P_{v\,min} = F(P_v, P_0, A_m)\, kTB$$
- felbontóképesség
  SUGÁRIRÁNYÚ: $\Delta R_3 = \frac{c\tau_n}{2}$ (1 μs → 150 m)

Az antenna iránykarakterisztikájának a számított érzékelési szöge: Θ_3 ~ 0,5° mérőtt lehet → $R = 100$ km, → ΔR_m ≈ 1 km

$$\Delta R_m = R\Theta_3$$

TÁVÉRZÉKELÉS

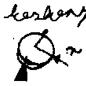
– PASSZÍV ESZKÖZZEL: RADIOMÉTER
AKTÍV: SZÓRÓDÁSMÉRŐ, képalkotó lokátor.

– SZÓRÓDÁSMÉRŐ:
a felület visszaverő képessége és a fizikai jellemzők közti kapcsolat alapján térkép

– KÉPALKOTÓ LOKÁTOR
letapogatásos RADAR
pl. repülő haladása + irányított sugár

RÁDIÓ CSILLAGÁSZAT:

– univerzumból érkező rádiósugárzás paramétereinek mérése (ZAJMÉRÉS különböző irányokból)
- folytonos spektrumú sugárzás: termikus zaj, szinkrotron sugárzás (zavar) amit a töltött részecskék keltenek mágneses térben.
- érzékelés:
  RADIOMÉTER: nagy antennához csatlakozó nagyon kis zajú μ hullámú vevő.
- keskeny antennanyaláb kell



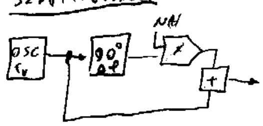
vagy λ>>>λ
vagy több antennából álló rendszer (INTERFEROMÉTER) ami interferencia által csökkenti az érzékelési szöget.

PASSZÍV TÁVÉRZÉKELÉS

Tárgyaknál PASSZÍV termikus sugárzást mérjük, a μ hullámú tartományban.

ÚJRA

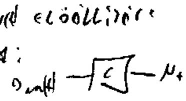
SZÖGMODULÁCIÓ



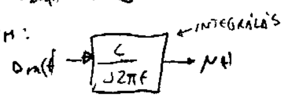
– érzéketlen a nemlineáris torzításokra
zajérzéketlenség növelhető, ha nő a frekvencialöket.

– $D_m(t)$ → $N(t)$ a MODULÁCIÓS TARTALOM
$D(t) = U_v \cos(2\pi f t + N_t)$
(MÁSHOL $\Theta(t)$ VAN)

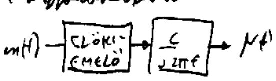
– N(t) ELŐÁLLÍTÁSA
- PM:



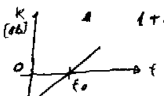
- FM:



- FM a gyakorlatban:

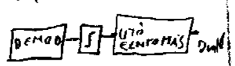


AZ ELŐKIEMELÉS:



$$1 + j\frac{f}{f_0}$$

A DEMOD:



így az átvitelben javul az SNR

– MODULÁCIÓS INDEX
- PM – tényező (FÁZISLÖKET)
- AM: m = $\frac{\max|D_m(t)|}{U_v}$
- FM ?

– DOBOZOK:

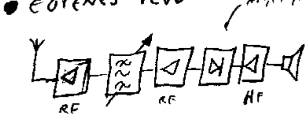
SZŰRŐ

DEMODULÁTOR

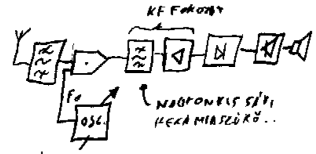
ERŐSÍTŐ
(ígY, FORDÍTVA RAJZOLJÁK)

SZŰRŐ:
$$\text{SZELEKTIVITÁS} = \frac{B_{\text{ÁTERESZTŐ TART}}}{B_{\text{ZÁRÓ TART}}}$$

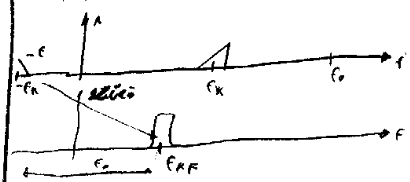
– VÉTEL:
- EGYENES VEVŐ:



- SZUPERHETERODIN VEVŐ:
  frekvenciaáthelyezéssel: lekeverés + fix szűrő

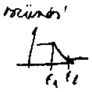


MŰKÖDÉSE:



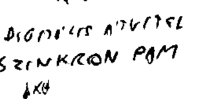
VÉTEL $f_{KF} = f_0 - f_v$

Ha van f_{v2} frekvenciájú adó, az is f_{KF}-re keveredik le. szűrni kell a keverés előtt is szűrni, (de nem olyan kis sávban)
$f_{v2} = 2f_0 - f_{KF}$ – TÜKÖRADÓ
szűrő:



$(f_1, f_2) \in [f_0 \ldots 2f_0 - f_{KF}]$

– DIGITÁLIS ÁTVITEL
SZINKRON PAM



elemi jel.

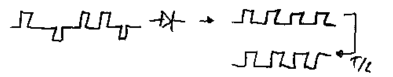
RZ-TÍPUSÚ JEL 50% KITÖLTÉSŰ
(NRZ: k ≠ 50%)

d_k értékkészlete nem folytonos
2 érték. lehet 2^n féle.
akkor $d_k = \pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7$ (2V 2V 2V 2V)
$D(t) = d_{kT}\, K(t)$

- VONALI KÓDOLÁS:
korszerű digitális jelhez
több intékek sendelésel $D(t)$

- vételnél szintmosban kell detektálni:

$D(t) =$
$d_k h_0 + \nu_k$

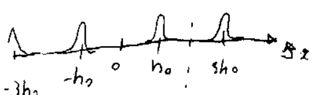


- TÖBBSZINTŰ ÁTVITEL

$d_k = \pm 1 \quad \pm 3 \quad \pm 5 \quad \pm 7 \ldots$

$D_k = h_0 \cdot d_k + \nu_k$

adószűrő (szorzó érték)



legközelebbi "szomszéd" - döntési szabály

Ha a csatornán DC szint van, akkor ezt bele kell kalkulálni a döntési szabályba.

- HIBA:

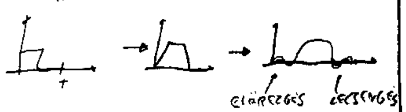
$P_e = P(\nu_k > h_0)$

pontosabban

$P_e = \frac{3}{\text{szintszám}} \cdot P(|\nu_k| > h_0)$

$SNR = \frac{h_0^2}{\sigma^2} = \left(\frac{h_0}{\sigma}\right)^2$

- KORLÁTOS SÁVSZÉLESSÉG HATÁSA:



Ha több bit van egymás után: akkor az előrezgés, lecsengés hozzáadódik az előző, következő bithez.

így

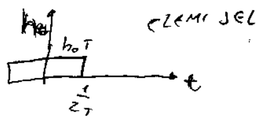
$D_k = \sum_i h_i \cdot d_{k-i} + \nu_k$

szorzók

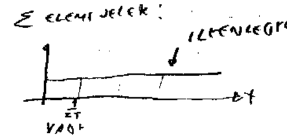
- ZAVARVÉDETTSÉGI TARTALÉK:

$h_{0,min} = h_0 - d_{max} \cdot \sum_i h_i$

- MEGELŐZŐ VÉDELEM
keskeny osztó elemi jel
NYQUIST FELTÉTEL:



Σ ELEMI JELEK:



pontszimmetrikus legyen a $h(t)$
a 50% T, 50% h_0 - pontra
így lesz az impulzusok összege h_0

- TÖMEGES KEZELÉS:
LINEÁRIS KIEGYENLÍTÉS

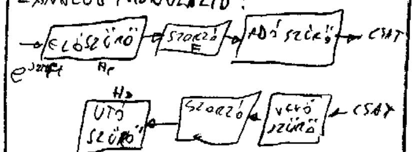
$D_k \to \hat{D}_k$ számítjuk

$\hat{D}_k = \sum c_i D_{k-i}$

$D_{k_{új}} = D_{k_{vett}} - \hat{D}_k$

c_i: példa mintázat alapján:
ahol $E_k = n_k - \hat{D}_{k-n}$ legyen MINIM.

- ANALÓG MODULÁCIÓ:



$H_{cs} = H_V \cdot H_A$

$H_e = H_e(f) H_u(f) \cdot \frac{H_{cs}(f+f_0) + H_{cs}(f-f_0)}{4}$

a szorzónál keletkezik → $x(t)$:
$f_0 + F,\ f_0 - F$ - re
Az adó/vevő szűrő (H_{ch}) ezt ense ...

$e^{j2\pi Ft} \xrightarrow{\text{ELŐ}} H_e(F) e^{j2\pi Ft} \xrightarrow{\text{SZORZ}} \frac{1}{2} H_e(F)\left[e^{j2\pi(F+f_0)t} + e^{j2\pi(F-f_0)t}\right] \xrightarrow{\text{ADÓ}}$

$\frac{1}{2} H_e(F)\left[H_a(F+f_0) e^{j2\pi(F+f_0)t} + H_a(F-f_0) e^{j2\pi(F-f_0)t}\right]$

$\xrightarrow{\text{SZORZ}} \frac{1}{2} H_e(F)\left[H_a(F+f_0)\left(e^{j2\pi(F+2f_0)t} + e^{j2\pi Ft}\right) + \right.$

a másik fajta ugyanígy

H_0: az előbbi

- valós MODULÁCIÓNÁL:

$e^{j2\pi Ft} \to \frac{1}{2} e^{j2\pi(f_0-F)t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(f_0+F)t}$

DEMODULÁCIÓNÁL:

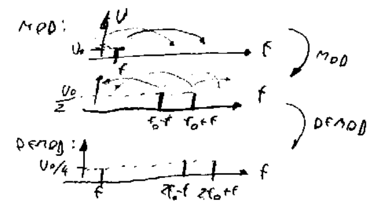
az előbbiből:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi(2f_0+F)t} + e^{j2\pi Ft}\right)$

$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi(F-2f_0)t} + e^{j2\pi Ft}\right)$

$= \frac{1}{2} e^{j2\pi Ft}$ + egyéb

- MOD:



- TELJESÍTMÉNY SŰRŰSÉG SPEKTRUM

$\frac{(D_y(f))^2}{2R} = S(f)$ (táblázatosan kiszámolva)

$P = \frac{U^2}{2R}$ 1 f-komponens

másik fele a Θf - ...

f. összetevők $f_0,\ f_0 - f_1,\ f_0 + f_1 \ldots$

- MODULÁCIÓS MÉLYSÉG:

$m_{AM} = \frac{U_{\text{moduláló}}}{U_{\text{vivő}}}$

- TELJESÍTMÉNY:

$P = \frac{U^2}{1 \cdot R}$ ← f-komp. is hordja a teljesítményét. a Θ spektrumban $\frac{U^2}{2R} = P$ - volt

- SZÖGMODULÁCIÓK:

PM $\varphi(S_m(t))$

FM $\varphi\left(\frac{d}{dt} S_m(t)\right)$

$A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

- PILLANATNYI F:

$f_p = \frac{1}{2\pi} \frac{dU}{dt}$

$= f_V + f_D \cos(\omega_m t)$

$= f_V + k_{FM} S_m(t)$

- F. LÖKET:

$f_D = f_V - f_p$

- SÁVSZÉLESSÉG:

$B \approx 2 f_m \left(1 + m + \sqrt{m}\right)$

- KISLÖKETŰ FÁZISMODULÁTOR

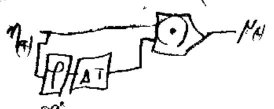
$m(t) = \cos(2\pi F t) - m_t \sin(2\pi F t)$

$= \sqrt{1+m_t^2} \cos(2\pi F t + \mathrm{arctg}\, m_t)$

Ha m_t kicsit ... $m_t \to m_t$ járulékos AM

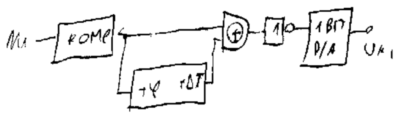
$m(t) = \sqrt{1+m_t^2} \cos(\omega_0 t + m_t)$

DEMODULÁLÁSA (FÁZISTOLÓS SZERZŐ)



90°

MEGVALÓSÍTÁS



– DIGITÁLIS ALAPSÁVI ÁTVITEL

– FELADAT:

ADOTT a elemijel spektruma, f_H, A_V.

Milyen f_0? hogy ne legyen szimbólumközti áthallás.

a f_H $f_0 = \frac{1}{2B}$ akkor nem romlik egyenletszint.

(elemijel: időkorlátos jelsorba. átszámítva. így látszik, hogy milyen eltolású Δt-nál nem lesz áthallás.)

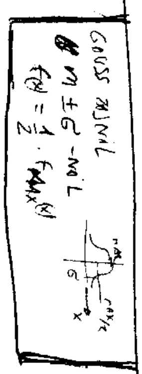
$\frac{1}{2B}$-nél nagyobb ne legyen f_0 mert úgy sem lesz jobb

– HIBAVALÓSZÍNŰSÉG:

Zajos vevőknél.

$$P_{ZAJ} = \int_{-1/T}^{1/T} S_0\, H(f)\, df \qquad \sigma_{ZAJ}^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$\frac{JEL}{ZAJ} = \frac{JEL}{ZAJ} = \frac{JEL}{\sqrt{P_{ZAJ}}}$$



$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2PT}{N_0}}\right)$$

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

ahol P – a hasznos jel teljesítménye,

PT – a jel energiája 1 BITIDŐRE.

$$\left(y = \sqrt{\frac{2PT}{N_0}}\right)$$

$$BER = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2PT}{2N_0}}\, dy$$

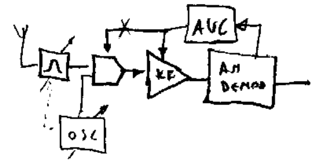
– ÁTHALLÁS ELLEN:

ZERO FORCING

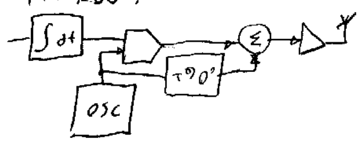
S_K – helyett $\hat{S}_K$-t vesszük

$$\hat{S}_K = \sum_{-n}^{n} c_i\, D_i$$

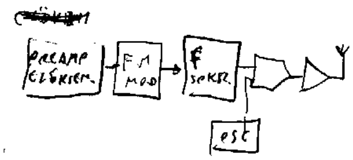
– AM DEMOD:



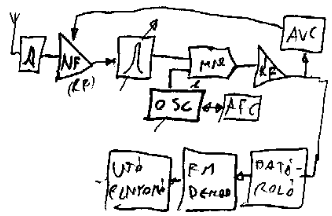
– FM ADÓ:



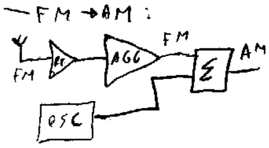
VAGY:



– FM VEVŐ



– FM → AM:



– LEGJOBB VÉTEL KOHERENS vevőkkel érhető el, de ez nem használható rossz terjedési viszonyok esetén

13. fejezet

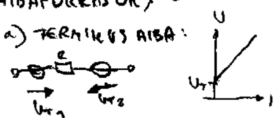
Méréstechnika

MÉRÉSI HIBÁK

1. ELLENÁLLÁS MÉRÉS

HIBAFORRÁSOK; BEFOLYÁSOLÓK:

a) TERMIKUS HIBA:



a-halból és vezeték csatlakozási pontja.

b) hőmérséklet-hatás:

$R = R_0(1+\alpha \Delta T)$

c) ALAK

$R = \rho \frac{l}{A}$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{dA}{A}$$

relatív hiba összeadódik

ρ, l, A változik

ha valami nem változik, akkor az $= 0$

- Ha l nő → A csökken (nyúlásmérő bélyeg)

ezt figyelembe véve:

$$\frac{dR}{R} \cong 2\frac{dl}{l}$$ (HA IS NYÚLÁSKOR)

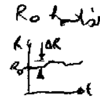
mert $\frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A}$

ELL. MEGVÁLTOZÁS MÉRÉSE:

csak ha $\frac{\Delta R}{R}$ nagyon kicsi,

ΔR-t mérjük: WHEATSTONE HÍD

R_0 hatását ki kell küszöbölni



PROBLÉMA: $R_1 = R_2$ legyen!

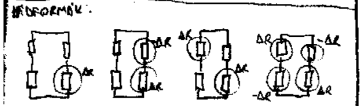
$$U_M = U\left(\frac{1}{2} - \frac{R+\Delta R}{R+R+\Delta R}\right)$$

$$\approx -U\frac{\Delta R}{4R}\cdot\frac{1}{1+\frac{\Delta R}{2R}}$$ (MÉRTANI SOR)

$$\boxed{U_M \approx -U\frac{\Delta R}{4R}\left(1-\frac{\Delta R}{2R}\right)}$$

HIBA PPM (PART/MILLION)
1PPM $= 10^{-6}$ RELATÍV HIBA

HÍDFORMÁK:



— NL — LIN — NL — LIN

— NL — LIN — LIN — LIN

TERMIKUS OHM TÖRVÉNY: $\Delta T = R_t \cdot P$ ΔT: külső és belső hőm. között ha T_b = áll.

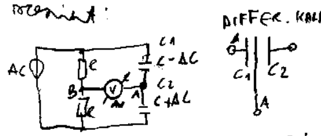
2. KAPACITÍV MÉRŐÁTALAKÍTÓ

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$ tehát ε_r, A, d megváltozását mérhetjük, és ugyanezek okozzák a mérési hibákat is.

ε_0 nem változik:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{\Delta A}{A} - \frac{\Delta d}{d}$$

Mérőhídban az előbbiek szerint: DIFFER. KOND.



Ha d változást mérünk:

$$U_M = \frac{U}{2}\cdot\frac{\Delta d}{d}$$

(Ha fázis van: fázist is figyelni kell!)

3. TETSZŐLEGES MENNYISÉG MÉRÉSE:

MÉRŐÁTALAKÍTÓVAL → vill. mennyiség

MÉRÉSI MÓDSZEREK:

a) KÖZVETLEN ÖSSZEHASONLÍTÁS: Mérendő mennyiséget ETALONhoz hasonlítjuk NULLINDIKÁTORT használva

MINDIG KI KELL EGYENLÍTENI!

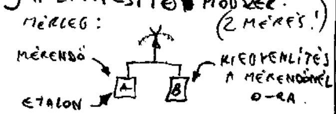
b) KÖZVETETT ÖSSZEHASONL.: Az etalon nincs jelen. A mérendő mennyiséget valami ARÁNYOS mennyiséggé alakítjuk

PL: ERŐ → RUGÓ MEGNYÚLÁS ERŐ/KAP. MÉRŐÁTALAKÍTÓT BELE HÍDBA, VAGY A FENTI KAPCSOLÁSBA

c) DIFFERENCIA MÓDSZER: Az a)-ba a mérőátalakítót (b), de nem egyenlítjük ki 0-ra, hanem leolvassuk a VOLTMÉRŐT, MOST

$U_M - U_{VOLTM.} - U_{REF} = 0$

d) HELYETTESÍTŐ MÓDSZER:
MÉRLEG: (2 MÉRÉS!)



Olyan etalont teszünk, hogy mindent ki legyen egyenlítve (ötödleg a mérendőre egyenlített) így a karaarány $\frac{k_1}{k_2}$ nem ismerjük de nem baj.

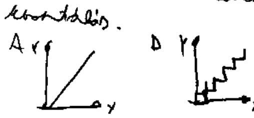
e) FELCSERÉLÉS (GAUSS)

- A mérendőt az egyikbe, kiegyenlítjük.
- a másikba, megint kiegyenlítjük.
- $X_{m\text{-mért}} = \sqrt{X_{m1}\cdot X_{m2}}$

(2 MÉRÉS!)

f) ANALÓG & DIGITÁLIS:

- ANALÓG: vele arányos ~~[illegible]~~ analóg jellé alakítjuk.
- DIGITÁLIS: Mintavételezés, kvantálás.



MÉRÉSI HIBÁK

ABSZOLÚT HIBA $H = X_m - X_h$

RELATÍV HIBA $h = \frac{X_m - X_h}{X_h} \approx \frac{X_m - X_h}{X_m}$

RENDSZERES h_R (KOMPENZÁLHATÓK)

VÉLETLEN h_V $\pm\varepsilon$ (SOK MÉRÉSSEL csökk.)

HIBÁK ÖSSZEGZÉSE: TERJEDÉS

$X_h = X_m + K \pm \varepsilon$

~~RENDSZERES~~

1) RENDSZERES, ismert az előjel:

- Ha $y = \sum a x$ akkor $\Delta y = \sum a \Delta x$ (ABS HIBA)
- Ha $y = \prod a x^b$ akkor $\frac{\Delta y}{y} = \sum b \frac{\Delta x}{x}$ (REL. HIBA)

tehát pl $y = a^c b^d$

$$\frac{\Delta y}{y} = c\frac{\Delta a}{a} + d\frac{\Delta b}{b}$$

2) RENDSZERES, nem ismert az előjel:

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm\sum\left|b\frac{\Delta x}{x}\right|$$ (REL. HIBA)

3) VÉLETLEN HIBÁK:

$$\boxed{h_y = \sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2}}$$ (ABS HIBA)

- HA EGYENLETES A HIBAELOSZLÁS (+/-)
- Ha hajlamos olyan előjelű lenni (WORST CASE)

$$\boxed{H_y = \sum |H_x|}$$ (CSAK AKKOR!)

- RENDSZERES HIBA: Mérőműszerektől.
- VÉLETLEN HIBÁK ÁLTALÁBAN
- ~~[illegible]~~:
- HA 1 DOLOG TÖBB TÉNYEZŐTŐL FÜGG:

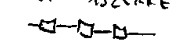
$y = f(x, z, v)$ (JELÁTALAKÍTÓK LÁNCA IS LEHET: $W = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$)

akkor mindkét oldalt deriváljuk (jobb oldal több függvény szerint: összeg, hányados)

Majd elosztjuk az eredetivel

~~[illegible]~~ ÍGY: $h_y = h_x \pm h_z \pm h_v$ (KÉPLETBŐL)

- HA TÖBB PÉLDÁNYT MÉRÜNK ÖSSZE



akkor: ~~[illegible]~~

- $h_{y_0} = \sqrt{h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2 + h_{x_3}^2 \ldots}$
- Ha hajlamos azonos előjelre:

$H_y = \sum |X_x|$

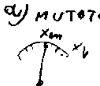
HIBÁK MÉG:

- VÉGÉRTÉKRE $\frac{x_v}{x_m} h_{rel}$
- MÉRT ÉRTÉKRE $h_m = \frac{x_m - x_h}{x}$
- KVANTÁLÁSI $H = \frac{1}{N}$

az első 2-t ABSZ. ÉRTÉKBEN ÖSSZEGEZNI (?!)

MŰSZEREK HIBÁI

a) MUTATÓS MŰSZER:



OSZTÁLYPONTOSSÁG: (OP)

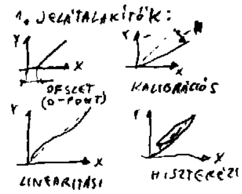
hiba a végkitérésre vonatkoztatva, ezt a gyártó megadja. EBBŐL RELATÍV HIBA:

$$\boxed{h_r = \frac{X_v}{X_m}\cdot OP}$$

$OP = \frac{\Delta X}{X_v}\cdot 100\%$

b) DIGITÁLIS MŰSZEROK:

1. JELÁTALAKÍTÓK:



- HŐMÉRSÉKLETI HIBA
- TERHELÉSI
- FELBONTÁSI

c) SZKÓP + HASONLÓK:

$h \geq \frac{\text{VONALVASTAGSÁG}}{\text{LEGNAGYOBB TÁVOLSÁG}}\cdot 100\%$

d) MÉRŐÁTALAKÍTÓK HIBÁJA

$a_0 = W = \frac{X_{ki}}{X_{be}}$ - elvi

$a_{tényl.} = a_0(1+h)$

$h = \frac{X_{ki} - a_0 X_{be}}{a_0 X_{be}}$

KOMPLEX SZÁM
(ABSZ ÉRTÉK-HIBA ÉS FÁZISHIBA)

e) PASSZÍV ALKATRÉSZEK TŰRÉSE

• NÉVÉRTÉKHIBA (TŰRÉS)

$h = \frac{R_T - R_{név}}{R_{név}} \cdot 100\%$

• HŐMÉRSÉKLETI HIBA

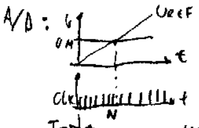
$h = R_0 \alpha \Delta T$

• STABILITÁS (S)

pl. ppm/év vagy 10^{-6}/év vagy $10^{-4}\%$/év

f) KVANTÁLÁSI HIBA

A/D:



$t \approx N \cdot T$

HOZZÁREND.: $(N-1)T \to t$

hozzárendelik-e az utolsót, vagy nem:

$h = \pm\frac{1}{N}$

P-MÉRÉS: (AC)

$P = UI\cos\varphi$ -sinφ dφ

$\frac{dP}{P} = \frac{dU}{U} + \frac{dI}{I} + \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi}$

$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} - \mathrm{tg}\varphi \cdot \Delta\varphi$

(φ-radiánban!)

MÉRÉSI SOROZATOK

Véletlen hiba kiküszöbölésére. Sok mérés. Ilyenkor törvényszerűségek kellenek.

μ_x - az x várható értéke

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ - μ_x becslése (MÉRÉS)

S - szórás σ_x-becslője (mérés)

σ_x - szórás

VAN MÉG S^2, σ_x^2

μ_x és $\bar{x}$:

$\mu_x = E[x]$

LEGVALÓSZÍNŰBB ÉRTÉKE

S a σ_x várható értéke

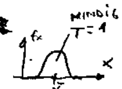
$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

(ÁTLAGOS ELTÉRÉS AZ ÁTLAGTÓL)

$\sigma_x^2 = VAR[x] = E[(x-\mu_x)^2]$

$n=\infty$-nél $S^2 = \sigma_x^2$

MINDIG T=1



SŰRŰSÉG FÜGGVÉNY

$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 f_x\,dx \approx S^2$

• ÁLTALÁBAN NORMÁLIS ELOSZLÁS $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

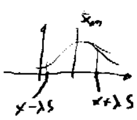
ITT A MÉRÉSEK 99,73%-A a $\pm 3\sigma_x$ - INTERVALLUMON BELÜL VAN. (KONFIDENCIA INTERV.)
($\pm 2\sigma_x$-n belül 95,45%)

• $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$

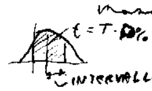
• CSEBISEV EGYENLŐTLENSÉG:
P - VALÓSZÍNŰSÉG

$P[|x-\bar{x}| > \lambda S] < \frac{1}{\lambda^2}$

$P[|x-\bar{x}| < S] > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$



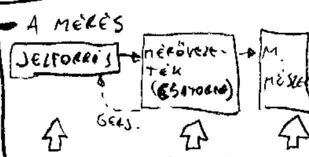
• ADOTT P VALÓSZÍNŰSÉG:
Mekkora intervallum?
$\bar{x}$ körül a görbe P-ed része marad belül?



VALÓSZÍNŰSÉG: SŰRŰSÉG-FÜGGVÉNY - TERÜLET-ARÁNYA

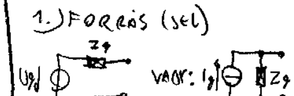
MÉRŐHÁLÓZATOK:

• A MÉRÉS



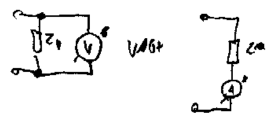
• HELYETTESÍTÉSEK:

1.) FORRÁS (SEL)

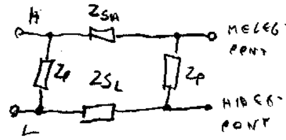


HA KICSI A Z_g — ha nagy a Z_g

2.) MÉRŐMŰSZER

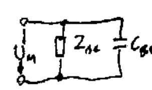


3. MÉRŐVEZETÉK



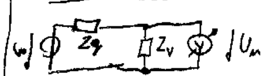
(sokszor $Z_{SH} = Z_{SL} = Z_S$)

OSZCILLOSZKÓP (VOLTMÉRŐ)
BEMENŐ ELLENÁLLÁS HIBÁJA



- Z_b JÓ NAGY, C_b JÓ KICSI LEGYEN:

FESZMÉRÉS SIMA VEZETÉKEKKEL

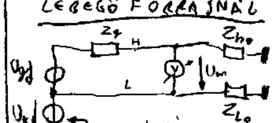


$U_M = U_g\frac{Z_V}{Z_g+Z_V} = U_g\frac{Z_V+Z_g-Z_g}{Z_g+Z_V} = U_g - \underbrace{\frac{Z_g}{Z_V+Z_g}U_g}_{\Delta U}$

RENDSZERES HIBA (TERHELÉSI)

$\approx U_g\left(1-\frac{Z_g}{Z_V}\right)$

FESZMÉRÉS LEBEGŐ FORRÁSNÁL

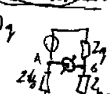


KÖZÖS MÓDUSÚ ZAVARFESZ. (SZÓRT IMPEDANCIÁK)
HA $Z_V = \infty$

Alkatrészek minden és a föld között van ilyen SZÓRT IMPEDANCIA

• HIBÁK:

$U_M = \frac{Z_{ho}}{Z_{ho}+Z_{Lo}}U_g$

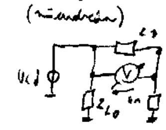


VOLTMÉRŐN $I=0$, Z_{L_0}-N IS $I=0$.

$U_A = 0$. MARAD 1 FESZ OSZTÓ.

ÖSSZES HA U_K NINCS OTT: NINCS RÁÜLTETVE U_K-RA U_g!

• HA U_g-T KIKAPCSOLJUK: (szuperpozíció)



ILYENKOR

$U_M = U_K \cdot \frac{Z_g}{Z_{ho}+Z_g}$

TEHÁT EZ U_K HATÁSA.

• TEHÁT

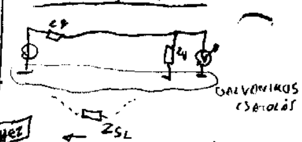
$U_M = U_{M(U_K\ \text{NINCS})} + U_{M(U_K\ \text{HATÁSA})}$

$U_M = \frac{Z_{ho}}{Z_{ho}+Z_g}U_g + \frac{Z_g}{Z_{ho}+Z_g}U_K$

SOK

A MÁSODIK TAG SOKKAL NAGYOBB.

EGYÉB PARAZITÁK



ehhez

$(U_M = U_g - I_0(Z_{SL}+Z_g))$

$U_M = \frac{Z_V}{Z_V+Z_g}U_g$

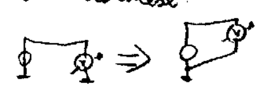
HIBA: (Z_{SL} nélkül)

$H_U = U_M - U_h = U_M - U_g$

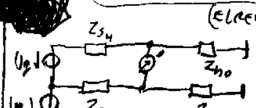
$= U_g\left(\frac{Z_V}{Z_V+Z_g} - 1\right) = -U_g\frac{Z_g}{Z_V}$

$= \frac{-Z_g}{Z_V+Z_g} \approx -\frac{Z_g}{Z_V}$

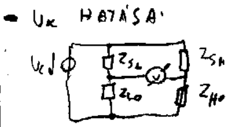
Z_{SL} kiküszöbölése:



ÚJABB PARAZITÁK... (ELRENDEZÉS)

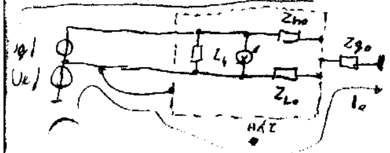


• U_K HATÁSA:



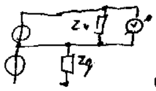
$U=0$? $\frac{Z_{S0}}{Z_{SL}+Z_{Lo}} = \frac{Z_{Ho}}{Z_{SH}+Z_{Ho}}$?

ÁRNYÉKOLT MÉRŐMŰSZER



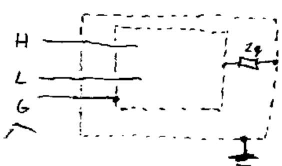
(EZ AZ ÁRNYÉKOLÓ HÁZ: GUARD)

Z_{h_0} és Z_{L_0}-n nem folyik áram, így csak:



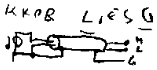
PONTOS MÉRÉS: NINCS SOROS R, ~~de Z_g-n folyik áram~~ ~~folyik U_k miatt~~.

- A MÉRŐMŰSZEREK SZIGETELÉSE:

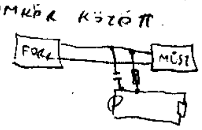


KETTŐS ÁRNYÉKOLÁS.

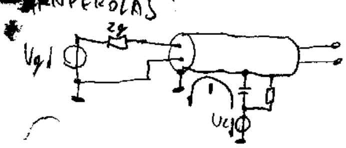
HA NINCS JÓ MINŐSÉGŰ VEZETŐNK, AKKOR L-T ÉS G-T ÖSSZEKÖTIK.



- MÁSIK ÁRAMKÖR HATÁSA A MÉRÉSRE: SZÓRT C, R A 2 ÁRAMKÖR KÖZÖTT.



- ÁRNYÉKOLÁS:

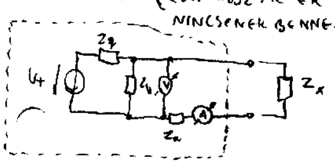


- MÁGNESES ZAVAROK KIKÜSZÖBÖLÉSE

ERŐS MÁGNESES ANYAGÚ MÁGNESES ÁRNYÉKOLÁSRA

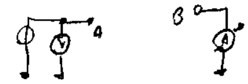
PASSZÍV ALKATRÉSZ (IMPEDANCIA) MÉRÉSE

- VISSZAVEZETNI U, I mérésre
- VALÓS MŰSZER (ELVI KAPCS. R-EK NINCSENEK BENNE.)



- 3 PÓLUS MÉRÉSE

EHHEZ:

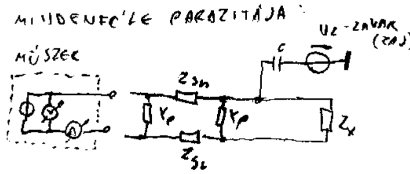


R_a NAGYON KICSI LEGYEN.

EKKOR:

- TÁVOLI Z_x MÉRÉSE

ILYENKOR VAN A HOZZÁVEZETÉSNEK MINDENFÉLE PARAZITÁJA:

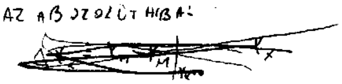


$$Z_{mért} = \frac{1}{Y_p + \frac{1}{Z_{S_h} + Z_{S_L} + \frac{1}{Y_p + Y_x}}}$$

$$Y_M \Big|_{Z_x=\infty} = Y_p + \frac{1}{Z_{S_h} + Z_{S_L} + Z_p} = K$$

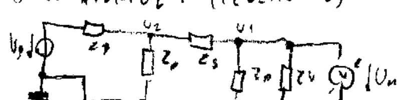
$$\left(Z_p = \frac{1}{Y_p}\right)$$

AZ ABSZOLÚT HIBA:



$$\Delta Y_x = Y_M - Y_x$$

- HA A VOLTMÉRŐ TÁVOL VAN A GENERÁTORTÓL: (FESZMÉRÉS)



ilyenkor:

$$U_M = U_2 \frac{Z_p \times Z_v}{Z_s + Z_p \times Z_v} = U_2\left(1 - \frac{Z_s}{Z_p \times Z_v}\right)$$

$$= U_2(1 - \varepsilon_2)$$

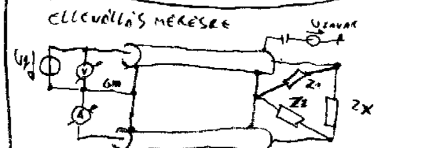
HASONLÓAN U_g és U_2 között

$$U_2 = U_g(1 - \varepsilon_1)$$

$$U_M = U_g(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$$

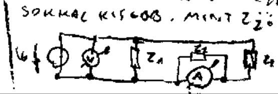
- 3 VEZETÉKES ELRENDEZÉS

ELLENÁLLÁS MÉRÉSE

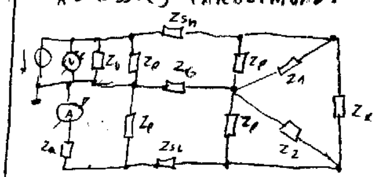


Z_1, Z_2 SZÓRT IMPEDANCIÁK

(MIVEL AZ AMPERMÉRŐ ELLENÁLLÁSA SOKKAL KISEBB, MINT Z_2, Z_2 ELHANYAGOLHATÓ LESZ)

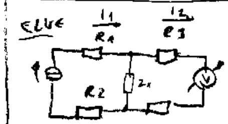


AZ ÖSSZES PARAZITÁVAL:



- 4 VEZETÉKES MÉRÉS ELREND.

ELVE



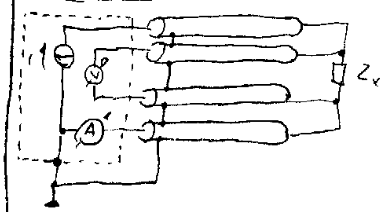
$I_1 >> I_2$

EZÉRT

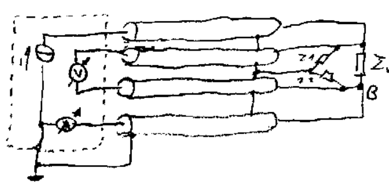
$U_{R_2} > U_{Z_4}$

TEHÁT A VOLTMÉRŐ KÖZEL helyes értéket méri, az áramnak meg a nagyrésze átfolyik Z_x-en.

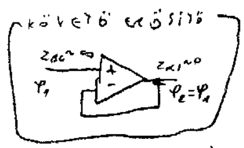
MEGVALÓSÍTÁS



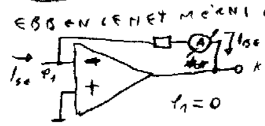
- 5 VEZETÉKES ELRENDEZÉS



HA „B"-PONTOT 1 KÖVETŐ ERŐSÍTŐN KERESZTÜL MÉRJÜK, AZ Z_2-T NEM TERHELI, AZON FESZKÜ NEM ESIK.

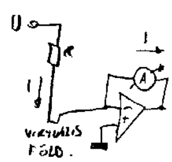


EBBEN LEHET MÉRNI AZ ÁRAMOT IS:



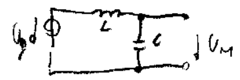
TEHÁT $Z_1 \times Z_v$-ET MÉRJÜK.

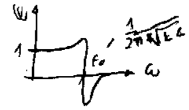
ÁRAMMÉRÉS



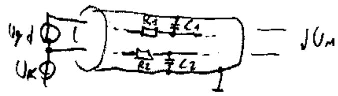
Frekvenciafüggés

– ~~[illegible]~~ szórt L, C





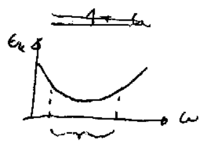
– Lebegő forrás méréseinél:



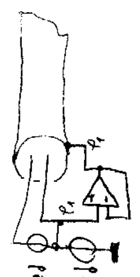
$\boxed{E_K = \frac{U_K}{U_M}}$ közös jel elnyomási tényező

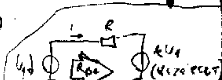
U_M? (U_g helyére rövidzárral)

$$E_K = \left|\frac{U_K}{U_M}\right| = \left|\frac{(1+j\omega RC)^2}{j\omega(R_2C_2 - R_1C_1)}\right|$$



– Feszültségutánhúzás alkalmazása





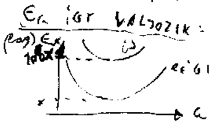
$I = \frac{U_1 - kU_1}{R}$

$R_{be} = \frac{R}{1-k}$

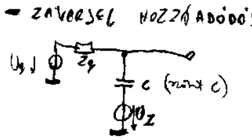
R-transzformáció

Tehát az árnyékolást nem a földre tesszük, hanem követő erősítővel az U_g, U_K közé. Itt R-a szivárgási R_p-re, $k=1$, így $R_{pö} = \frac{R_e}{1-1} \approx \infty$ jó nagy lett!

E_K így változik: $(k = 0{,}999998)$



– Zavarjel hozzáadódása U_M-hez



Ez az a fesz, ami Z_g-n esik (így adódik össze)

$$U_Z = \frac{Z_g}{Z_g + \frac{1}{j\omega C}} \cdot U_z \approx j\omega C Z_g U_z$$

– Zavarás induktívan:

mérőáramkör 1 része

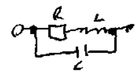
$$U_i = A \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \cdot \frac{dI}{dt}$$

$(I = \hat{I}\cos\omega t \to \frac{dI}{dt} = \hat{I}\sin\omega t)$

Jelátalakítók:

pl.: ellenállás

~~[illegible]~~



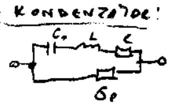
$Z = (R + j\omega L) \times \frac{1}{j\omega C}$ ezek közül az egyik a jelátalakító, a többi a parazita.

Alacsonyabb frekin:

$Z \approx R + j\omega\underbrace{(L - R^2C)}_{\text{induktív jellegű tényező}}$

$H = j\omega(L - R^2C)$

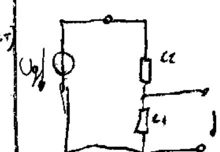
A kondenzátor:



C – frekifüggő kapacitás:

$$C = \frac{C_0}{1 - \omega^2 LC_0}$$

– Ohmos osztók:

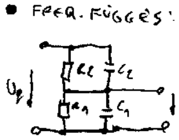


$U_M = \frac{R_1}{R_2 + R_1} \cdot U_g$

• Terhelés hatása:

$$U_M = \frac{R_1 \times R_V}{R_1 \times R_V + R_2} U_g$$

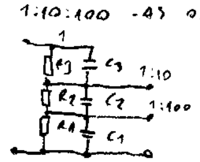
• Frekv. függés:



$$U_M = U_g \cdot \frac{R_1 \times \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 \times \frac{1}{j\omega C_1} + R_2 \times \frac{1}{j\omega C_2}}$$

• Ezügy tehető frekifüggetlenné, hogy: $R_1C_1 = R_2C_2$

• 3 szintű kimenet: 1:10:100 -as osztó:



R_1	$C_1/90$
$9R_1$	$C_1/9$
$90R_1$	C_1

freki független

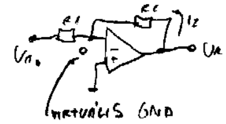
Mérőerősítők

• Műveleti erősítővel: Ezeket szeressük:

$A_U = \infty$ $R_{BE} = \infty$ $R_{KI} = 0$

$E_K = \infty$ $U_0 = 0$ (nullpont h.)

• Invertáló kapcsolásban

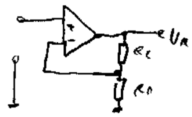


$I_2 = \frac{U_{KI}}{R_2}$

$U_{KI} = U_{BE} \cdot A_U$

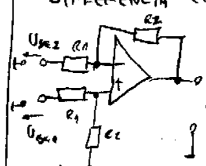
$= U_{BE} \cdot \frac{R2}{R1}$

• Nem invertáló



$A_U = \frac{U_{KI}}{U_{BE}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

• Differencia erősítő



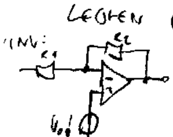
$U_{KI} = -\frac{R_2}{R_1}(U_{BE1} - U_{BE2})$

– Hibák

• Nullponthiba

– U_0-t kell a bemenetre kapcsolni, hogy $U_{KI} = 0$ legyen (offszet)

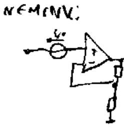
INV:



ezt is erősíti az erősítő (a hibát)

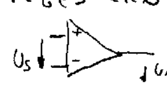
$$A = -\frac{R_2}{R_1} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{U_0}{U_{BE}}$$

NEMINV:



DIFF:

• Véges erősítés



~~[illegible]~~:

$U_S = \frac{U_{KI}}{A_{US}}$

emiatt a 2 bemenet közti fesz nem $= 0$

ha $A_U = \infty$: $U_{+-} = \frac{U_{KI}}{\infty} = 0$ lenne.

Az áramokra felírható: (neminv. erős. ⊖ bemenő pontjára)

$I_{R1} + I_{R2} = 0$

$$\frac{U_{BE} + \frac{U_K}{A_{US}}}{R_1} + \frac{U_{KI} + \frac{U_{KI}}{A_{US}}}{R_2} = 0$$

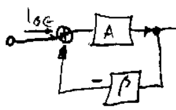
$$\frac{U_{KI}}{U_{BE}} = -\frac{R_2}{R_1}\left[1 - \frac{1}{A_{U(s)}}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right] =$$

$$= -\frac{R_2}{R_1}\left(1 - \frac{1}{H}\right) \text{ ahol } H = A_{U(s)} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

- FÁZISHIBA:

$\varphi \approx -\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{f}{f_1}$ AHOL: f_1-EN $A_u=1$

- VISSZACSATOLT ERŐSÍTŐ: (INVERTÁLÓNÁL)



$A=A_{(s)}$

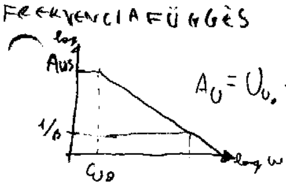
$\beta=-\frac{R_1}{R_1+R_2}$

$I_{ki}=A\cdot(I_{be}-\beta I_{ki})$

$\frac{I_{ki}}{I_{be}}=\frac{A}{1+A\beta}\approx\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{1}{H}\right)$

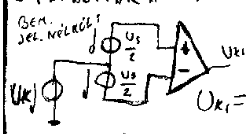
AHOL $H=A\beta$ (HUROKERŐSÍTÉS?)

- FREKVENCIAFÜGGÉS



$A_U=U_{U_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{H}}$

- PARAZITÁK A MŰVELETIE.-BEN:



IDEÁLISAN: NAGY KICSI

$U_{ki}=A_{U_s}\cdot U_s+A_{U_k}\cdot U_k$

$=A_{U_s}\left(U_s+\frac{A_{U_k}}{A_{U_s}}\cdot U_k\right)$

(BEM. JELLEL) $\frac{1}{E_{UK}}$ → KÖZÖS JELELNYOMÁSI TÉNYEZŐ

$A_{U_k}, A_{U_s} \neq$? TALÁN MERT A_U függ a frekitől ($j\omega$, s) és $f_{U_k}\neq f_{U_s}$

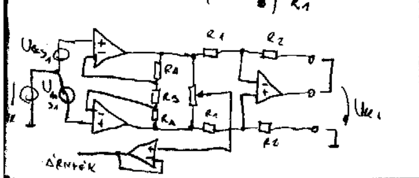
INVERTÁLÓ: EZ KEDVEZŐBB E_K-SZEMPONTJÁBÓL.

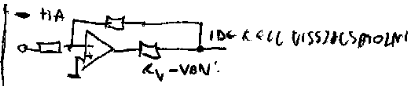
NEMINVERTÁLÓ:

$U_{ki}=\underbrace{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}_{A_{U_s}}U_{be}\cdot\left(1+\frac{1}{E_{U_k}}\right)$

- MŰSZERERŐSÍTŐ
  - DIFFERENCIÁL BEMENET (ILYENKOR SZOKOTT r_{be} KICSI LENNE)
  - (R+?) NAGY AZ r_{be}

$A_U=-\left(1+\frac{2R_4}{R_3}\right)\frac{R_2}{R_1}$

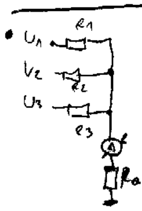




IDE KELL VISSZACSATOLNI, R_V-VON

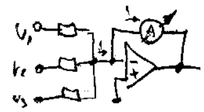
- VIVŐFREKVENCIÁS ERŐSÍTŐ

U→I ÁTALAKÍTÁS ÖSSZEGZÉSSEL



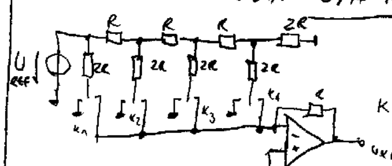
$I=\sum\frac{U_i-I\cdot\ell}{R_i}$

- MEGOLDÁS RÁ:



$I=\sum\frac{U_i}{R_i}$

- R-2R LÉTRAHÁLÓZAT D/A-hoz

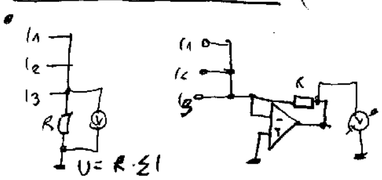


$U_{ki}=-U_{ref}\cdot\sum\frac{k_i}{2^i}$

$I=\frac{U_{ref}}{R}\sum\frac{k_i}{2^i}$

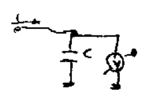
(AZONOS R-EK KELLENEK. IC-BEN LEHET ILYEN)

I→U ÁTALAKÍTÁS (ÖSSZEGZŐS)



$U=R\cdot\sum I$

- KIS ÁRAMOKHOZ

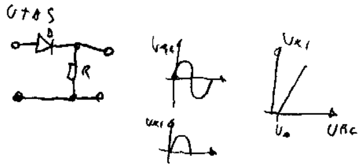


$U=\frac{I\cdot t}{C}$

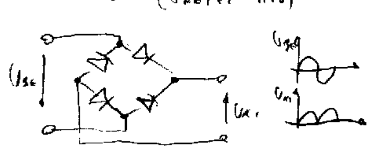
$Z_{be}=\frac{t}{C}=\frac{U_t}{I}\cdot\frac{I\cdot t}{C}\cdot\frac{1}{I}$

EGYENIRÁNYÍTÓK:

- 1 UTAS

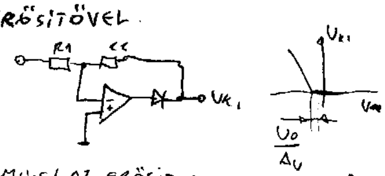


- 2 UTAS (GRAETZ-HÍD)



JELÁTALAKÍTÓK

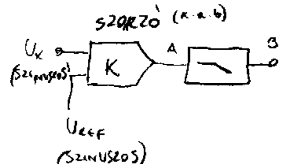
U_0 CSÖKKENTÉSE MŰVELETI ERŐSÍTŐVEL.



MIVEL AZ ERŐSÍTŐ JELEN VAN A DIÓDA: ARÁNYÁBAN KISEBB HIBÁT OKOZ (RELATÍV)

NAGYFREKIN A FÁZIS A_U-VAL CSÖKKEN

FÁZISÉRZÉKENY EGYENIRÁNYÍTÓ



AZ A-PONTON: (ÖSSZEG+KÜLÖNBSÉGI FREKVENCIA)

$U_A=k\hat U_x\hat U_{ref}\cdot\frac12\left[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)\right]$

$=\underbrace{k\hat U_x\hat U_{ref}\frac12\cos\varphi}_{\text{KONSTAN}}+\underbrace{k\hat U_x\hat U_{ref}\frac12\cos(2\omega t+\varphi)}_{2\times\text{ FREKV.}}$

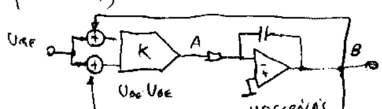
KONSTAN (φ-VEL ARÁNYOS) (MÁSSAL IS ARÁNYOS)

2x FREKV. EZT LESZŰRJÜK

$U_B=$

EFFEKTÍV ÉRTÉK (EGYENIRÁNYÍTÓ MÉRŐ)

(TRUE RMS)

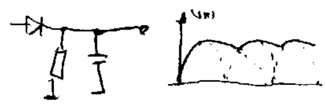


$U_{ki}=\frac{\hat U_{be}}{\sqrt2}$ A-PONTON LESZ 1 KONSTANS + 1 2X FREKIS TAG

EZT INTEGRÁLJUK, ÉS ÍGY B PONTON LESZ $\frac{\hat U_{be}}{\sqrt2}$

$U_{eff}=\frac1T\int_0^T U_x^2$

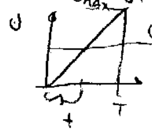
CSÚCSEGYENIRÁNYÍTÓ:



1 IDŐ UTÁN MÁR CSAK AKKOR TÖLT A KONDIT, HA $U_{ki}>U_C$ (KEVÉS IDŐ CSAK)

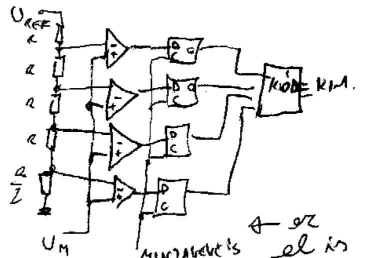
ADC – párhuzamos... → U–t, → FLASH
– ÁTLAGÉRTÉK (INT.)

• U–Δt U_{max} UF



$U_M = U_{max} \cdot \frac{t}{T}$

• FLASH (PÁRHUZAMOS)



és az el is maradt

HIBASZÁMÍTÁS PARAZITÁKKAL
(EZ RENDSZERES HIBA)
– MÉRT ÉRTÉK HIBÁVAL
– –||– HIBA NÉLKÜL
– A KETTŐ KÜLÖNBSÉGE: ABS HIBA
A 2 HÁNYADOSA A RELATÍV HIBA

$I_M = I_H \cdot A = I_H(1+h) = I_H \cdot \underbrace{I_H h}_{H}$

FÁZISHIBA:

$X_M = I_H \cdot A$ A – komplex kifejezés

(I_H – kifejezés minden PARAZITÁK NÉLKÜL FELÍRVA X_M)

$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{Im\{A\}}{Re\{A\}}$

VÉLETLEN HIBA: BIZONYTALANSÁG: NEM ISMERT A PONTOS ÉRTÉK, MERT A KÖRÜLMÉNYEK sem pontosan ismertek.

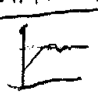
HIBATERJEDÉS RENDSZERES HIBÁNÁL:
(VALAMI OTT VAN-E) $x = a \cdot b$ $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

VÉLETLEN HIBÁNÁL: (...)

$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ (ABS) ÁTLAGOS ELTÉRÉS AZ ÁTLAGTÓL

VÉLETLEN HIBA: KONFIDENCIA INTEV.

DINAMIKUS HIBA



$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

TOTAL:

$X_h = X_m \left(1 + \frac{k}{x_m} \pm \frac{\varepsilon}{x_m}\right)$

KÜLÖN ÖSSZEGEZNI NÖSZETEVŐIKET (RELATÍV HIBÁK)

$X_h = X_m + k \pm \varepsilon$ (ABS HIBÁK)

$\frac{X_h}{X_m} - \frac{X_m}{X_m} = \frac{k}{X_m} \pm \frac{\varepsilon}{X_m}$

$\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{k}{X_m} \pm \frac{\varepsilon}{X_m}$

– HA RENDSZ. HIBÁNÁL:

$x = a \cdot b \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

• ha az előjelet nem ismerjük (?) (WORST CASE)

$\frac{\Delta x}{x} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|$

(Ugyanaz ABS jelleg)

• HA ISMERJÜK: nem kell | |-el

– VÉLETLEN HIBA: MINDIG: (RELATÍV)

$S = \frac{1}{n} \sum S^2 \approx \sigma$

egyenletes eloszlással

$3\sigma \to 97\%$ ...

• TÖBB TÉNYEZŐ, 1 MÉRÉS:

$a = b \cdot c \Rightarrow \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$

$\pm\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$ (REL.)

• 1 TÉNYEZŐ, TÖBB MÉRÉS:

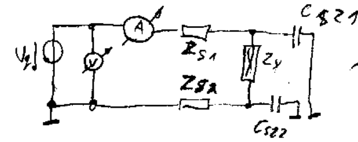
$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (\Delta x)^2}$ (ABS.)

HIBAÖSSZEGZÉS:
– ELŐJELES (pontosan ismertek) (ABS, REL)
– WORST CASE (ABS) (előjel nem ismert)
– VALÓSZÍNŰSÉGI (REL, ABS) $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

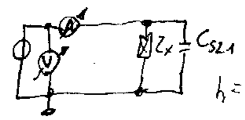
Melyiket válasszuk:
– hiba jellege (rendsz. véletlen)
– számítás célja (első ...)

2 VEZETÉKES MÉRÉS: (IMPEDANCIA)

a) FÖLDELT MŰSZER:



CSZ – HIBÁJA:

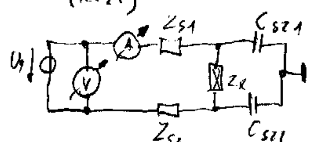


$h = \frac{\omega C_{SZ}}{Y_x}$

Z_S HIBÁJA: ... 2db Z_S van:

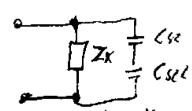
$h = \frac{Z_{S1} + Z_{S2}}{Z_x}$

b) FÖLDELETLEN MŰSZER (KÉZI)



itt maga a föld kölcsönhatás nem játszik szerepet, csak SZÓRTKÉPI 2 KAPACITÁS: a műszerhez nem kapcsolódnak

CSZ HIBÁJA



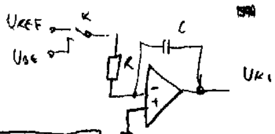
$h = \frac{Y_{C1} + Y_{C2}}{Y_x} \approx \frac{Y_{C1} + Y_{C2}}{Y_e}$

Z_S – HIBÁJA UGYANAZ

ADC – FOLYTATÁS

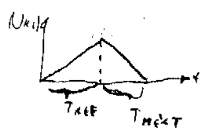
- **KETTŐS MEREDEKSÉGŰ ADC**

INTEGRÁLÓ ELVŰ
EGYENFESZT MÉRÜNK (LASSÚ)
MULTIMÉTEREKBEN



DUAL-SLOPE
Ez egy integrátor.
a bemeneti jellel arányos
a kondi áram, így
DC-bemenetre egyenletesen
nő (csökken) az U_{KI}

AZ A/D:
1.) U_{REF} (ellentétes az előjele mint az U_{BE}-nek)
U_{REF}-fel töltjük meghatározott ideig
2.) majd U_{BE}-vel kisütjük, közben mérjük a kisütési időt
3.)
$$U_{BE} = U_{REF} \cdot \frac{T_{REF}}{T_{MÉRT}}$$



Az időmérés számlálóval történik, tehát 1 számon 1 időtartam.
- a (ref) töltésnél vagy a T_{REF} állandó, és valameddig töltjük, vagy az U_{REF} állandó, és mérjük a hozzá tartozó töltési időt
- $T = N \cdot t_0 \leftarrow CLK$
- $\Sigma Q = 0$:

$$Q = \frac{U}{R} \cdot T$$

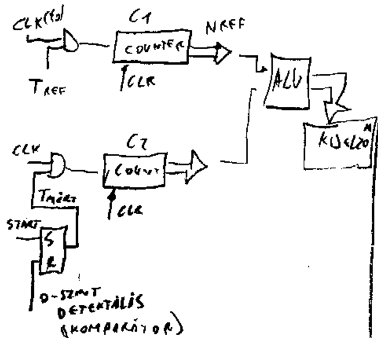
$$\Sigma Q = \frac{U_X}{R} T_{X} + \frac{U_{REF}}{R} T_{REF} = 0$$

- MÉRÉSI PONT: 0-HELY
0-szintet kell detektálni:

- TELJES:
t_0 – CLK nem kell hogy pontos legyen, csak $\frac{N_i}{N_E}$ arányt kell nézni:

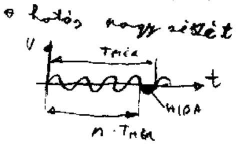
$$U_{BE} = U_{REF} \cdot \frac{N_{REF}}{N_{MÉRT}}$$

- FELÉPÍTÉS:

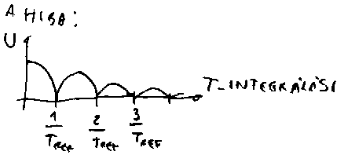


A T_{REF} valami MONOSTABIL multivibrátorral.
1. Mérés kezdetén CLR, CLK
T_{REF} indul, aminek vége, akkor C_1-ben számol tovább,
2. INDUL A KISÜTÉS:
START C_2-t indítja, majd a végén 0-szint leállítja
3. a 2 számlálót számot össze lehet hasonlítani
4. U_{REF} helyett az ALU kap 1 számot (KONSTANS)
(mérési pontoss. FÜGG AZ U_{REF}-től, mert a méréssel hasonlít U_{REF} nem pont = a tárolt KONSTANSSAL)

- INTEGRÁLÓ JELLEG:
a bemenő SZINUSZOS ZAJ KIÜLŐ
AC integrálja = 0 ha
a $T = n \cdot T_{PERIÓDUS}$
De ha $T >> T_{PER}$ AKKOR IS
a hatás nagy részét elnyomja.

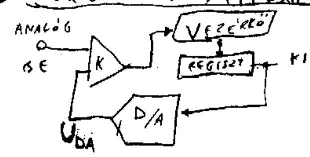


A HIBA:



- EGYÉB HIBA:
RÖVID IDEJŰ STABILITÁS!
t_0 = áll. 1 mérésre
HOSSZÚ IDEJŰ STAB.:
2 év múlva is pontos legyen
(kalibrálással, NP KORREKCIÓ, hibatűrő konstrukció.

- **SZUKCESSZÍV APPROXIMÁCIÓS**



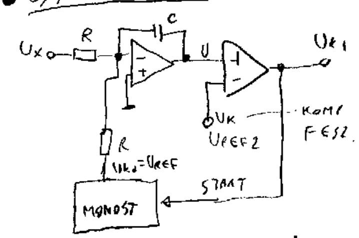
SOROZATOS KÖZELÍTÉSEN alapul
- 1 komparátor összehasonlítja a bemenetet a D/A kimenetével.
- eltérés esetén a kimenete + vagy – jelzi hogy sok, vagy kevés a D/A jele.
- ha sok, akkor a vezérlőnek csökkentenie kell a számot, (ami a D/A bemenete)
(ha kevés akkor növelni kell)
Tehát csökkenti kicsit, és újra megnézi, hogy jó-e.
- ha a K kimenete 0 akkor jó, és le lehet venni a kimenetet
Előbb mindig a nagyobb helyiértékekkel próbálkozik a vezérlő
(ha 1 helyiértéket már beállítottunk, akkor azt már csak 1szer lehet változtatni (összesen 2R)
(hiszen tudjuk a célt)
akkor kész, ha már a legkisebb helyiértéket is beállították. (nem kell a 0-kimenetet figyelni))
$$H < \frac{U_{BE}}{2^N}$$

- **SOROS – PÁRHUZAMOS**

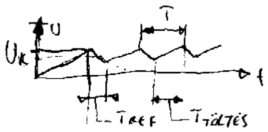
- ELŐSZÖR FLASH ADC-vel előállítunk 1 számot.
Ez lesz a felső n bit.
- Ezt a számot DAC-cal analóggá alakítjuk, majd kivonjuk a bemenő jelből.
- amit kapunk, azt újra FLASH-ADC-vel számmá alakítjuk az alsó n-bit lesz
- KIMENET
felső n-BT ; alsó n-bit

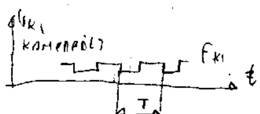
így nem kellett 2^{2n} db komparátor, csak $2 \cdot 2^n$ db.
Ez gyors, mint a FLASH, de sok bites

U/f ÁTALAKÍTÓ



1. U_x - tölti a kondit, ha
2. ha az eléri a szintet, akkor elkezdjük kisütni T_{REF} ideig. (MONOSTABIL)
3. T_{REF} letelte után újra U_x tölt.





- T periódusidőt $T_{FELT.}$ és $T_{KISÜT}=T_{REF}$ összege adja.
- A $T_{FELTÖLT}$ az U_x-től, a T_{REF} az U_{REF}-től függ.
- U_x, U_{REF} ellentétes
- így:

$$\frac{U_x+U_{REF}}{R}T_{REF}+\frac{U_x}{R}(T-T_{REF})=0$$

VAGY MÁSKÉPP:

$$\frac{U_x}{R}T_{TÖLT}+\frac{U_{REF}+U_x}{R}T_{REF}=0$$

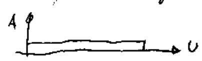
EBBŐL

$$F_{KI}=\frac{1}{T_{REF}+U_{TÖLT}}=-\frac{U_x}{U_{REF}}T_{REF}$$

SZIGMA-DELTA ÁTALAKÍTÓK ($\sigma-\delta$)

- NAGY felbontás, nem túl nagy frekvencia (48kHz, AUDIO)
- AZ, hogy hány bites, eléggé befolyásolja a zajszintet (A KVANTÁLÁSI HIBA)
- Ha 2^n-szer nagyobb a felbontás, akkor a zajarány 2^{2n}-ed részére csökken.
- de máshogy is lehet csökkenteni a zajszintet: ez a $\sigma-\delta$. (kevesebb BITTEL)

- eredeti zaj: (TELJESÍTMÉNY)

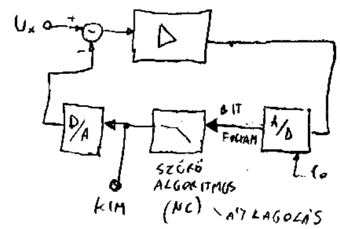


ÖSSZ P_{ZAJ} - CSÖKK, HA

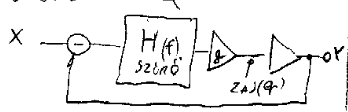
ebből le kell szűrni a nem hallható tartományt (akkor mindent)

ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐVEL (DIGITÁLIS)

- TÚLMINTAVÉTELEZÉS:
16 BITESEN veszünk mintát, aluláteresztő szűrőn szűrjük, ezután MARAD 12 BIT, ami nem zajosabb, mint az eredeti 16 BITES adat. (KEVESEBB hely kell majd a tároláshoz)
- felépítés:
(1 BITES) bitfolyam a kimenet.



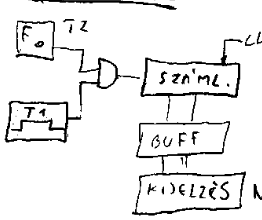
- A SZŰRŐ: (MÁSKÉPP)



$$y\approx x+\frac{q}{1+H(f)g}$$

FREKVENCIA ÉS IDŐ MÉRÉS

SZÁMLÁLÓKKAL



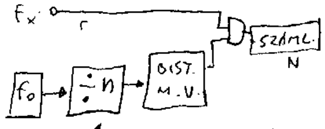
$$N\pm 1=\frac{T_1}{T_2}$$

az utolsó impulzus vagy benne van, vagy nem.

① FREKVENCIAMÉRÉS: $f_x\gg\frac{f_0}{n}$

- T_1 FIX, MONOSTABIL MÓTIV.
- integráló jellegű, f ingadozása nem nagyon befolyásolja.
- T_1-et stabilizálni kell!

- FELÉPÍTÉS



FREKVENCIAOSZTÓ

$$f_x=f_0\cdot\frac{N}{n}\qquad N=n\frac{f_x}{f_0}$$

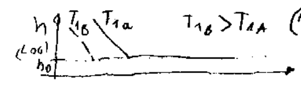
- HIBÁJA:

$$h=\frac{\Delta f_x}{f_x}=\pm\frac{\Delta f_0}{f_0}\pm\frac{\Delta N}{N}-\frac{\Delta n}{n^2}$$

TEHÁT: $1/N$; 0 MIVEL EGÉSZ SZÁMOK, ÉS FIXEK

$$h_i=\pm\frac{\Delta f_0}{f_0}\pm\frac{1}{N}=\pm h_0\pm h_N$$

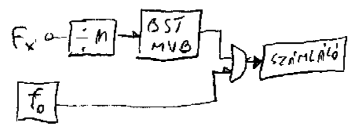
$T_{1B}>T_{1A}$ (A, B ESETEK)



② IDŐ (TARTAM) MÉRÉS

PERIÓDUSIDŐ MÉRÉSE:

$$\frac{f_x}{n}\ll f_0$$



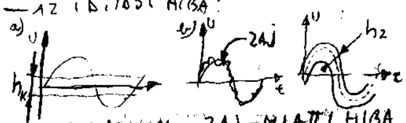
- az osztó átlagol is, átlag-periódusidőt mér, így integráló jellegű.
- F_x lehet nagy is, az osztó úgyis leosztja.

$$T_x=\frac{N}{nf_0}$$

- HIBÁJA:

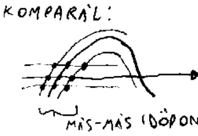
$$h=\frac{\Delta T_x}{T_x}=\frac{\pm\Delta f_0}{f_0}\pm\frac{1}{N}\pm\underbrace{\text{INDÍTÁSI HIBA}}_{\text{EZ A SZÁMOTTEVŐ}}(h_i)$$

- AZ INDÍTÁSI HIBA:



KOMPARÁLÁSI HIBA (JELSZINT, U_{REF})   ZAJ - MIATTI HIBA

EZEK MIATT MÁS IDŐPILLANATBAN KOMPARÁL:



$$\Delta T_x=\Delta T_Z+\Delta T_K=\frac{\hat{U}_Z+\Delta U_K}{S}$$

AHOL S-A JELMEREDEKSÉG:

$$S=\frac{d}{dt}U(t)\Big|_{t=0}$$

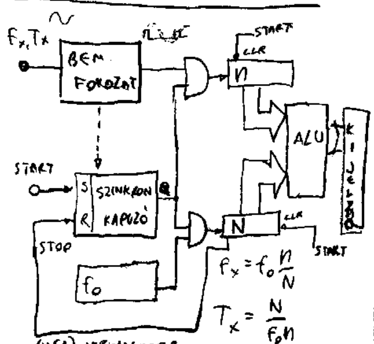
AZ INDÍTÁSI HIBA: $(\hat{U}_Z\gg\Delta U_K)$

$$h_i\approx\frac{\hat{U}_Z}{2\pi\hat{U}}=1/2\pi\frac{\hat{U}}{\hat{U}_Z}=\frac{1}{J\pi}\cdot\frac{1}{n}$$ AZ OSZTÓ MIATT

AHOL J - A JEL-ZAJ VISZONY [dB]

$$J=\hat{U}/\hat{U}_Z$$

● RECIPROK FREKVENCIAMÉRŐ



$f_x = f_0 \frac{n}{N}$

$T_x = \frac{N}{f_0 n}$

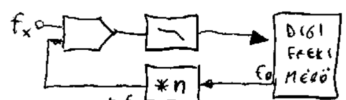
(MSB) LEGNAGYOBB HELYIÉRTÉKŰ BIT (2^N)

- Ha az f_0 számlálója (N) eléri a $\frac{N}{2}$-t akkor leállítja a n, N számlálását
- addig n is 0-tól számolt.
- a N számláló $\frac{N}{2}$ ig számolt addig a n, n-ig. Ebből kiszámítható f_x, T_x.

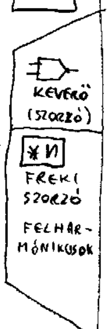
● HETERODIN FREKVENCIAMÉRŐK

- A MÉRÉSHATÁR KITERJESZTÉSÉRE.

EZÉRT A BEMENŐ JELET LEKEVERIK, ÍGY MÁR SIMA DIGITÁLIS FREKVENC. MÉRŐVEL IS MÉRHETŐ LESZ. DE EZÖL ALÉRT KICSIT BONYOLULTABB



$$\boxed{f_x = n f_0 - f_m}$$



- $n \cdot f_0 \pm f_x$ LESZ A keverő kimenetén. ebből $n \cdot f_0 - f_x$ marad a szűrés után. (A 2 TAG TÁVOL VAN EGYMÁSTÓL, MERT nf_0, f_x közel vannak. $nf_0 > f_x$)

HA $f_x > f_0$ akkor is azt méri, mintha ugyanannyival kisebb lenne, tehát ERROR. f_x NEM LEHET NAGYOBB, MINT nf_0

● KIS IDŐTARTAMOK MÉRÉSE

KETTŐS NÓNIUSZOS IDŐTARTAMMM.

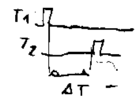
● HP 5315A f, T mérő:

- 2 csatornás, lehet vele időeltérést is mérni.

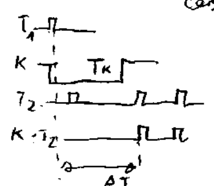
100MHz, 7DIGIT

- FUNKCIÓI, RÉSZEI:

1.) IDŐINTERVALLUM-MÉRÉS akár késleltetéssel:



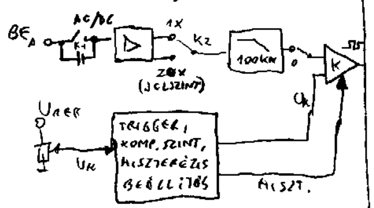
ezt mérjük, de késleltetéssel:



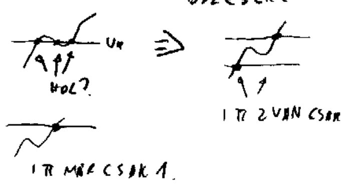
így más lesz a Δt

2.) (f_0) IDŐALAP GENERÁTORA: ÖREGEDÉS $< 3 \cdot 10^{-7}$ /HÓNAP

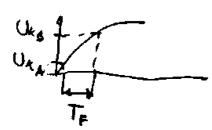
3. BEMENETI FOKOZAT! (2 CSATORNA)



- HISZTERÉZIS BEÁLLÍTÁS: ZAVAR-KIKÜSZÖBÖLÉSÉRE



- FELFUTÁSI IDŐ MÉRÉS: UGYANAZT a jelet az A, és a B bemenetre, csak a 2 komparálási szint különböző: az egyik 10%, a másik 90%.



$\hat{U} = U_p$ CSÚCSÉRTÉK

$2\hat{U} = U_{pp}$ – CSÚCSTÓL CSÚCSIG

EGYSZERŰ KÖZÉPÉRTÉK: $X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$

ABSZOLÚT KÖZÉP: $X_k = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|\, dt$

EFFEKTÍV ÉRT.: $X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)}$ ($= x_p \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ SIN, HA...)

CSÚCSTÉNYEZŐ $k_0 = \frac{X_0}{X}$

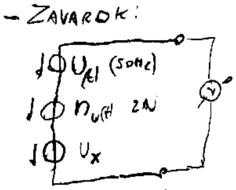
FORMATÉNYEZŐ $k_f = \frac{X}{X_k}$

SZINTMÉRŐK

MIT:
- DC áram, fesz.
- AC áram/fesz (széles sáv)
- szelektíven AC (SPEKTRUM)
- TELJESÍTMÉNY, ENERGIA.

● DC FESZKÓ ÉS ÁRAM

- ZAVAROK:



EZEK ÖSSZEGÉT TUDJUK MÉRNI

ÁRAMMÉRÉSNÉL UGYANEZEK, CSAK OTT ÁRAMFORRÁSOK.

- MÉRÉSRE MÓDSZEREK:

1.) NEM INTEGRÁLÓ

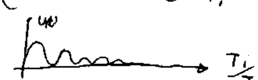
$$h = \frac{n_{u(t)} + U_{(t)}}{U_x}$$

2.) INTEGRÁLÓ JELLEGŰ:
- ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐVEL
- VAGY VEZÉRELT INTEGRÁTORRAL:

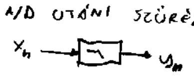
$$U_M = \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} U_{M(t)}\, dt$$

$\frac{T_i}{T}$ MINÉL NAGYOBB, ANNÁL JOBBAN CSÖKKENT

$$\left(\frac{1}{T_i}\int^{T_i} \hat{U} \sin\omega t = \frac{\hat{U}}{2\pi}\frac{T}{T_i} \cos \cdots\right)$$



- A/D UTÁNI SZŰRÉS:



DIGITÁLIS ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐ (ALGORITMUS)

$$y_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

(tehát menő ÁTLAGOLÁS) kis időkéséssel ad eredményt.

JOBBAN REAL TIME, HA:

$$y_{n+1} = \frac{x_n + x_{(n-1)}}{2}$$

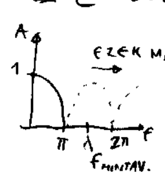
SPEKTRUMA:

$$Y_{(z)} = \frac{X_z + X_{(z)} z^{-1}}{2}$$

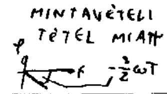
ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA:

$$W = \frac{Y_z}{X_z} = z^{-1}\frac{1 + z^{-1}}{2}$$

$$= e^{-j\varphi} \cos\frac{\omega T}{2}$$



EZEK MÁR NEM ÉRTELMESEK A MINTAVÉTELI TÉTEL MIATT

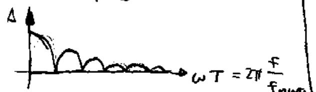


HA N-IG ÖSSZEGZÜNK (ÁTLAGOLUNK)

$$y_n=\frac{1}{N}\sum_{0}^{N+1} x_{n-i}$$

AKKOR

$$W=\frac{1}{N}\,\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{N}e^{-\alpha\omega T}\text{-SIN}\cdots$$



● **SZINT - SZÁMÍTÁSOK:**

- ABSZOLÚT KÖZÉPÉRTÉK:

olyan tartományon (okon) kell integrálni, amin belül nem vált előjelet. Ha igen, akkor darabolni az időtartományt $\left(T\to\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$

- ω helyébe a végén $\frac{2\pi}{T}$-t helyettesíteni!

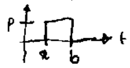
- NÉGSZÖGES JELNÉL

$f_{(x)}=1$ $\quad\int_a^b 1=x\Big]_a^b$

- FŰRÉSZJEL:

$f_{(x)}=a\cdot x$

- INTEGRÁLÁSI HATÁR FELBONTÁS:



$T=b$

$$x_0=\frac{1}{b}\int f_x=\frac{1}{b}\left(\int_0^a f+\int_a^b f\right)$$

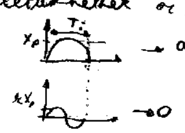
VAGY PL a-nál vált előjelet.

- x_0-nál előjelesen kell összegezni: $\int_a^b \ldots =0$

- x_k-nál ABSZ érték!

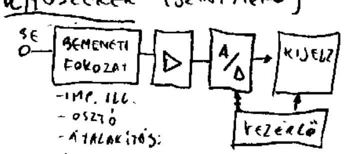
- EFFEKTÍV MÉRÉS

a felharmonikusok eltűnhetnek az eredményből:



$h=-\frac{1}{2}k^2$

● **DC MŰSZEREK** (SZINTMÉRŐ)



- IMP. ILL.
- OSZTÓ
- ÁTALAKÍTÁS: U→I R→U

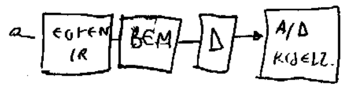
● **AC MÉRÉS:**

EGYENIRÁNYÍTANI KELL SZÉLES SÁVBAN KELL MÉRNI.

a) KISFREKVENCIÁN:

az egyenirányító a végén van, nem nagy probléma az erősítő nagyfrekis korlátozása.

b) NAGYFREKIN: $f>5MHz$



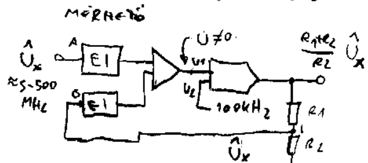
itt már probléma az erősítő felső határfrekvenciája, ezért elé kell tenni az egyenirányítót

- Sőt: a mérőfejbe tegyük a diódát

- NULLPONT-HIBÁJA VAN a diódának ezt elkerülni (lehetne az erősítő kimenetén, így $\frac{U_0}{A_U}$ lesz csak, de az erősítő f_{MAX} MIATT MÉGSEM)

- MÁS MEGOLDÁS:

NAGYON LECSÖKKEN AZ U_0 ÉS EGÉSZEN KIS FESZKŐ IS MÉRHETŐ



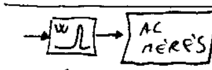
SZABÁLYOZÁS: IDE $\hat{U}_x$-ET ÁLLÍT BE. PERSZE NEM EGYENEN, HANEM 100kHz-ESEN A KIMENET MEG $\frac{R_1+R_2}{R}$ SZOROS CSÚCSÉRTÉKKEL, ÉS AZ IS 100kHz

A SZORZÓ KIMENETÉN:

$$\hat{U}_1\hat{U}_2\cos\varphi\cdot\cos 2\pi\cdot 100\text{kHz}\,t=U_{K1}$$

Ha a szorzó kimenetén ettől kisebb fesz lesz, akkor a B egyenirányító kimenetén is csökken a fesz, a műveleti erősítő bemenetén a 2 fesz eltérése >0 lesz, ezért a kimenete nő, ⇒ szorzó kimenete is nő: VISSZAÁLL ÍGY MEGY A SZABÁLYOZÁS.

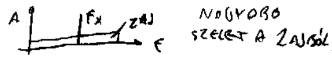
● **SZELEKTÍV SZINTMÉRŐK**



- felharmonikus, zaj kiszűrés, spektrumanalízis.
- bekapcsolás után még idő kell.
- megoldások:

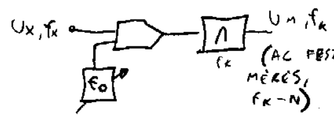
a) HANGOLHATÓ SZŰRŐ:

de itt Δf=áll. kellene, viszont ehhez változó Q-jóságú tényező kellen $\left(Q=\frac{f_0}{\Delta f}\right)$ ami nem kivitelezhető. Ezért $\Delta f\neq$ áll. lesz, így viszont a jel/zaj arány sem állandó:



NAGYOBB SZELET A ZAJBÓL

b) FREKVENCIA-TRANSZPOZÍCIÓVAL: KEVERÉS



A szűrő állandó, a jelet lekeverjük, változó helyről. $f_0>f_x$

PROBLÉMA:

$f_0\pm f_x$ jelenik meg.

Ha $f_x=f_0+\Delta f$ akkor ugyanazt méri, mint ha $f_x=f_0-\Delta f$ lenne

ezért f_0 felett le kell szűrni a bemenetet!

EZ A TÜKÖRSZELEKTIVITÁS

Ezt úgy oldják meg, hogy a bemenetre hangolószűrőt tesznek, amit együtt hangolnak f_0-VAL (f_x-köré). Mivel $Q<\infty$ ezért F-MÉRÉSHATÁR $\ll f_0$ kell hogy legyen, így biztos nem engedi át a szűrő a tükörfrekit (az messze lesz tőle)

$f_{K1}=f_K=f_0-f_{BE}=$ÁLL.

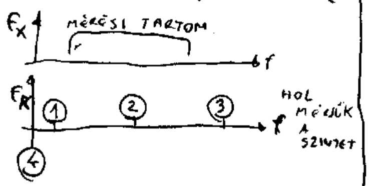
A BEMENETEN SOSE LESZ $f_{x_i}>f_0$

A SZŰRŐJE KARC-SZŰRŐ

$\frac{\Delta f}{f_x} = 10^{-4} \ldots 10^{-5}$

nem hangolhatók, de nem is kell mert lekeverünk

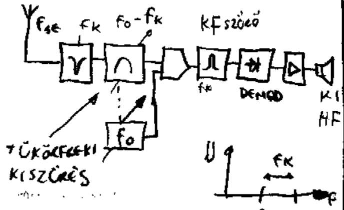
• SPEKTRUM ANALIZÁTOROK



4 FÉLE ELV VAN:

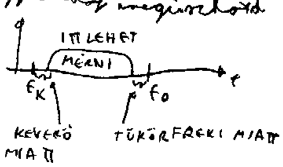
① HETERODIN VEVŐ (RÁDIÓ)

A RÁDIÓ:



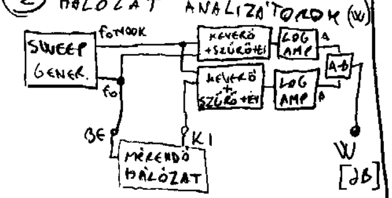
SPEKTRUM ANALIZÁTOR:
f_o-ból FOLYAMATOSAN LETAPOGATJUK A BEMENETET (ÚJRA ÉS ÚJRA: FŰRÉSZJELLEL VEZÉRELVE)

A KEVERŐ:
BEMENET ÁTSZŰRŐDHET A KIMENETRE.
EZ HIBÁT OKOZNA, HA A BEMENŐ FREKI KÖZEL = LENNE f_K VAL.
EZÉRT: távol legyen tőle, így a baj megszűnik



HA f_o, f_x nem jut a KIMENETRE: KIEGYENLÍTETT SZORZÓ (HETERODINÁL NEM GÁZ)

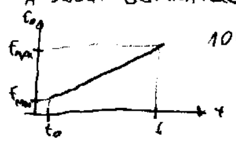
② HÁLÓZAT ANALIZÁTOROK (W)



$W = \frac{U_{KI}}{U_{BE}} = \log U_{KI} - \log U_{BE}$

A SWEEP GENERÁTORRAL PÁSZTÁZUNK f_{min}-től f_{max}-ig.

- A SWEEP GENERÁTOR:



10Hz - 10MHz (SÖPRÉS)

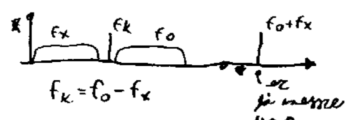
- A KEVERŐ + SZŰRŐ:

$f_K = 100kHz$

kimenete 1 100kHz-es jel, amplitúdója az f_o-s bemenettel arányos.

- Működés:
átviteli karakterisztika meghatározás.
Minden frekin az eredeti és a kimenet AMPLITÚDÓ arányát mérjük:
$\frac{A}{B}$ dB-ben: $\log\frac{A}{B} = \log A - \log B$
a keverés, szűrés a 2 freki miatt kell, hogy ne kelljen különbözőt, főleg nagy frekin egyenirányítani, hanem csak mindig 100kHz-en.
Kijelzés U_H határozza meg f_o-t. U_H függvényében $U_K(f)$ oszcilloszkópon ábrázolva

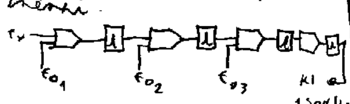
③ FEL-KEVERÉS (ALSÓ KEV.)
RÉGEBBEN HASZNÁLTÁK



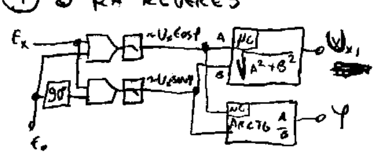
$f_K = f_o - f_x$

f_K messze van a 2 mérési sávtól, így nem zavar be az áthallás. Régen nem voltak jó kiegyenlített szorzók.

- EBBŐL AZ $f_K = 150MHz$-ről több fokozatban lekeverünk 150kHz-re, ott már jól lehet egyenirányítani, meg AC-t mérni.



④ 0-RA KEVERÉS



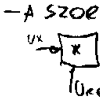
VAN BENNE 2 db FÁZISÉRZÉKENY EGYENIRÁNYÍTÓ. KIMENETÜK DC, $\hat U_x \cos\varphi$-vel, $U_x \sin\varphi$-vel arányos.

$f_o - f_x = 0$

TEHÁT $f_o = f_x$

f_o és f_x fáziseltérését, és $f_o+90°$ és f_x fázisát mérjük. Ha f_o - $\hat U$-ja = 1V akkor $\hat U_x\cos\varphi$ és $\hat U_x\sin\varphi$ lesz. így $\hat U_x$ számolható $\sqrt{\ }$, és f_o, f_x fáziseltérése.
ez nem ABS érték, hanem ehhez RELATIVAN.
az [LP] - levág mindent, ami nem DC.

- A SZORZÓ:



$u_x = \hat U_x e^{j(\omega t+\varphi)}$

$U_{REF} = \hat U_{REF} e^{j(\omega_o t+\varphi)}$

$X_{(f)} = ?$ (KEVERÉS 0-RA, Q=∞ SZŰRŐ)

$X(f_o) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f_o t}\,dt$

A SZORZÓ KIMENETE:

$\frac{\hat U_1 \hat U_2}{2}\left[\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2]+\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\varphi_1-\varphi_2]\right]$

HA $f_o > f_K$ AZ FELSŐ KEVERÉS
$f_o < f_x$ - ALSÓ KEVERÉS
viszont ne legyen egyszerre ilyen bemenet
$f_o+\Delta f$, $f_o-\Delta f$

- FOURIER TRAFÓ

$X_{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} e^{-j2\pi f t}\,dt$

HA $f=f_o$ AKKOR $X_{(f_o)}$-t KAPJUK.

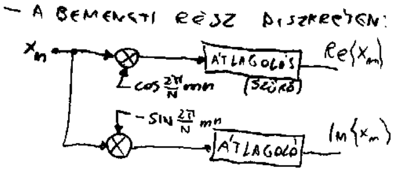
- DISZKRÉTEN: (n MINTA m. FREKI)
N db MINTA (REGISZTRÁTUM)
diszkrét spektrum.

$\left(X_{(m\cdot\Delta f)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\, e^{-j2\pi\frac{1}{N\Delta t}m\Delta t}\right)$

DE EZ NEM FONTOS, HANEM

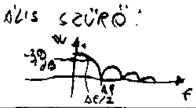
$X_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$

- A BEMENETI RÉSZ DISZKRÉTEN:

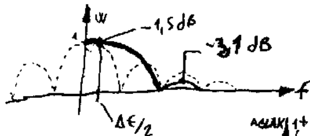


- EBBEN A DIGITÁLIS SZŰRŐ:
a) SIMA ÁTLAG:

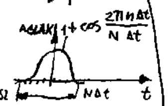
$y_n = \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$



b) MÁS ÁTLAGOLÁS
EMELT KOSZINUSZOS MÉRÉS

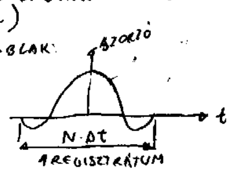


A REGISZTRÁTUM ABLAKA:
A MINTÁKAT E SZERINT SZOROZZUK. ÍGY W MÁS LESZ



c) FLAT-TOP ABLAK SZŰRŐ

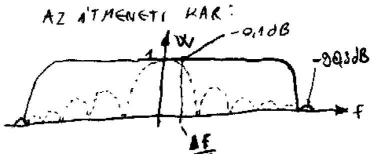
A BEJÖVŐ MINTÁK SZORZÓJA: (MINDEN MINTÁT MEGSZORZUNK EZZEL A FÜGGVÉNNYEL)



AZ ÍGY A KIMENET:

$$A_{(k)} = A_0 + 2\sum_{k=1}^{4} B_k \cdot \cos\frac{2\pi k n \Delta t}{N \Delta t}$$

AZ ÁTMENETI KAR:



$B_1 \dots B_4$ ELŐRE ADOTT SZÁMOK.

- A SIMA ÁTLAGOLÁSNÁL

AZ ABLAK: $x_k' = 1 \cdot x_k$

TEHÁT A MINTÁKAT ITT NEM SZOROZZUK FÜGGVÉNNYEL

- MINDEGYIKNÉL

$$y_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

csak az utolsónál a mintákat 1 függvénnyel szorozzuk előbb.

Δf/2-ig jól át kéne engedni.

- DIGITÁLIS SPEKTRUM-ANALIZÁTOR

0-RA KEVERNEK

ELVEK:

- SOROS

letapogatás f_0 VÁLTOZIK

- PÁRHUZAMOS

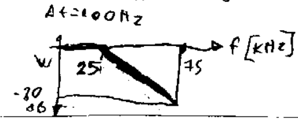
SOK KEVERŐ, SOK KVARC SZŰRŐ VAN BENNE, A FELBONTÁSTÓL FÜGGŐEN.

- HP MŰSZER

25 KHz-IG MÉR, 102KHz-EL MINTAVÉTELEZ

1024 MINTA = 1 REGISZTRÁTUM

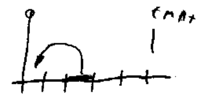
Δf = 100Hz



- SÁVSZELEKTÍV MÓDSZER

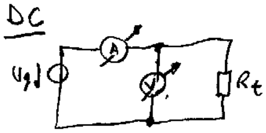
A MÉRÉSI tartományt darabokra osztjuk, és külön mérjük, így nagy felbontás:

Δf ≈ 1Hz



TELJESÍTMÉNY ÉS ENERGIA

DC



$P_M = U_M I_M$

$$P = P_m - \frac{U_m^2}{R_V} - \underbrace{I_m^2 \cdot R_A}_{0}$$

AC

$$P = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos\varphi = i_{eff} \cdot R_e\{Z\}$$ HATÁSOS

$$Q = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\sin\varphi$$ MEDDŐ

CSAK 1 FREKV. ÖSSZETEVŐRE! HA TÖBB VAN, AKKOR MINDEGYIK KÜLÖN.

$$U_{EFF} = \sqrt{U_{EFF_1}^2 + U_{EFF_2}^2 + \dots}$$

$A\sin k\omega t$, $A\cos k\omega t \rightarrow U_{EFF} = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin^2\omega t \rightarrow \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$

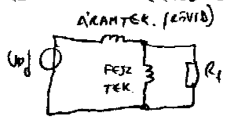
LÁTSZÓLAGOS TELJESÍTMÉNY:

$S = U_{EFF} I_{EFF}$ [VA]

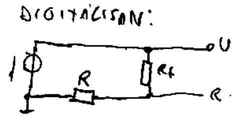
MÓDSZEREK

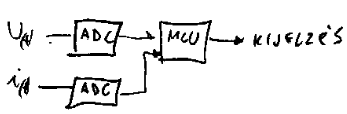
① KÉT TEKERCSES:

ÁRAMTEK. (ERŐS) (FESZÜLTSÉG (VÉKONY))

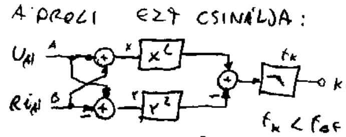


DIGITÁLISAN:





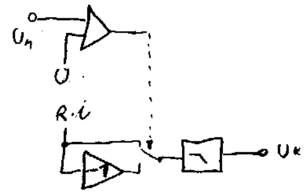
A PROCI EZT CSINÁLJA:



$f_k < f_{ef}$

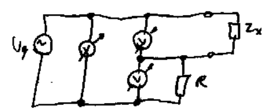
$$U_{k1} = (A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB$$

② IDŐOSZTÁSOS SZORZÓ



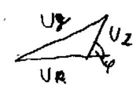
$$U_{k1} = -\frac{U_A U_B}{\hat{U}_M}$$

③ 3V-MÉRŐS MÓDSZER



$$P = \frac{\hat{U}\hat{I}}{2}\cos\varphi = U_Z \frac{U_R}{R}\cos\varphi$$

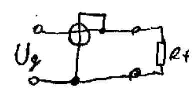
$$P = \frac{U_g^2 - U_Z^2 - U_R^2}{2R}$$



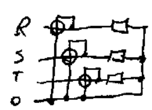
$$\cos\varphi = \frac{U_g^2 - U_Z^2 - U_R^2}{2 U_Z U_R}$$

④ 3FÁZISÚ P MÉRÉS

1 FÁZISRA



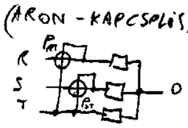
3 FÁZIS:



$P = P_R + P_S + P_T$

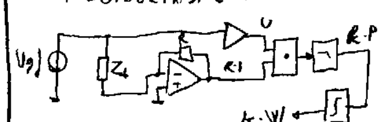
DE EGYSZERŰBB:

(ÁRON-KAPCSOLÁS)

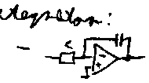


$P = P_{RT} + P_{ST}$

⑤ TÖBBFUNKCIÓS FOGYASZTÁSMÉRŐ

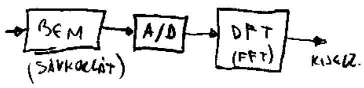


a kimenet folyamatosan nő! integrátor:

- 

- VAGY PROCI ÁRÖNKÉNT HOZZÁADJA 1 REGISZTERHEZ AZ AKTUÁLIS BEMENETET

DIGITÁLIS SPEKTRUM ANALIZÁTOROK



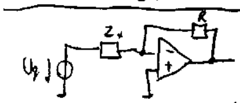
LASSÚ.

TÖBBIT MÁR LEÍRTAM A
O-RA KEVERÉSNÉL

ANALÍZIS SÁVSZÉLESSÉG = $\frac{f_M}{4}$

HA 1Hz felbontással
mérünk, akkor $f_M = 4$ Hz
MINTA – KIMENET – FREKVENCIA:
1024 ADAT MAJDNEM SPEKL.

IMPEDANCIA-MÉRÉS



$U_{K1} = U_g \cdot \frac{R}{Z_x}$

$Z_x = \frac{U_g}{U_{K1}} R$

NULLMÓDSZER:

Z_x-ET Z_{REF}-fel
HASONLÍTOM ÖSSZE

PL: WHEATSTONE HÍD

$Z_3 Z_1 = Z_2 Z_x$

$U_M = U_g \cdot \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} - \frac{Z_x}{Z_3+Z_x}$

MŰSZERJELLEMZŐK:

– FESZÜLTSÉG ÉRZÉKENYSÉG:

$E_U = \frac{\Delta U_M}{\Delta Z_x}$ MINÉL NAGYOBB, ANNÁL JOBB

relatív:

$E_{U_R} = \frac{\Delta U_M}{\Delta Z_x / Z_x}$

– KAPCSOLÁSI ÉRZÉKENYSÉG:

$H = \frac{\Delta U_M / U_M}{\Delta Z_x / Z_x} = \frac{E_U}{U_M} Z_x$

(E_U-relatívokkal)

– HÍDÉRZÉKENYSÉG

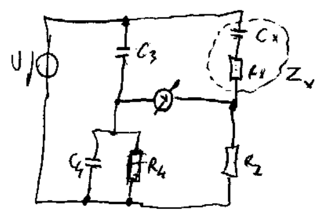
$F_0 = \frac{Z_3}{Z_x} = \frac{E_U^2}{1-E_U^2}$

– F_0 akkor H?

AKKOR E_U-t választjuk H helyett (?!?)

$E_U = \frac{F_0}{(1+F_0)^2}$ $|H| = \left|\frac{F_0}{(1+F_0)^2}\right|$

SCHERING-HÍD (NAGYFESZ)



FORMALIZMUS

$R_x = \frac{R_2}{C_3} C_4$ $C_x = \frac{R_4}{R_2} C_3$

$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ $A \cdot B = C \cdot D$

DE A, B, C, D-k SE:

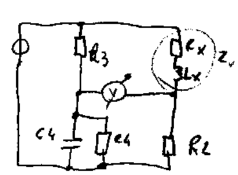
1 BE CSAK 1 ALKATRÉSZT,
VAGY A KONDIT, VAGY AZ R-T
VESZEM.

AHOL Z VAN CSAK AZ LEHET.

1 IK OLDALON C, A MÁSIKON R!

AHOL CSAK C VOLT R VAN, OTT
AZT AMI VAN.

MAXWELL-WIEN HÍD



$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}$

$L_x = R_2 R_3 C_4$

ITT MÁS FORMALIZMUS VAN:

$\underbrace{R_2 R_3 = R_4 R_x}$ $= L_x \cdot \frac{1}{C_4}$

SIMA WHEATSTONE
(REZISZTÍV RÉSZRE)

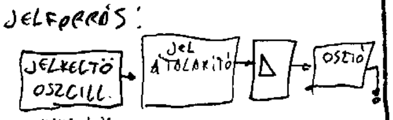
JELGENERÁTOROK

MÉRÉSEK:

– SZINUSZ
– MÁS FORMA:

– ZAJ

JELFORRÁS:



– HANGOLÁS
– INDÍTÁS
– KAPUZÁS
– SZINKR.

① OSZCILLÁTOROK

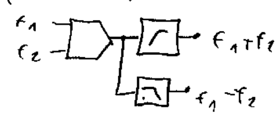
– RC OSC 20 Hz ... 20 kHz

– LC 1 kHz ... 300 MHz

– KRISTÁLY FIX FREKI
1 kHz ... $n \times 100$ MHz

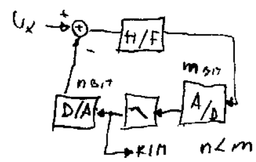
② JEL ÁTALAKÍTÓ (pl)

– (KRISTÁLLYAL)



– SZIGMA-DELTA:

DIGITALIZÁLJUK, ÉS
CSÖKKENTJÜK A ZAJT, AMI
A KVANTÁLÁSI HIBÁBÓL ERED

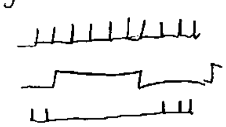


HA ÍGY DIGITALIZÁLUNK,
AKKOR 2^{m-n}-NEL
JOBB LESZ A JEL-ZAJ VISZONY

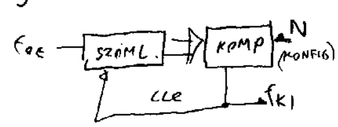
– FREKI SZORZÁS

– FREKI OSZTÁS:

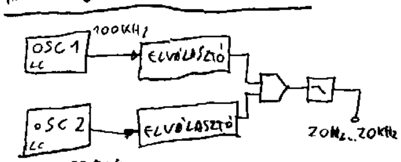
a) MONOSTABIL KAPUZÁS (OST.)



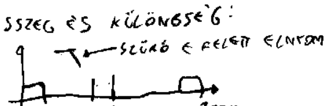
b) SZÁMLÁLÓVAL



HETERODIN GENERÁTOR:



ÖSSZEG ÉS KÜLÖNBSÉG:



$f_{KI} = f_1 - f_2 = 20k \ldots 0$ Hz

STABILITÁS:

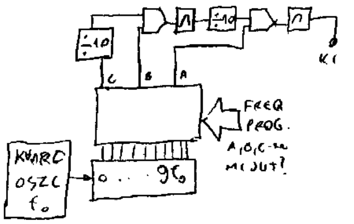
- hosszú idejű:
  nem fontos, úgyis folytonosan állítgatják
- EGYÜTTFUTÁS
  a különbségük állandó maradjon: mindkettőnél állandó legyen a frekv., esetleg együtt változzanak (ESETLEG TERMOSZTÁT KÖZÖSEN)

AZ ELVÁLASZTÓ:

Mindkét felbe beszűrődik a másik Cs-en keresztül. Ezt alul, felül áteresztő szűrővel ki kell szűrni.

KVARCOSZCILLÁTOR:

DIREKT FREKVENCIASZINTETIZÁTOR



KIMENET:

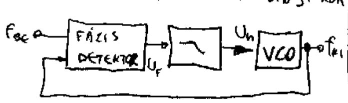
$f_{ki} = (A + 0,1B + 0,01C) f_0$

3 SZÁMJEGY PONTOSAN BEÁLLÍTHATÓ A KIMENET

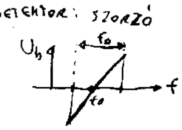
- kvarc szűrők
- ... KIMENETE:
  9 + 0,1 + 0,01 } CSAK 1
  9 − 0,1 − 0,01 } MARADHAT
- ÁTKAPCSOLÁSKOR HIRTELEN VÁLT.

PLL (FÁZISZÁRT HUROK)

INDIREKT FREKVENCIASZINTÉZIS
VISSZACSATOLT SZABÁLYOZÁSI KÖR



- FÁZIS DETEKTOR: SZORZÓ
- VCO (LC)



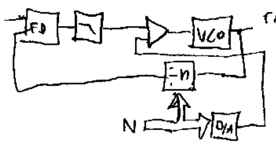
U_h - hangolófesz

VARIKAP DIÓDÁVAL
±20% HANGOLHATÓ

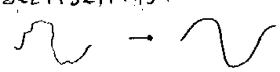
- SZABÁLYOZÁS: f_{ki} követi f_{be}-t. Ha f_{ki} csökken, (kicsit) fázisban elcsúszik, U_F nő, U_h is, ez hatja a VCO-t úgy állítja, hogy f_{ki} nő.

(- A FÁZISDETEKTOR NEM FÁZISÉRZÉKENY EGYENIRÁNYÍTÓ (VAGY IGEN?) KIMENETE NEM KÉNE HOGY FÜGGJÖN a bemenő jel amplitúdójától)

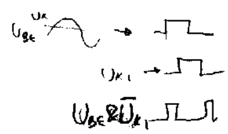
- Ha a visszacsatolásba osztót teszünk (n) akkor a kimenet $f_{ki} = n f_{BE}$.
- Ha nagy tartományt akarunk átfogni, akkor ELŐHANGOLÁS kell a VCO bemenetére.



- JELTISZTÍTÁS:



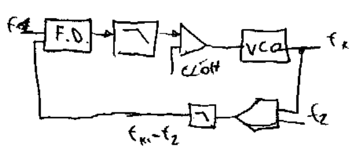
- LEHET DIGITÁLIS IS:
  A FÁZISDET:



ez Δφ-vel arányos

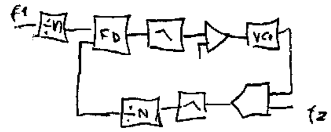
aluláteresztő szűrővel ez 1 DC szint lesz, amely vezérli a VCO-t...

- ÖSSZEGZÉS



$f_{ki} = f_1 + f_2$ ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBAN

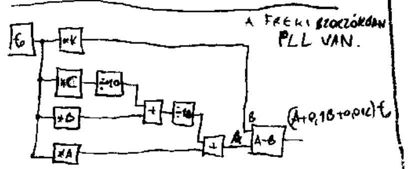
- KOMBINÁLT HUROK



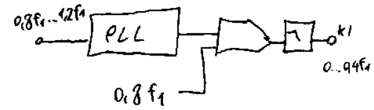
$$\frac{f_1}{n} = \frac{f_{ki}-f_2}{N} \Rightarrow f_{ki} = \frac{N}{n} f_1 + f_2$$

INDIREKT FREKVENCIASZINTETIZÁTOR

A FREKI SZORZÓKBAN PLL VAN.

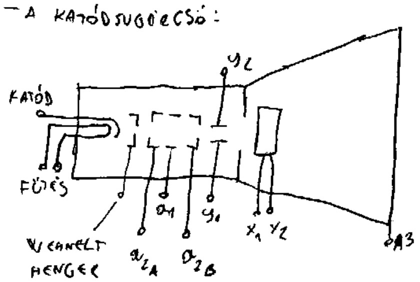


- KIMENETI RELATÍV FREKVENCIATARTOMÁNY NÖVELÉSE:



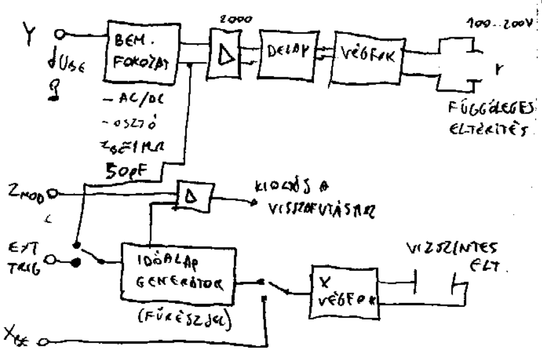
OSZCILLOSZKÓPOK

- IDŐFÜGGVÉNY MEGJELENÍTÉS
- A KATÓDSUGÁRCSŐ:

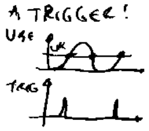


a_2: ASZTIGMATIZMUS (PONT-ALAK)

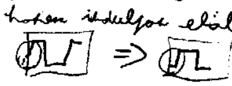
- Amikor a sugár (fehér) a végére ért, kikapcsoljuk a sugarat, amíg visszaugrunk.
- TRIGGER: hogy mindig ugyanott kezdődjön a kép.
- FELÉPÍTÉS:



- A TRIGGER!



- KÉSLELTETÉS: GYORS felfutású jeleknél nem jó ha pont ott indul a kép, hanem indulása előbb



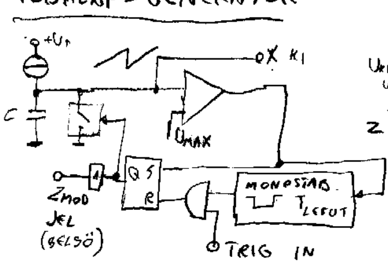
- SZÁMÍTÁS: (KIJELZÉS)

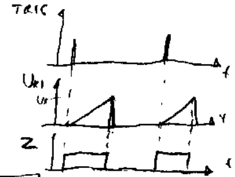
$\hat{U}_{BE}=?$ $\hat{U}_{BE}=\frac{1}{2}U_{BE_{pp}}$

$$\frac{U_{KI_{Y\,MAX}}}{A_U}\cdot\frac{1}{\text{OSZTÁS}}\cdot\frac{\text{OSZTÁS}}{\text{MAX OSZTÁS}}\cdot\frac{1}{2}=\hat{U}_{BE}$$

- Z MODULÁCIÓS BEMENET kioltás visszafutáskor.
- SÁVSZÉLESSÉG:
  - a) a cső MAX 100MHz (elektron tömeg miatt)
  - b) vízszintes erősítőnek KICSI
  - c) Y ERŐSÍTŐÉ NAGYOBB. (A ⊓⊔ jelet se torzítva lássuk)
- 2 CSATORNÁS SZKÓP
  - 2 SUGARAS
  - ELEKTRONKAPCSOLÓS (RITKA, DRÁGA)

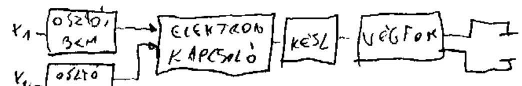
- IDŐALAP-GENERÁTOR





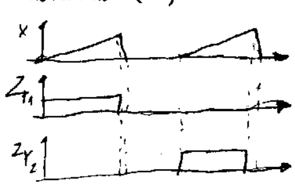
Ha U_{KI} eléri U_{MAX}-ot, akkor beállítja a FF-ot, ez engedi kisütni a kondit. Akkor töltődhet újra a kondi, ha TRIGGER jel jött, és eltelt már annyi idő a kisütés kezdete óta, hogy biztos teljesen kisült már A KONDI.

- 2 CSATORNÁS



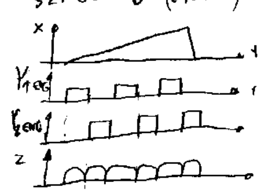
- ÜZEMMÓDOK: (2CSAT)

ALTERNÁLÓ (ALT)



itt felváltva A, B csat.

SZAGGATÓ (CHOP)

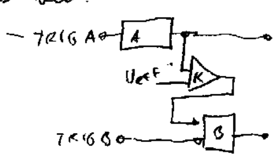


itt állandóan váltogatva A,B váltáskor tiltjuk a sugarat. (LASSÚ JELEK)

- KETTŐS IDŐALAP GENERÁTOR

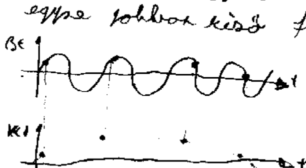
Jelet kis rész, azután, kinagyítva kiírjuk.

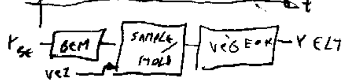
Az A időtartamig 1 sebességgel FUTUNK végig B-vel.

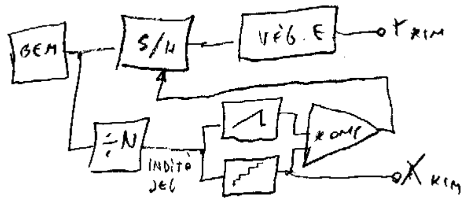


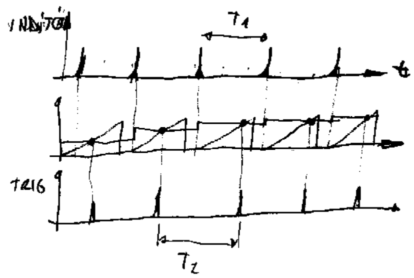
- MINTAVÉTELEZŐ SZKÓP

Csak periodikus jeleknél akkor GHz-ig is ki lehet jelezni.
Minden PERIÓDUSBÓL 1 mintát veszünk, de egyre később kissé fázissal



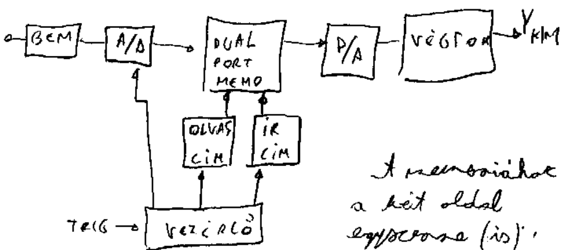






$T_2 > T_1$
(RITKÍT)

– DIGITÁLIS TÁROLÓS SZKÓP



A memóriához a két oldal egyszerre (is) tud hozzáférni

így egyszerre írunk, és olvasunk.
Pl csak 1szer írunk a memóriába,
de akárhányszor, alkalmasint olvasunk
(CAPTURE

14. fejezet

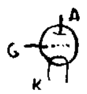
Elektronika

AKTÍV ESZKÖZÖK

- ELEKTROMECHANIKA
  RELÉK – (DIGITÁLIS ERŐSÍTŐK)

- VÁKUMTECHNIKA
  1. VÁKUMDIÓDA (EDISON 1880)

2. TRIÓDA 1912
RÁCSVEZÉRLÉS

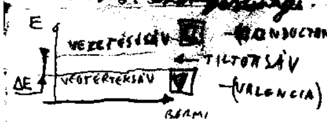


3. .. n fejlettebb csövek (pentóda) katódsugárcső, képfelvevő csövek.

- SZILÁRDTEST FÉLVEZETŐK
  TŰS TRANZISZTOR ELŐSZÖR
  IC
  (DISZKRÉT: ALKATRÉSZ 1 TOKBAN, nem látjuk, mi van a tokban)

TÖLTÉSHORDOZÓK, FÉLVEZETŐK

Elektronok energiaszintjei:

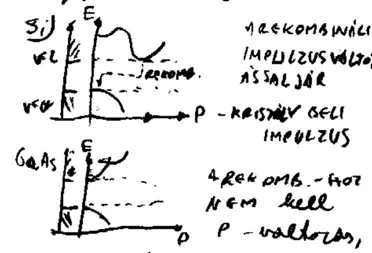


1 ATOMNÁL: ENERGIASZINTEK,
RÁCSBAN: SÁVOK! (és a tiltott TILTOTT SÁV)

- Elektron energiaugrásai:
  a) VEGY. S. → VEZETÉSI
  EZ GENERÁCIÓ. Lyuk szabad elektron keletkezik
  Ehhez külső gerjesztés kell
  Csak ha T > 0K°
  b) VEZETÉSI S. → VEGY. S.
  REKOMBINÁCIÓ
  Energia szabadul fel.

- ANYAGOK:
  a) félvezető: ΔE > 0 DE KICSI
  Ilyenkor a termikus energia is viheti fel elektronokat. (1,12eV – S_i)
  b) SZIGETELŐ
  DE NAGY (SiO_2 – 4,3eV)
  (feljutás valószínűsége exp. függ a ΔE-től)
  c) VEZETŐ ΔE < 0 – átfedés
  tehát szabad mozgás

Ez a grafikon hibátlan:



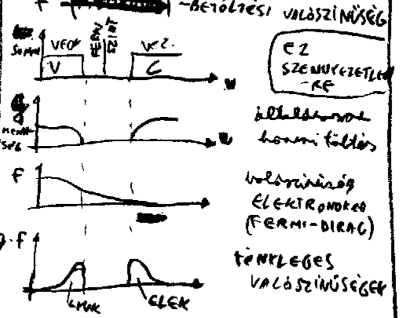
így fényt is kibocsáthat
$P_{fény} = 0$

ADALÉKOLÁS

Si-ben a termikus töltéshordozók kevesen vannak. Ezek (vagy e' vagy lyuk) számát adalékolással növelik
a) DONOR ADALÉK (n-típ)
negatív a többségi töltéshordozó
5 vegyértékű szennyezés: 4 beépül a rácsba 1 szabad lehet minimális energiával (termikus)
b) AKCEPTOR SZENNYEZÉS (p-típ)
LYUK (+) a többségi töltéshordozó
3 vegyértékű atomok.
Ez a 3 beépül a rácsba, + hozzájárul 1 szabad elektront, így valahol 1 LYUK keletkezik

TÖLTÉSHORDOZÓSŰRŰSÉG-ELOSZLÁSA

F – BETÖLTÉSI VALÓSZÍNŰSÉG



AZ ELEKTRONSŰRŰSÉG:
$$n \cong c \cdot T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_c - W_F}{kT}} \qquad = \int_{W_c}^{\infty} f \cdot g \, dW$$
LYUKSŰRŰSÉG:
$$p \cong c \cdot T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_F - W_v}{kT}} \qquad \left[\frac{db}{cm^3}\right]$$
FERMI SZINT: OK°-ON MAX ENNYI LEHET AZ ELEKTRON ENERGIÁJA (E)

$$\boxed{n \cdot p = c \cdot T^3 e^{-\frac{W_G}{kT}}}$$ EZ A TÖMEGHATÁS TÖRVÉNY
~~W-FÜGGÉS~~
W_G – a tiltott sávszélesség (BE)

Ez csak termikus egyensúlyban!

- SZERKEZETI (INTRINSIC) FÉLVEZETŐKNÉL
$n_i = n_p$ (ix $W_F = \frac{W_c + W_v}{2}$)
$$\boxed{n \cdot p = n_i^2} = \left(10^{10}/cm^3\right)^2$$
EZ MINDENHOL
Si – nál 20°C – on
$S_i \Rightarrow 5 \cdot 10^{22} \frac{db\ atom}{cm^3}$

- SZENNYEZÉSSZÁMÍTÁS: $\left[\frac{db}{cm^3}\right]$
Ha lyuksűrűséget növeljük, akkor a sz. elektronsűrűség csökken!
EZ ATÖMEGHATÁS TÖRV.
1. kiszámoljuk n_i-t ($f(T)$, vagy: 10^{10})
2. HA DONOR ADALÉKOLUNK, N_d DARAB SZENNYEZŐ
akkor $n = N_d$
(ez nem T-függő!)
3. EKKOR $p = \frac{n_i}{n}$ A LYUKSŰRŰSÉG (EZ n_i-vel együtt függ T-től)
4. ADALÉKSŰRŰSÉG:
$$S = \frac{N}{n_i} \qquad N = N_d \text{ vagy } N_a \quad 5 \cdot 10^{22} \ (Si)$$
$$S = N / N_{DARAB\,ATOM}$$
5. TÖLTÉSHORDOZÓ SŰRŰSÉG FÜGGÉSE T-től:
$$\frac{dn_i^2}{n_i^2} = \frac{d}{dp} n \cdot p = \left(3 + \frac{W_G}{kT}\right)\frac{dT}{T}$$
TEHÁT HA T AZ 1,5 SZÖRÖSÉRE változik, akkor $\left(M = 3 + \frac{W_G}{kT}\right)$
$n \cdot p$ az $1,5 \cdot M$ szeresére.
N-szennyezésnél n = áll tehát a változás = a p változása.
HA $n = N_d$, ⇒ n = áll:
$$\frac{dP}{P} = M \cdot \frac{dT}{T}$$

ÁRAMOK A FÉLVEZETŐKBEN

- SODRÓDÁS (DRIFT): EZ AZ E térerősség hatására
- DIFFÚZIÓS: Ezt az adalék-sűrűség-különbség hozza létre (PN átmenet)
  (addig tart, míg a kialakuló E-tér hatására a DRIFTÁRAM ki nem egyenlíti)
- HŐKÜLÖNBSÉG MIATT
- MÁGNESES TÉR (HALL)
  VAGY INJEKTÁLÁS UTÁN ELOSZLIK A SOK ÚJ ELEK

1. A DRIFTÁRAM:
E=0-nál sodródik T-miatt a töltéshordozók. E≠0-nál sodródik
$v_{el} = \mu E$ (μ – mozgékonyság)
ÁRAMSŰRŰSÉG:
$$\bar{J} = q\left(n\mu_n + p\mu_p\right)\bar{E} \qquad \boxed{q = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ EGYSÉGNYI TÖ.}}$$
(tehát n-re és p-re összegezve)
MIVEL $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ (σ – FAJLAGOS VEZETÉS)
EZÉRT: $\sigma = q\left(n\mu_n + p\mu_p\right)$ $\left(\frac{1}{\Omega} \frac{1}{cm^3}\text{-BEN SZÁMOLNI}\right)$

2. DIFFÚZIÓS ÁRAM
DIFFÚZIÓS áramsűrűség:
$$J = q \, D_n \, \text{grad}\, n \quad \text{– elektronra}$$
D_n, D_p – DIFFÚZIÓS ÁLLANDÓK. $D = U_T \mu$

GENERÁCIÓ / REKOMBINÁCIÓ:
GENERÁCIÓS RÁTA: $= \frac{DARAB}{V \cdot t}$ (generálódott töltéshordozók)
g_n, g_p
REKOMBINÁCIÓS RÁTA $= \frac{MRAD}{V \cdot t}$ ← hol. (eltűnnek)
r_n, r_p

ÉLETTARTAM: keletési és ... töltött idő (GEN. → REKOMB.) (τ_n, τ_p) ENNEK AZ ÁTLAGOS ÉRTÉKE

EGYENSÚLYBAN:

$$g_n = r_n = \frac{n_0}{\tau_n} \quad (\%/ \text{ ...})$$

(n_0 - az egyensúlyi elektronsűrűség)

FOLYTONOSSÁGI EGYENLET: (ELEKTRONOKRA)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q}\operatorname{div}(\vec{J}_n) + g_n - r_n$$

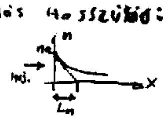
DIFFÚZIÓS EGYENLETEK:

$$\frac{dn}{dt} = \mu_n \operatorname{div}(n\vec{E}) + D_n \Delta n + g - \frac{n}{\tau_n}$$

M, ?!?

L_n - DIFFÚZIÓS HOSSZÚSÁG:

$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$



PN-ÁTMENET

MŰKÖDÉS:

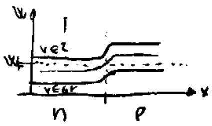
- ELTÉRŐ T.H. SŰRŰSÉG MIATT DIFFÚZIÓS ÁRAM INDUL. EZ ADDIG, AMÍG AZ EGYENETLEN TÖLTÉSELOSZLÁS MIATT KIALAKULÓ E-TÉR hatására folyó driftáram ki nem egyenlíti 0-ra. $\xi = 1$ (DIF. FESZ.)
- KIÜRÍTETT RÉTEG JÖN LÉTRE. (ITT E hatása a $\xi = 0$) U_d-MIATT IDE TÖLTÉSHORDOZÓK NEM JÖNNEK BE.
-  (Ezeket még kontakt-potenciálok is: ~~...~~)

$$U_d + U_{En} + U_{PF} = 0 \qquad \text{ILYENKOR } U_d = U_{np}$$

- Ha feszültséget kapcsolunk rá: az U_d-t növeli vagy csökkenti (U_{np} - az n és a p között feszültség)

 $U_{np} = U_d - U$

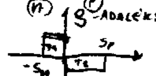
- SÁVÍZLÉS:

 $U_d = U_T \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$

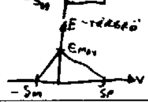
- KIÜRÍTETT RÉTEG SZÉLESSÉGE

A gyengébben adalékolt oldalon szélesebb a kiürített réteg. (AKÁR 1000x) (és $S_n \ll S_p$ általában)

(n) (p) ρ ADALÉKSŰRŰSÉG

 $\tau_1 = \tau_2$

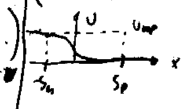
E-TÉRERŐSSÉG



$$E_{MAX} = \frac{q N_A}{\varepsilon} S_p$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ $\quad \varepsilon_{r,Si} = 11,8$

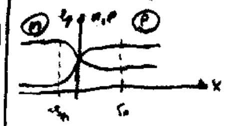
(KIÜRÍTETT RÉTEG = TÉRTÖLTÉSRÉTEG)

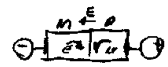
 2 PARABOLA

KONCENTRÁCIÓSZÁMÍTÁSNÁL A KONCENTRÁCIÓT Si-BAN: $[\frac{1}{cm^3}]$ kell behelyettesíteni, ha nagyobbal is számolunk, ... ha csak n-ekkel dolgozunk: NEM KELL

$$S_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{q N_A}}\sqrt{U_D - U}$$

- TÖLTÉSHORDOZÓ KONCENTRÁCIÓK:



NYITÓ TARTOMÁNY: 

többségi töltéshordozókat nyomjuk ezek a PN átm. felé

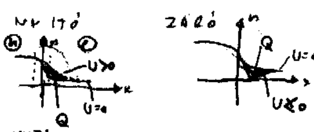
A TÖBBSÉGI TÖLTÉSHORDOZÓKAT GYORSÍTJUK A PN átmenet felé, túl ott találkoznak: rekombinálódnak

EZ AZ ÁRAM (DIFFÚZIÓS ÁRAM)

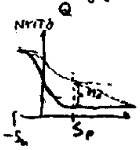
- ZÁRÓIRÁNY: A kisebbségieket nyomjuk a PN átmenet felé. ez kevesebb, kevesebb lesz a rekombináció is.

TÖLTÉS, NYITÓIRÁNY: U_d csökken, így még túljuthatnak töltések az átmeneten. Ez a DIFFÚZIÓS TÖLTÉS: Q

NYITÓ ZÁRÓ



NYITÓ

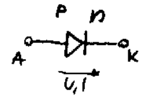
 $\Rightarrow n_0 = n_p e^{\frac{U}{U_T}}$

- DIFFÚZIÓS ÁRAM: (NYITÓÁRAM)

$$\boxed{I = I_0\left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1\right)}$$

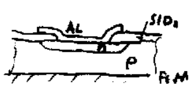
(I_0 - KISEBBSÉGI TÖLTÉSHORDOZÓK ÁRAMA, ATELÍTÉSI ÁRAM. $I_0 \approx 10^{-13}$ A)

A DIÓDA



A KIS NYÍL MINDIG AZ n-RE MUTAT

KIALAKÍTÁS: (PLANÁRIS)

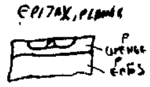


MÁSODLAGOS JELENSÉGEK:

1. SOROS ELLENÁLLÁS (NAGY ÁRAMOKNÁL). A réteg vastagsága miatt.

MEGOLDÁS:
- Erősen adalékolni a P réteget de akkor a letörési fesz. kicsi lesz. (ERŐSEN A ... VEZET)
- EPITAXIÁLIS

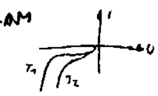
EPITAX. PLANÁR



így a PN átmenetnél kicsi az adalékolás, így ha $U_{nő} \to S_p$ GYORSAN NŐ, így nem üt át, mert elég nagy lesz, de az áram az erős P részen is átfolyik, így R-KICSI.

2. GENERÁCIÓS ÁRAM

Záróirányban



g - generációs ráta

$g \sim V_{\text{KIÜR. RÉTEG}} \leftarrow U_z$ így $g \leftarrow U_z$

$$I_R = I_z = q A \cdot S_{(U_R)} = C \cdot n_i \sqrt{-U_R}$$

DIÓDA KISJELŰ MŰKÖDÉSE

KISJELŰ MŰKÖDÉS:

A munkapont körül csak kis környezetben mozgunk a vezérléssel, ahol a karakterisztika $\approx$ LINEÁRIS

- ELLENÁLLÁS:

$r = r_{DIFF} + R_S$ (R_S - SOROS R r_d - meredekség)

$r = \frac{U_1}{i_1} + R_S = \frac{dU}{dI} + R_S$ (MUNKAPONTI MEREDEKSÉG)

$r_d = \frac{U_T}{I - I_0}$ (NYITÓ IRÁNYBAN)

$U = U_T \ln \frac{I}{I_0 + 1}$

$\boxed{r_d \approx \frac{U_T}{I}}$ $\boxed{r = \frac{U_T}{I} + R_S}$

VALAMIÉRT $r_d + R_S$ -t [15] HÍVJÁK r_d-NEK

- KAPACITÁSOK

1) TÉRTÖLTÉS KAPACITÁS C_T (ZÁRÓIRÁNY)

Ez a kiürített réteg, mint dielektrikum kapacitása U_z NŐ, C_T CSÖKK

$$C_T = c \cdot \frac{1}{\sqrt{U_D - U}} = \varepsilon \frac{A}{d} \qquad U_D = U_0 \text{ DIFFÚZ. FESZÜLTS.}$$

Ez kb. 5pF.

2) DIFFÚZIÓS KAPACITÁS (NYITÓIRÁNY)

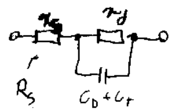
A Q diffúziós töltés megváltozásából kifolyólag van

Ezt a NYITOTT dióda mértéki. $\approx$ 5nF

$$C_D = c \cdot I \qquad (C \sim I)$$

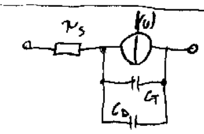
τ - csökkentésével C_D is csökken ezt megfelelő adalékolással vagy az egyik oldalon vékony a réteg, így ott nem fér el egyszerre sok töltés

DIÓDA KISJELŰ HELYETTESÍTŐ KÉPE



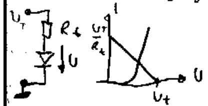
Az elemek munkapont-függőek.

NAGYJELŰ HELYETTESÍTŐKÉP



EGYENLETEK:
$I = I_0(e^{U/U_T}-1)$
PARAMÉTEREK: I_0, r_s

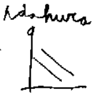
- MUNKAEGYENES SZERKESZTÉSE:



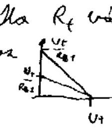
M.E.: $I = \frac{U_T - U}{R_t}$

M.P.: $I_0(e^{U/U_T}-1) = \frac{U_T-U}{R_t}$

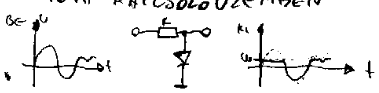
Ha U_T változik a M.E. párhuzamosan mozdul el.



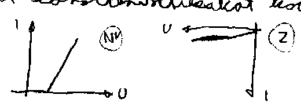
Ha R_t változik, akkor



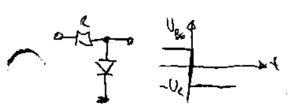
- DIÓDA KAPCSOLÓÜZEMBEN



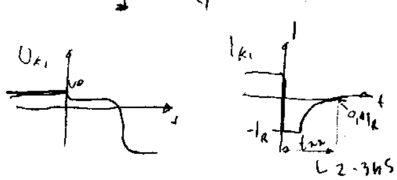
A karakterisztikákat közelítjük.



TRANZIENSEK:



Amíg C_D kisül az az idő.
Ez az $-I_R$ a KIHÚZÓÁRAM
A DIFFÚZIÓS TÖLTÉST ki kell kiszívni:



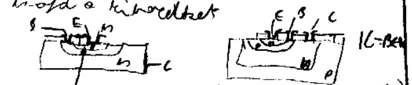
$$I = \frac{Q_D}{\tau_{n/p}} + \frac{dQ}{dt}$$ EZ A TÖLTÉS EGYENLET

$$Q_D = I_{NY} \cdot \tau_{KISS}.$$

$$C_D = \frac{Q_D}{U_T}$$

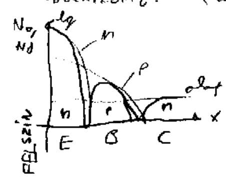
BIPOLÁRIS TRANZISZTOR

- PLANÁR TRANZISZTOR: (gyártás, felépítés)
(NPN) n-típusú hordozóba (szubsztrát) AKCEPTOR (p) SZENNYEZÉST diffundáltatnak 1 ablakon keresztül (SiO_2 ABLAK). Ezután kisebb ablakon keresztül diffundáltatnak erős donor(n) szennyezést kisebb mélységig, majd a kivezetéseket



(a HORDOZÓ ÉS A COLL. közös ezüstpor + SZIGETEL)

AZ ADALÉKPROFIL:

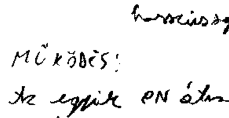


Az emitter erősebben adalékolt, mint a coll.

- TRANZISZTORHATÁS:
kell hozzá: • a szélső réteg (E) erősebben legyen adalék. mint a KÖZÉPSŐ (a bázis gyengén adalékolt)
• bázis vékonyabb legyen, mint a kisebbségi töltéshordozók DIFFÚZIÓS hossza ($L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$)

MŰKÖDÉS:
Az egyik PN átmenet ~~...~~ nyitóirányban, a másik záróban.
A nyitó PN átmenet áramának(E) hatására a BÁZISBAN megnő a kisebbségi töltéshordozók száma (NYITÓÁRAM: TÖBBSÉGI TÖLTÉSHORDOZÓK ÁRAMA, DE HA ŐK ÁTJUTNAK A TÚLOLDALRA, AKKOR ŐK OTT MÁR KISEBBSÉGINEK SZÁMÍTANAK. AKKOR JUTNAK ÁT, HA NEM JUT MINDEGYIK REKOMBINÁCIÓHOZ, A GYENGE SZENNYEZÉS MIATT.)
A BC (másik, záró előfeszítésű) PN átmenet záróáram feszültsége viszont a kisebbségi töltéshordozókat gyorsítja. Minél több be dobott ..., annál megnő a záróáram.

- TEHÁT AZ AIK PN ÁTMENETNEK HA NŐ A NYITÓ ÁRAMA, AKKOR A MÁSIKNAK NŐ A ZÁRÓ ÁRAMA. EZ AZ TRANZISZTORHATÁS



I_B, I_E: MINDKETTŐBŐL x nő a töltések, és rekombinálódik.
Egy másikra viszont csak így kevés.
Ami az EMITTERBŐL csak így átmegy, az (elektron, ...) továbbhaladnak.

- ÁRAMERŐSÍTÉS: I_C-NEK A ZRÉSZE hogy aránylik egyeshez, ami az EREDETI, ÉS AMI TOVÁBBJUT

TEHÁT AZ ÁRAMERŐSÍTÉS:
$A = \frac{I_C}{I_E}$ EBBE NEM SZÁMÍTJUK BELE A CB ÁTMENET NYUGALMI ZÁRÓÁRAMÁT! (I_{CB0}) ← ELHANYAG.
ANNÁL JOBB, MINÉL KÖZELEBB VAN A 1-HEZ.
(EZ A KÖZÖS BÁZISÚ EGYENÁRAMÚ ERŐSÍTÉS)

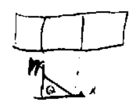
- EGYENLETEK:
$I_C = -A \cdot I_E - I_{CB0}$

INJEKTÁLÁSI HATÁSFOK:
$\eta_e = \frac{I_{En}}{I_E}$ - E elektronáram / - ZE áram $\approx 1 - \frac{I_{Ep}}{I_{En}}$ DIFFERENCIA: $I_{E_{lyuk}}$
(I_E és I_{En} különbsége az a LYUKÁRAM, ami átjut a bázisból az emitterbe)

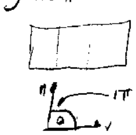
TRANSZPORT HATÁSFOK
$\eta_{Tr} = \frac{I_{Cn}}{I_{En}}$ - kollektor elektronáram - emitter elektronáram

$A = \eta_e \cdot \eta_{Tr}$
(IT A DIFFERENCIA: I_{CB0}, I_B)

- TRANZISZTOROK BÁZIS-ADALÉKOLÁSA:
a) HOMOGÉN BÁZISÚ



b) INHOMOGÉN BÁZISÚ (ÁLTALÁBAN ILYET GYÁRTANAK)



IT MIDNEZIK A PALAB, így ~~...~~

Ez az INHOMOGÉN SZENNYEZÉS MIATTI TÉRERŐ HATÁSA (BEÉPÍTETT TÉR)
Kevesebb Q, így gyorsabb a TRANZISZTOR. (DIFFÚZIÓS TÖLTÉS)
EZ A BEÉPÍTETT TÉR HATÁSA: U_B

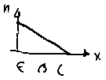
$$U_K = U_T \ln \frac{N_{B(em.oldal)}}{N_{B(koll.oldal)}}$$

- I_{EN} (EM.EL.ÁRAM)
$$I_{EN} = \frac{A q D_n n_i^2}{W_B N_B}\left(e^{U_{BE}/U_T}-1\right)$$
IT W_B AZ EFFEKTÍV (KIÜRÍTETT RÉTEGEK KÖZÖTTI) BÁZISVASTAGSÁG

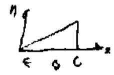
- BÁZISTÖLTÉS:
$$Q_B = \frac{n_i^2}{2N_B}\left(e^{U_{BE}/U_T}-1\right) W_B A q$$

TRANZISZTOR (BJT) ÜZEMMÓDJAI:

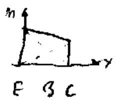
1) NORMÁL AKTÍV
BE-NYÍLT
BC-ZÁRT



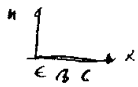
2.) INVERZ AKTÍV
BE-ZÁRT
BC-NYÍLT



3.) TELÍTÉS
BE-NYÍLT
BC-NYÍLT



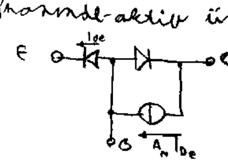
4) LEZÁRÁS
BE-ZÁRT
BC-ZÁRT



HELYETTESÍTŐ KÉPEK (MODELLEK)
(IDEÁLIS TRANZ.)

AZ EBERS-MOLL MODELL

a) normál-aktív üzemben

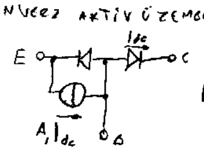


$$I_{DE} = I_{ES}\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}-1\right)$$

└ EMITTER OLDALI SZATURÁCIÓS (TELÍTÉSI) ÁRAM.

I_{DE} – EMITTER OLDALI DIÓDA ÁRAMA

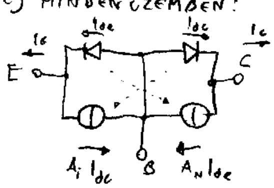
b) INVERZ AKTÍV ÜZEMBEN:



$$I_{DC} = I_{CS}\left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}}-1\right)$$

└ KOLL. OLD. SZATUR. ÁRAM

c) MINDEN ÜZEMBEN:



$$I_{DE} = I_{ES}\cdot\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}-1\right)$$
$$I_{DC} = I_{CS}\cdot\left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}}-1\right)$$

EBERS-MOLL EGYENLETEK

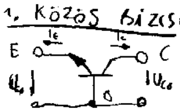
$$\frac{I_{ES}}{I_{CS}} = \frac{A_I}{A_N}$$

$$\begin{bmatrix} I_E \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A_I \\ -A_N & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{DE} \\ I_{DC} \end{bmatrix}$$

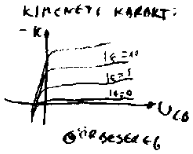
INJEKTÁLÁSI MÁTRIX

KARAKTERISZTIKA, MŰKÖDÉS, ALAPKAPCS.

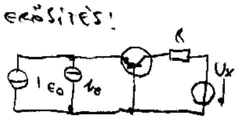
1. KÖZÖS BÁZISÚ

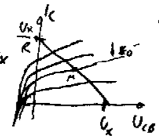


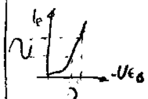
KIMENETI KARAKT.:



ERŐSÍTÉS:







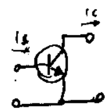
a ... jellemző r_d

$$r_d = \frac{U_T}{I_E}$$

$$U_{BE} = i_b\cdot r_d$$
$$U_{Ki} = i\cdot R_t$$
$$A_U = \frac{U_{Ki}}{U_{CC}}$$

U_{BE} - BÁZ./EMIT.
U_{BE} - GEN. FESZ.

2. KÖZÖS EMITTERES KAPCS.



ÁRAMERŐSÍTÉSEK:

$$A_N = \frac{I_C}{I_E} \qquad B_N \approx \frac{I_C}{I_B}$$

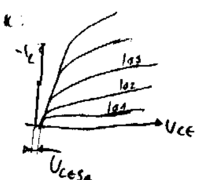
$$B_N = \frac{A_N}{1-A_N}$$

$$A_N = \frac{B_N}{1+B_N}$$

B_N – A KÖZÖS EMITTERES NAGYJELŰ ÁRAMERŐSÍTÉS.

$$I_C = -B_N I_B - I'_{CEO} = -B_N I_B - \frac{I_{CBO}}{1-A_N}$$

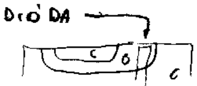
KARAKTERISZTIKÁK:



VALÓSÁGOS TRANZISZTOR

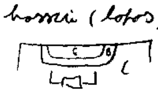
MÁSODLAGOS HATÁSOK:

1.) CB DIÓDA



rontja az erősítést.

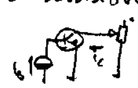
2.) SOROS R: a) bázis vékony, és hosszú (lapos) ezért nagy.



b) KOLLEKTORKIVEZETÉSNÉL: a nagy ablakolás miatt.
Ezt EPITAXIÁLIS TECHNOLÓGIÁVAL csökkenthetik

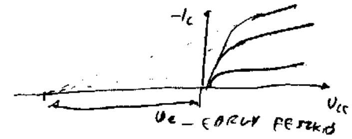
3) EARLY HATÁS h_{22}, h_{12}

a) FESZÜLTSÉGVISSZAHATÁS h_{12}



U_{CB} NŐ ⇒ CSÖKKEN A BÁZIS-SZÉLESSÉG ⇒ CSÖKKEN AZ ELEK. TKON-SŰRŰSÉG ⇒ U_{BE} VÁLTOZIK

b) KIMENETI VEZETÉS (h_{22})



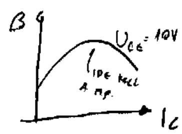
$$r_{Ki} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{U_E}{|I_C|}$$

NEM ELÉG NAGY

(BE-ről U_E kivezetve)

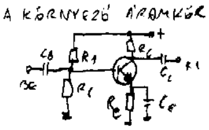
4) ÁRAMKISZORÍTÁS
BIZONYOS ÁRAM (I_C) felett a bázisnak csak a szélére kerül el vezetni.
TÖBB BÁZISKIVEZETÉS KELL.

5.) ÁRAMERŐSÍTÉS FÜGG A MUNKAPONTTÓL

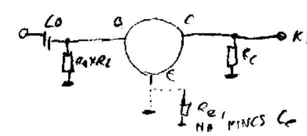


KISJELŰ HELYETTESÍTŐ KÉPEK

- A KÖRNYEZŐ ÁRAMKÖR:



ENNEK:

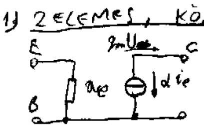


- A HELYETTESÍTŐ KÉPEK:

1. FIZIKAI
   - 2 ELEM
   - 3 ELEM
   - 8 ELEM
2. 4PÓLUS
   - h PARAMÉTERES
   - y PAR.
   - s PAR.

FIZIKAI

1) 2 ELEMES, KÖZ BÁZ

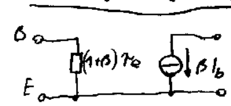


$$\alpha = -\frac{i_c}{i_e} \approx A_N$$

I_E arányosan vezérli I_C-t.

$$r_e = \frac{U_T}{I_E} \qquad \alpha i_e = -g_m U_{eb}$$

2 ELEMES KÖZ. EMITT.



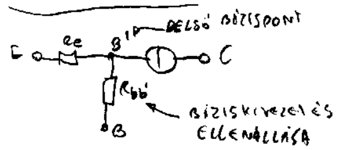
β – KISJELŰ KE ÁRAMERŐS. TÉNYEZŐ

$$\beta = -\frac{I_c}{I_b} \approx B$$

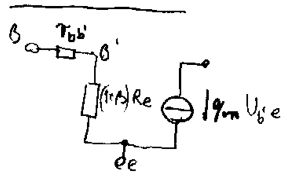
$$U_{be} = r_e(1+\beta)\cdot i_b$$

$$\alpha = \frac{\beta}{1+\beta} \qquad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

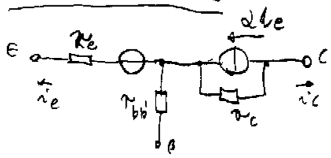
3 ELEMES KÖZBÁZ



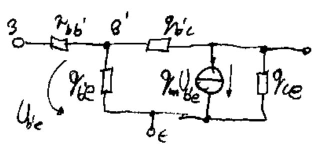
3 ELEMES KÖZEM.



5 ELEMES KÖZBÁZ



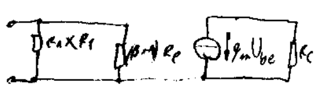
5 ELEMES KÖZ. EMITTERES



Ez a hibrid π helyettesítő kép

- - - - - - - - - -

AZ ERŐSÍTŐ ÁRAMKÖR: (KE)



$A_U = -g_m \cdot R_C \qquad g_m = \frac{I_E}{U_T}$

$r_{be} = R_{B1} \times R_{B2} \times [(1+\beta) r_e]$

$r_e = \frac{U_T}{I_E} \qquad \alpha i_e = -g_m U_{eb}$

g_m - TRANZ. MEREDEKSÉGE:

$g_m = \frac{I_C}{U_{EB}} \approx \frac{I_E}{U_T} = \frac{1}{r_e} \qquad \left(g_m = \alpha \frac{1}{r_e}\right)$

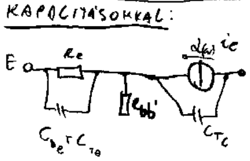
$A_U = -g_m R_C = -\frac{\beta}{1+\beta} \frac{1}{r_e} R_C$

$= -\beta \frac{R_C}{(1+\beta)\frac{U_T}{I_E}}$

VAGY INKÁBB A KÖRNYEZŐ ELEMEKKEL:

$A_U = -\beta \cdot \frac{R_C \times R_t}{R_1 \times R_2 \times [(1+\beta)\frac{U_T}{I_E}]}$

KAPACITÁSOKKAL:



$C_{De} + C_{Te}$, C_{Tc}

$C_{De} = \tau_n (1-\eta_{TK}) \frac{I_E}{U_T}$

$C_{Te} = \frac{const}{\sqrt{U_D - U}}$

$C_{Tc} = C_{Tc0} \cdot \frac{U_{Dc}}{U_{Dc} - U_{BC}}$ — DIFFÚZIÓS POTENCIÁL

4PÓLUS - HELYETTESÍTŐ KÉPEK

h-PARAMÉTERES

$U_1 = h_{11} i_1 + h_{12} U_2$
$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} U_2$

- $h_{11} = \frac{U_1}{i_1}$ ha $U_2 = 0$ — BEMENETI IMPEDANCIA RÖVIDZÁRT KIMENETNÉL (~1kΩ)
- $h_{12} = \frac{U_1}{U_2}$ ha $i_1 = 0$ — FESZ. VISSZAHATÁS SZAKADT BEMENETNÉL $(\sim 10^{-4})$
- $h_{21} = \frac{i_2}{i_1}$ ha $U_2 = 0$ — ÁRAMERŐSÍTÉS RÖVIDZÁRT KIMENETNÉL (~100)
- $h_{22} = \frac{i_2}{U_2}$ ha $i_1 = 0$ — KIMENETI VEZETÉS SZAKADT BEMENETNÉL (~10nS)

Ezek KB és KE kapcsolásban más értékűek!

KB: $h_{21} = \alpha$

KE: $h_{21} = \beta$

EZEK MEGÁLLAPÍTÁSA:

$h_{11e} \approx \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$ - Ebből a karakterisztikából adott munkapontban

$h_{11e} \approx (1+\beta)\frac{U_T}{I_E}$

$h_{22} \approx \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}}$ EZEN A TARTOMÁNYON

Y-PARAMÉTERES

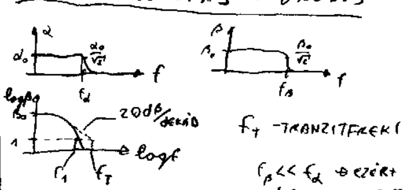
Nagyobb frekvenciákon ezt érdemes használni: szakadást itt nem egyszerű létrehozni (mint C)

$i_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2$
$i_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2$

IT CSAK RÖVIDZÁR KELL

Ezek jobbak (nem mind egyes: $\frac{a}{a}$)

NAGYFREKVENCIÁS MŰKÖDÉS



f_T - TRANZITFREKV.

$f_\beta << f_\alpha$ ⇒ EZÉRT KB JOBB NAGYFREKVENCIÁS

KÖZEPES FREKIN β-T MÉRJÜK, INNEN f_T meghatározható.

HATÁRFREKVENCIÁK SZÁMÍTÁSA

$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j\frac{f}{f_\alpha}} \qquad \beta = \frac{\beta_0}{1 + j\frac{f}{f_\beta}}$

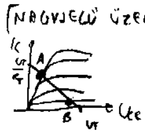
$f_\beta = \frac{f_\alpha}{\beta_0 + 1}$

f_{max} - MAXIMÁLIS OSZCILLÁCIÓS FREKVENCIA

$f_{max} = \sqrt{\frac{f_\alpha}{8\pi r_{bb'} C_{bb'}}}$

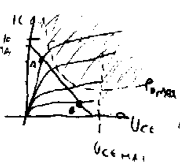
KAPCSOLÓÜZEM

(NAGYJELŰ ÜZEM)



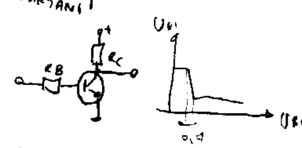
B - PONT: TELÍTÉS
A - LEZÁRÁS

- TELJESÍTMÉNYEK:



CÉL: AZ A ÉS B PONTOK A SATÍROZOTT RÉSZEN KÍVÜL LEGYENEK, ÍGY $P < P_{Dmax}$

A MUNKAEGYENES KICSIT BELELÓGHAT, VISZONT EKKOR GYORSAN KÖZÉSSZEK JÓ CSAK KAPCSOLNI. PERSZE A HATÁRFELTÉTELEKET BE KELL TARTANI!



- MAX KAPCSOLHATÓ P:

$P < U_{CE\,max} \cdot I_{C\,max}$

OPTIMÁLIS R_C: $R_t = \frac{U_{CE\,max}}{I_{C\,max}}$

NYITOTT ÁLLAPOTBAN VAN U_{CE} MARADÉKFESZ: 0,2V

- HOGY JÓL KIMENJEN A TÁPBA:

n - TÚLVEZÉRLÉSI TÉNYEZŐ

$n = \frac{I_{B\,használt}}{I_{B\,min}} = 2..5$

- TRANZIENS

$\hat{I}_B = \frac{U_{BE} - U_{BE0}}{R_B}$

- MÁS: TÖLTÉSEGYENLETEK

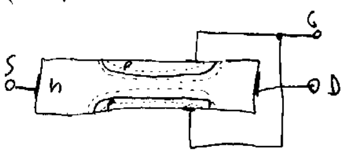
$I_B = \frac{Q_B}{t} + \frac{Q_B}{\tau_n}$

$I_C = \frac{Q_B}{\tau_{Cn}}$ ← kollektor időállandó

TÉRVEZÉRELT TRANZISZTOROK

JFET (ZÁRÓRÉTEGES FET)

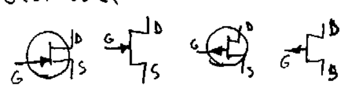
- adott 1 félvezető ellenállás, amit 2 oldalról kiürített réteg határol. Ennek a szélességét E-tér vezérli (U_{GS}) a kiürített réteg olyan elfoglalhatja a teljes vezető keresztmetszetét is (csatorna). Ez a kü réteg szélesség határozza meg a vezető keresztmetszetét, így annak a VEZETÉSÉT.
A teljes elzáródás 2-4V-nál.
(U_0, U_p)



- bemenő ellenállása ≈ 100MΩ
- a többségi töltéshordozóké a fő szerep.
- n-típusú: n csatornás
-

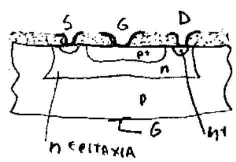
$U_G < U_S$ mert $I_G \ll I_S$

- JELÖLÉSEK



n-típusú (csat) p-típusú

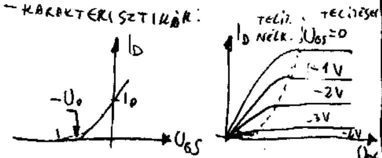
- KIVITELEZÉS:



n epitaxia

a csatorna az n epitaxiális réteg

- KARAKTERISZTIKÁK:



TRANSZFER KIMENETI

- U_0 ELZÁRÓDÁSI FESZ:
d-CSATORNA VASTAGSÁG
S-KIÜRÍTETT RÉTEG szélessége
($d=2S$)

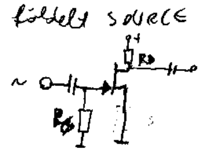
$$U_0 = \frac{q N_D d^2}{8\varepsilon}$$

- KARAKTERISZTIKA EGYENLET
csatorna HOSSZ L (LONG)
szélessége W (WIDE)

$$I_D = I_0\left(3\frac{U_{GS}}{U_0} + 2\sqrt{\frac{-U_{GS}}{U_0}}^{\,3} + 1\right)$$

- KISJELŰ VISELKEDÉS
(megfelelés: G → B, S → E, D → C)

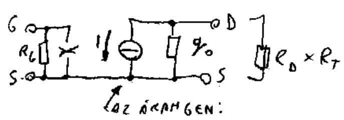
földelt source erősítő:



$U_{GS} = 0 \to I_D \neq 0$

a bemenő jel kicsit változtatja U_{GS}-t → I_D nagyobb változik.

- helyettesítő kép (TELÍTÉSES TARTOMÁNYBAN)



$R_D \times R_T$

AZ ÁRAMGEN.:

$$I = g_m U_{GS}$$

ahol:

- $g_m = \dfrac{dI_D}{dU_{GS}}$ (U_{DS} = áll.)
(KIMENETI MEREDEKSÉG)
- g_0 - csatornarövidülés miatti vezetés. (emiatt nem teljesen vízszintes a kimeneti kar.)

$g_0 = \dfrac{dI_D}{dU_{DS}}$ (U_{GS} = áll) $g_0 \approx 0$
(KIMENETI VEZETÉS)

tehát

$$U_{K1} = -U_{GS}\, g_m \left(\underbrace{R_t \times \frac{1}{g_0}}_{1} \times \underbrace{R_D}_{2}\right)$$

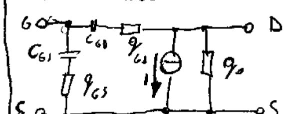
így:

$$\boxed{A_U = -g_m\left(R_t \times \frac{1}{g_0} \times R_D\right)}$$

MUNKAPONTFÜGGÉS:

$$g_m = \underbrace{G_0}_{\text{CSATORNAVEZETÉS}}\left(1 - \sqrt{\frac{-U_{GS}}{U_0}}\right)$$

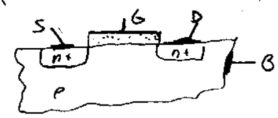
- NAGYFREKVENCIÁN: SZ KAPACITÁSOKKAL:



MOSFETEK

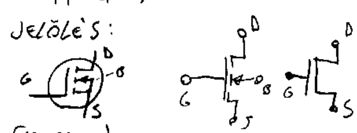
1 NÖVEKMÉNYES (ENHANCEMENT)

(P-CSATORNA - N-VEZETÉSES)

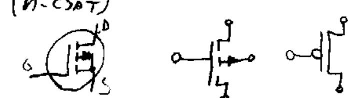


Ha az $U_{GB} = 0$ nem vezet a.
Ha a G-potenciálja a B-hez képest nő (+ ohm) akkor a GATE alá kezdenek gyűlni az elektronok, amik amúgy nagyon kevesen vannak, mert kisebbségi töltéshordozók. De itt olyan sokan lesznek, hogy rajtuk keresztül (VEZETŐ CSATORNA) áram tud folyni a D, S között. EZ AZ INVERZIÓ. (többségben is lesznek az elektronok)
Minél nagyobb U_{GS}, és így több az elektron a GATE alatt, annál több áram folyhat. Amikor (U_{GS}) éppen el kezd folyni az I_D áram, az a V_T - KÜSZÖBFESZÜLTSÉG (0,4-0,7V)

- JELÖLÉS:



(N-CSAT)



(P-CSAT)

- FIZIKA, INVERZIÓ

félvezető felületének a közelében E-hatására töltések gyűlnek

$$Q = E\varepsilon A$$

- ha a többségi töltéshordozók gyűlnek: AKKUMULÁCIÓ E_1
- ha azok száma csökken: KIÜRÍTÉS $E_2 = -E_1$
- ha még a kisebbségi töltéshordozókat adja is hozzá: INVERZIÓ $|E_3| > |E_2|$

FELÜLETI POTENCIÁL:
U_F - anyag belseje és a felülete között.
INVERZIÓ: p-típusú anyag úgy viselkedik, mintha n-típusú volna

ERŐS INVERZIÓS HATÁR:
ahol épp megfordul a töltéshordozósűrűség-arány

$$U_F = 2 \cdot \Phi_F = 2 \cdot U_T \ln \frac{N_a}{n_i}$$

(P-típusú anyagban)
EZ A KÜSZÖBFESZÜLTSÉG.

- a GATE töltés ezekkel tart egyensúlyt:
  kiürített réteg töltése
  felületi állapot töltés (?!)
  inverziós töltés

Q_G? lehet beállítani
Ezt C_o-val (OXIDKAPACITÁS)

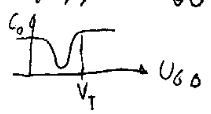
$$Q_G = C_o U_{ox} = \varepsilon_o \frac{A}{d_{ox}} \cdot U_{GB}$$

...

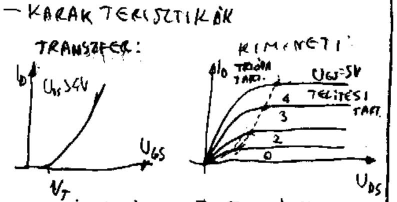
$$Q_{inv} = -C_o(U_{GS} - V_T)$$

- V_T
  ha van BULK előfeszültség ($U_{SB} \neq 0$) akkor V_T más lesz.
  a függés mértéke: BULK állandó

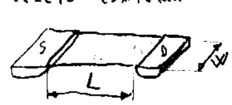
→ C-V GÖRBE
C_o függése U_{GB}-től



— KARAKTERISZTIKÁK



2 MŰKÖDÉSI TARTOMÁNY:
A TRIÓDA, ÉS A TELÍTÉSES
—A VEZETŐ CSATORNA:



I_D erektől a minctetetől (IS) függ $I_D = Q_i W v$
Q_i – felületegységre jutó tö.
v – DRIFT sebesség $v = \mu E$

— DRAIN ÁRAM
TRIÓDA TARTOMÁNYBAN:

$$I_D = \frac{W}{L} k \left[(U_{GS}-V_T)^2 - (U_{GD}-V_T)^2\right]$$

TELÍTÉSI T.-BAN:

$$I_D = \frac{W}{L} k (U_{GS} - V_T)^2$$

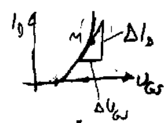
telítési tartományban $U_{GS} > V_T$ tehát ilyenkor NYIT.
k – átlagos állandó:

$$k = \frac{\mu C_o}{2}$$

n-vezetéseknél nagyobb áram lehet ugyanakkora paraméterek mellett!

— EGRÉS
- ahhoz hogy rendes vezérlésnél a szánalt áramot folyassuk, megfelelő U_{DS}-is kell (tehát A TELÍTÉSI TARTOMÁNYBAN kell maradni: (TERHELŐ NYIT → I_D-NŐ, U_{DS} csökken, de ne nagyon!)
  ERŐSÍTŐNÉL
- KAPCSOLÓ ÜZEMBEN:
  a 2 tartomány között váltogatunk ügyesen.

— MUNKAPONT, MEREDEKSÉG:
TRANSZFER KAR:



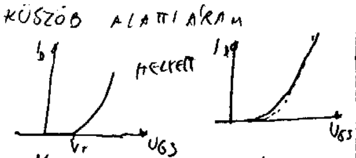
$$S = \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}}$$ – MEREDEKSÉG

$$r_{DS} = \frac{\Delta U_{DS}}{\Delta I_D} \quad U_{GS}\text{:áll}$$

KIMENETI (DIFF) ELLENÁLLÁS (kimeneti görbéből)

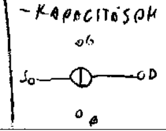
MÁSODLAGOS HATÁSOK:
— CSATORNARÖVIDÜLÉS:
nem vízszintes a kimeneti kar a TELÍTÉSES tartományban
Mert:
Ha U_{DS}-nő, akkor a a DRAIN körül nő a kiürített réteg, rövidebb lesz a csatorna.

—KÜSZÖB ALATTI ÁRAM



Mert V_T-t az erős inverziótól számoltuk, kezdig $V_T/2$-től van már kis áram.

—KAPACITÁSOK

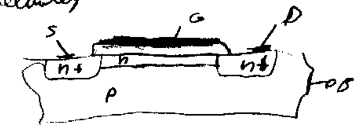


DE: Minden elektróda-pár között van 1 kondi.

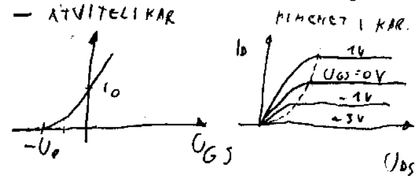
— HŐMÉRSÉKLETFÜGGÉS:
V_T, μ (MOZGÉKONYSÁG) függ a hőmérs.-től.
TRANSZFER KAR:

$T_2 > T_1$

② KIÜRÍTÉSES MOS (DEPLETION)
$I_D = 0$-nál is folyik áram (N-TÍP, N-VEZ)
— elvileg



az n csatorna a szintén n rétegek között vezeti az áramot. (TÖBBSÉGI TÖLTÉSHORDOZÓK AZ TOL n: elektr.)
A G-re a S-től ⊖abb feszt adunk, akkor az eltaszítja onnan az elektronokat, és így ami eddig vezetett (többségi t.h.) az most nem vezet. Ahol ez bekövetkezik, az az ELZÁRÓDÁSI FESZÜLTSÉG
— ezt a működést inkább erős implantációjú, NÖVEKMÉNYES szerkezetű kialakítással érik el, így NEGATÍV lesz a KÜSZÖBFESZ.
— ÁTVITELI KAR / KIMENETI KAR.



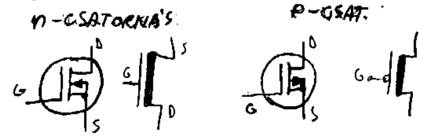
— EGYENLETEK:
TELÍTÉSI TART. (2000 oldal)

$$I_D = k\frac{W}{L}\left[2(U_{GS}-V_T)U_{DS} - U_{DS}^2\right]$$

TRIÓDA TART.:

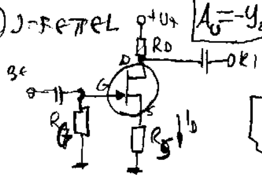
$$I_D = k\frac{W}{L}(U_{GS}-V_T)^2$$

—JELÖLÉSEK:
n-CSATORNÁS / P-CSAT.



MUNKAPONT BEÁLLÍTÁSOK

① J-FET-tel $A_U = -y_{21}(R_D \times R_t)$

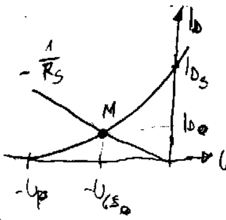


$r_{be} = R_G$

$r_{ki} = \frac{1}{y_{22}} \times R_D$

Mivel $U_G = 0$ ezért

$$U_{GS} = -I_D R_S \Rightarrow I_D = -\frac{U_{GS}}{R_S}$$



(záró típusú karakterisztika)

- Paraméterek megválasztása:
  - $R_G = 1 \dots 100 M\Omega$ legyen
  - I_{D0}-ra nagyjából mindenkorra -ugyanazt adunk.
  - ez és a karakterisztika alapján a U_{GS_0}-t meghatározzuk, majd értékből $\boxed{R_S = -\frac{U_{GS_0}}{I_{D_0}}}$
  - $R_D = ?$ $\boxed{\frac{U_t}{2} = I_{D_0} \cdot R_D}$ legyen!

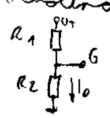
hogy inkább:

$$\frac{U_T - I_D R_S}{2} = I_{D_0} R_D \text{ legyen}$$

- Az U_{GS_0} számítása:

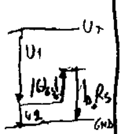
$$U_{GS_0} = U_p \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{I_{D_0}}{I_{D_S}}}\right)$$

- Ha R_G helyett feszültségosztót alkalmazunk!



$$R_1 = \frac{U_T - U_{GS_0} - I_0 R_S}{I_0}$$

$$R_2 = \frac{U_{GS_0} + I_{D_0} R_S}{I_0}$$

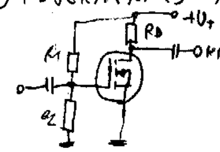


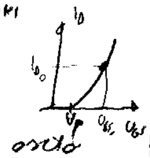
U_{GS_0} - NEGATÍV! mert

így mérjük és ilyen irányú

- Nagyjából ugyanez a kiürítéses MOSFET-re is.

② Növekményes MOSFET-tel





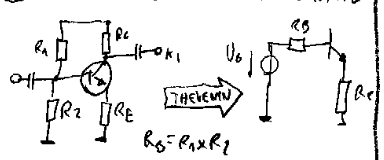
U_{GS_0}-t az $R_1 R_2$ osztó adja.

$$I_{D_0} = I_{DS} \cdot \left(1 - \frac{U_{GS_0}}{U_p}\right)^2 \quad \text{(nyitó típ. kar.)}$$

Ebből R_D megválasztható.

$U_p = V_T$

③ Bipoláris tranzisztorral



THEVENIN

$R_B = R_1 \times R_2$

Ennek a munkapontjának (I_E) a függése a
- tápfesztől:

$$\frac{\Delta I_E}{I_E} = \frac{U_B}{U_B - U_{BE_0}} \cdot \frac{\Delta U_t}{U_t}$$

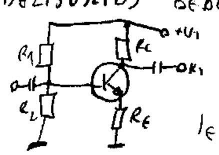
- a hőmérséklettől:

$$\frac{\partial U_{BE_0}}{\partial T} = -2 mV/°C \qquad \frac{1}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial T} = 0{,}01/°C$$

...

leggyakrabban stabil a bázisosztós beállítás. Használható a (bázis) áramgenerátoros, legrosszabb a fesz. generátorral stabilizált bázis, amikor az emitter a földön van.

Bázisosztós beállítás:



$U_B = U_T \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

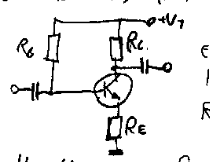
$U_E = U_B - U_{BE_0}$

I_E-t választjuk

$$R_E = \frac{U_E}{I_E} \qquad R_C = \frac{U_T - I_E R_E}{2 \cdot I_E}$$

$$\left(U_C = \frac{U_T - I_E R_E}{2}\right) \quad \text{cél: } U_E \approx \frac{U_T}{4}$$

Bázisáramos (áramgen) beállítás:



cél: $U_E \approx \frac{U_T}{4}$

ekkor: I_E - választjuk.

$R_E = \frac{U_E}{I_E}$

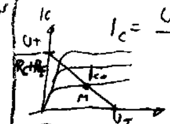
$$U_B = U_{BE_0} + U_E \qquad R_B = \frac{U_T - U_B}{I_E}(1+\beta)$$

vagy munkaponti adatok számítása:

$$U_T - R_B I_B - U_{BE_0} - I_E R_E = 0$$

$$U_T - R_B \frac{I_E}{1+\beta} - U_{BE_0} - I_E R_E = 0$$

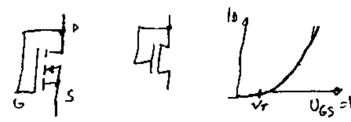
biztos:



$$I_C = \frac{U_T - U_C}{R_C} \Rightarrow U_B = U_T - I_B R_B = U_T - \frac{I_C}{\beta} R_B$$

④ MOS-dióda (növekm.)

draint összekötjük a gate-tel



általában ellenállásként használjuk

$I = \frac{W}{L} K (U - V_T)^2$ ha $U > V_T$

$I = 0$ ha $U < V_T$

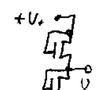
$$U = V_T + \sqrt{\frac{I_D \cdot L}{K \cdot W}}$$

Pl:

olyan $U = U_t$

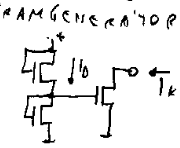
$$U_T = V_T + \sqrt{\frac{I_D}{K} \frac{L}{W}} \Rightarrow I_D$$

ennek nem sok értelme van, de:



itt már igen: $U = \frac{U_t}{2}$ ha $\frac{W_1}{L_1} = \frac{W_2}{L_2}$

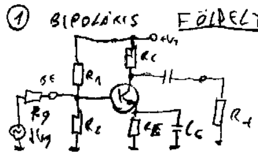
Áramgenerátor:



$I_{ki} = I_D$

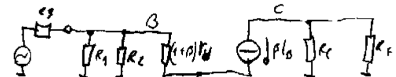
ALAPKAPCSOLÁSOK

① Bipoláris földelt emitteres



$$A_U \approx \frac{R_C \times R_t}{R_B \times r_d}$$

Kisjelű helyettesítőkép



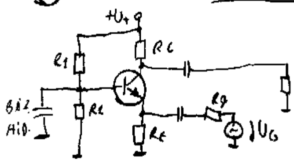
$R_{be} = R_1 \times R_2 \times (1+\beta) r_d$ (25kΩ)

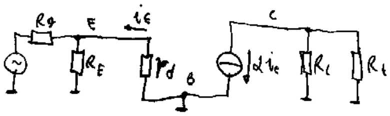
$R_{ki} = R_C \times \frac{1}{h_{22}}$ $\frac{1}{h_{22}} \approx \infty$

$$\boxed{A_U = -\beta \cdot \frac{R_C \times R_t \times 1/h_{22}}{(1+\beta) \cdot r_d}} \qquad r_d = \frac{U_T}{I_E}$$

ide be levet: $\times R_1 \times R_2$

② BIPOLÁRIS FÖLDELT BÁZISÚ





$R_{BE} = R_E \times r_d$ (KICSI) (30Ω)

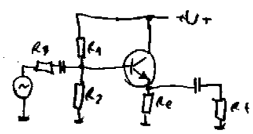
$R_{KI} = R_C \times \frac{1}{h_{22}}$ (NAGY) (5kΩ)

$A_U = \beta \cdot \frac{R_C \times R_t}{(1+\beta) r_d}$ (NEM FORDÍT FÁZIST)

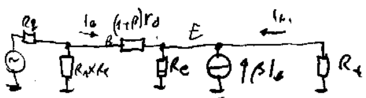
$A_i = \frac{-R_C \times R_t}{R_t} \approx 1 \qquad A_p \approx A_U$

③ BIP. FÖLDELT KOLLEKTOROS

(EMITTERKÖVETŐ)



$R_B = R_1 \times R_2$



$R_{BE} = \left[(1+\beta)(R_E \times R_t + r_d)\right] \times R_B$ (3MΩ)

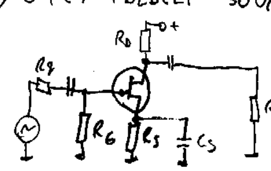
$R_{KI} = R_E \times \left(r_d + \frac{R_1 \times R_2 \times R_g}{(1+\beta)}\right)$ (500Ω)

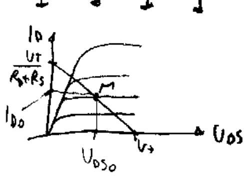
$\approx r_e \quad (R_B/\beta \ll r_d \ll R_E)$

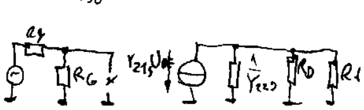
$A_U \approx 1$

$A_i = -\beta \frac{R_E \times R_t}{R_t} \approx 50$

④ J-FET FÖLDELT SOURCE







$R_{BE} = R_G$

$R_{KI} = R_D \times \frac{1}{Y_{22S}}$

$A_U = -Y_{21S} \left(R_D \times R_t \times \frac{1}{Y_{22S}}\right)$

ha R_t kicsi

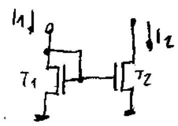
$A_U = -Y_{21}(R_D \times R_t)$

$A_i = -A_U \cdot \frac{R_G}{R_t}$

$\boxed{A_p = |A_U| \cdot |A_i|}$

EGYEBEK

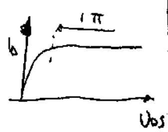
ÁRAMTÜKÖR



ÁRAMOT MÁSOL
$I_1 = I_2$ HA A 2 TRANZISZTOR AZONOS.

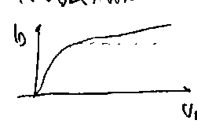
Egyébként:

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{W/L_1}{W/L_2}$



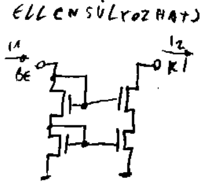
$U_{DG_{T2}} > 0$ legyen!

– PROBLÉMÁK:



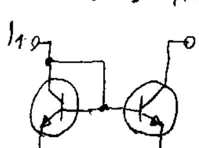
VÉGES KIMENETI VEZETÉS

EZT A KASZKÁD KAPCSOLÁSSAL ELLENSÚLYOZHATJUK



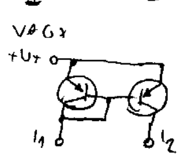
– FELHASZNÁLÁS: POTIS ÁRAM SZABÁLYOZÓS

– BIPOLÁRIS TRANZISZTOROS

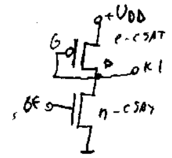


MÁSOLÁST RONTJA: $\beta \ll \infty$

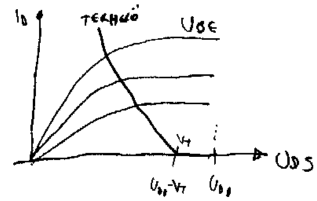
VAGY



C-MOS ERŐSÍTŐ



A p-CSAT TRANZISZTOR (FET) 1 AKTÍV MUNKAELLENÁLLÁS (TERHELŐ RE.)



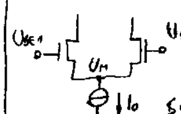
$I_N = \frac{W}{L} k (U_{GE} - V_T)^2$

$I_P = \frac{W}{L} k \left(U_{DD} - U_{KI} - |V_T|\right)^2$

$U_{KI} = U_{DD} - |V_{Tp}| - \sqrt{\frac{k\frac{W}{L}|_n}{k\frac{W}{L}|_p}} (U_{BE} - V_{Tn})$

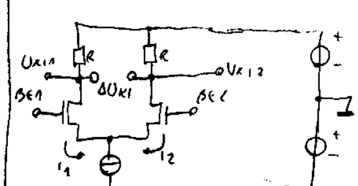
$A_U = -\sqrt{\frac{k\frac{W}{L}|_n}{k\frac{W}{L}|_p}}$

MOS – DIFFERENCIÁL ERŐSÍTŐ



CSAK A BEMENETI JELEK KÜLÖNBSÉGÉT ÉRZÉKELI

BONYOLULTABBAN:



- MŰKÖDÉSE
- U_{BE1} CSÖKK U_{BE2} = ÁLL.

akkor:

I_1 csökk → I_2 NŐ

↓ ↓

U_{KI1} NŐ $\quad U_{KI2}$ CSÖKK

- U_{BE1} NŐ $\quad U_{BE2}$ NŐ

↓ ↓

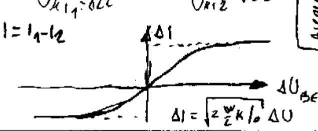
I_{T1} = áll $\quad I_{T2}$ = áll

↓ ↓

U_{KI1} = áll $\quad U_{KI2}$ = áll

BIPOLÁRIS NÁL: $\Delta I = I_0 \, th \frac{\Delta U}{U_T}$

$-\Delta I = I_1 - I_2$



$\Delta I = \sqrt{2\frac{W}{L}k I_0}\,\Delta U$

MIKROELEKTRONIKA

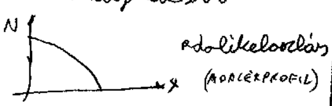
- TECHNOLÓGIAI LÉPÉSEK:

• LITOGRÁFIA
Maszkokkal, vagy
PATTERN GENERÁTOR (DARABOKBAN)

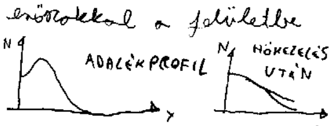
• OXIDÁLÁS
a oxidot növesztik
kicsi E_r
d oxidréteghez 0,4 d Si-réteg kell elfogyasztani
Folyamata:
1200 °C-on a szeleteket (kemencében) O_2 vagy H_2O és O_2 vezetésével
vastagság ~ $\sqrt{t}$

• EPITAXIA (RÉTEG)
Egykristályos Si réteg növesztése a felületre
Először sósavgőzzel tisztítják a felületet
MAJD KEMENCÉBEN GÁZT áramoltatnak keresztül
n-típ. Si réteg

• DIFFÚZIÓ
KEMENCÉBEN adalékatomok bediffundáltatása a cél a félvezető felületbe
AZ adalékatom beépül a kristályrácsba



• IONIMPLANTÁCIÓ
adalékatomok bejuttatása erőterekkel a felületbe



MOS-FETEKNÉL V_T beállítás pontosabban szabályozható az adalékkoncentráció
Az adalékot IONIZÁLJÁK, gyorsítják, és belövik a felületbe

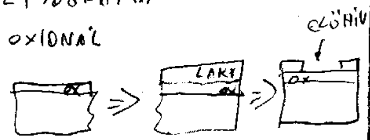
• VÁKUMPÁROLOGTATÁS
fémréteget gőzölnek fel
VÁKUMBAN elgőzölögtetnek 1 fémdarabot.
végig szeletekre meg a rárakódik.

• KATÓDPORLASZTÁS
ARGON gázban 2 elektróda között gázkisülés jön létre ekkor gyors AR ionok keletkeznek, amik a katódból (ide a porlasztandó anyagot) fém atomokat lök ki. ezek a anódra szóródnak, annak a felületére rakódik (az anódon vannak a szeletek)

- LATERÁLIS INHOMOGENITÁS
oldalirányú adalék-eloszlás egyenetlenség

DIFFÚZIÓ   IONIPLANT

- LITOGRÁFIA
• OXIDNÁL



HF LÚGGAL MARÁS:

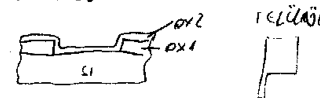
A DIFFÚZIÓNÁL, ÉS AZ ION IMPLATÁCIÓNÁL a maszkolás a OXIDDAL történhet (nem a lakkal) Ezért a oxidra kell előbb ABLAK.
Ha EGRE ÚJABB OXIDOT tesznek akkor OXIDLÉPCSŐ jön létre. Ezek minden lépésnél nyúlnak.
NEM KERÜLHETNEK EGYMÁSRA!

A MASZK néhány nm-rel a szelet felett van

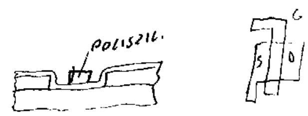
- IC ALKATRÉSZEK (FET, VEZETÉK)

① MOS-IC-K:

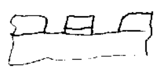
• TRANZISZTOR (6 MASZK)
POLISZILÍCIUM - GATE ÖNILLESZTŐ TECHNIKA.
1) AKTÍVZÓNA ABLAK + VÉKONYOXID



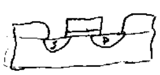
2) POLISZILÍCIUM + MINTÁZAT



3) AKTÍV ZÓNA KINYITÁS + DIFFÚZIÓ
KINYITÁS: KIS MARATÁS



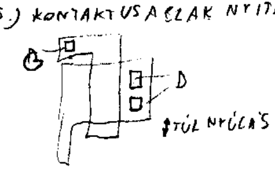
ÍGY NINCS ILLESZTÉS PROBLÉMA: A GATE CSAK PICIT NYÚL AZ S,D



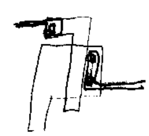
FELÉ, ÍGY KICSI A SZÓRT KAPACITÁS, ÉS NEM IS KELL OLYAN MÉRET, HELYZET PONTOSSÁGGAL DOLGOZNI).

4) VÉDŐRÉTEG FEL (PSG - FOSZFOR SZILIKÁT ÜVEG)

5.) KONTAKTUSABLAK NYITÁS



6) FÉMEZÉS



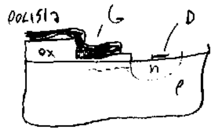
VALAMIÉRT A SOURCE NINCS KIVEZETVE

HOGY A VEZETÉK ALATT NE jöjjön létre csatorna: ezért a vezeték alatt erősen adalékolják
P-TÍP hordozóra (N-CSATORN. MOSFET P-HORDOZÓN VAN) P++

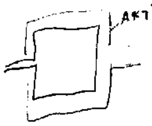
• ELLENÁLLÁS: (NÖVEKMÉNYES MOSFET)
a GATE ÉS A DRAIN között fémezéssel van kivezetve.

● MOS KONDENZÁTOR

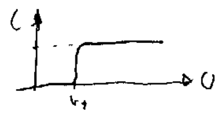
MAX 30pF



Ez egyik fegyverzet a GFIE, a másik az inverziós réteg felülről:



Előfeszítés kell neki:



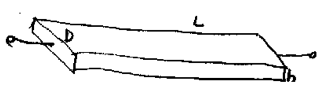
● INDUKTIVITÁS

NEM SZOKTAK. ESETLEG:

● VEZETÉKEK

- fém (ALU/ARANY)
- FÉM-SZILICIUM (DIFFÚZ)
- POLISZILICIUM

□ - négyzetes ellenállás



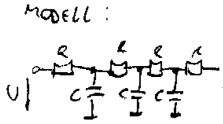
$R = \varrho \frac{L}{Dh} = \frac{\varrho}{h} \cdot \frac{L}{D} = R_\square n$

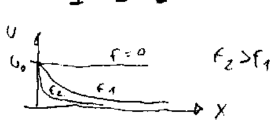
TECHNOLÓGIA $R_\square$; n - AZ □-EK SZÁMA

r - egységnyi hosszra eső ellenáll.

c - -||- ...

MODELL:





$f_2 > f_1$

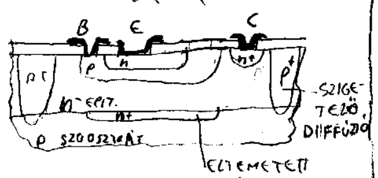
késleltetés:

$\tau = 3{,}5\, rcx^2$

② BIPOLÁRIS IC-K

Itt lehet minden legyen BJT (npn)

● TRANZISZTOR (6 MASZK)

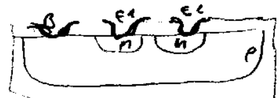


n-rétegben van a kollektor. Ezt elszigeteli a többi alkatrésztől az, hogy 1 EPITAXIÁBAN van, ami ellentétes szennyezésű, mint a szubsztrát.

Van még + elszigetelés.

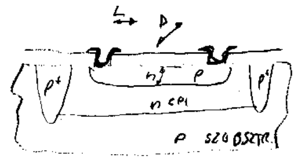
ELTEMETETT RÉTEG: szennyezem azért, hogy ne legyen nagy a kiürített réteg. (ami még vezetőcsík is)

LEHET TÖBB EMITTER IS!



● ELLENÁLLÁS

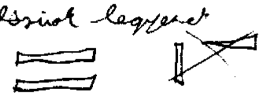
BÁZISDIFFÚZIÓVAL



NAGY ÉRTÉKET:

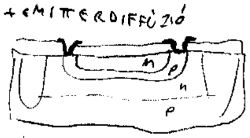
NAGY A TŰRÉSE, DE AZ 1 IC-N lévők eltérése azonos (kicsi)

az azonos kiszolgáláshoz kell még, hogy azonos állásúak legyenek



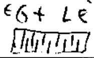
R-NÖVELÉS:

MEGNYOMOTT ELLENÁLLÁS + EMITTERDIFFÚZIÓ



VAGY:

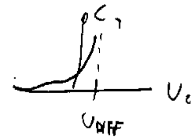
FÉMRÉTEG + LÉZERES BEÁLLÍTÁS



● KONDENZÁTOR

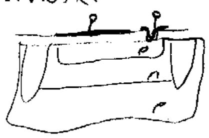
ZÁRÓ PN átmenet,

C_T - tértöltés kapacitás



szerint a kis feszültségtartományban használjuk

VÉKONYRÉTEG KAPACITÁS:

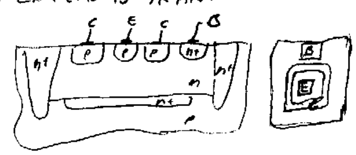


MAX 500pF

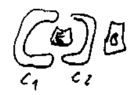
● TRANZISZTOR KIALAKÍTÁSOK

a) EDDIG: PLANÁR

b) LATERÁLIS TRANZÓ

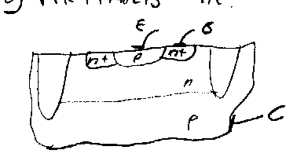


SZEKTORTRANZÓ:



Ez jó pl ÁRAMTÜKÖRNEK

c) VERTIKÁLIS TR.

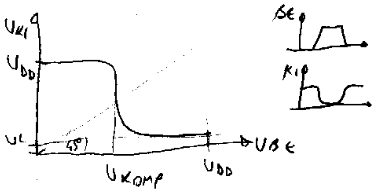


KOMPLEMENTER TRANZISZTORPÁRHOZ HASZNÁLJÁK (KÖZÖS KOLLEKTOR)

LOGIKAI ALAPÁRAMKÖRÖK

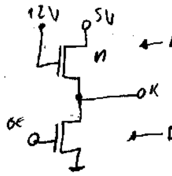
INVERTER

TRANSZFER KARAKTERISZTIKA:



TÍPUSOK:

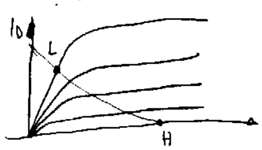
- TRIÓDA ÜZEMŰ (ARÁNYTÍPUSÚ)



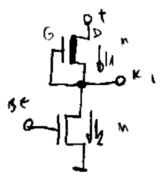
← LOAD TR $\frac{W}{L}$ KICSI

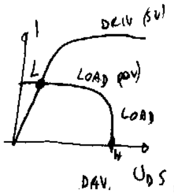
← DRIVER TR $\frac{W}{L}$ NAGY

$$N=\frac{W/L|_D}{W/L|_L}\approx 20$$



- KIÜRÍTÉSES TERHELÉSŰ (ARÁNYT.)





$I_1 = I_2$ L-ÁLLAPOTBAN:

I_1 a karakterisztikából (KÚR)

$I_1 = K\frac{W}{L}(V_T)^2$ $V_T\approx 0{,}8V$ (NEM ELZÁRÓD)

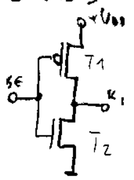
$$I_2 = K\frac{W}{L}\left[(U_{BE}-V_T)^2-(U_{GD}-V_T)^2\right]=I_1$$

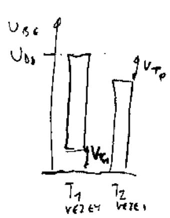
BEHELYETTESÍTENI

U_{GD}-t kifejezzük, kiszám.

$U_{KI}=U_{BE}-U_{GD}$

- C-MOS

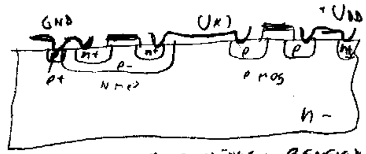




1 részen mind a 2 vezet: RÖVIDZÁR

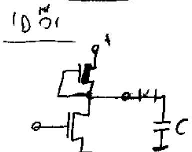
De ha elég kicsi a különbség: kicsit több, mint $2V_T$ és gyorsan kapcsolunk: JÓ LESZ.

MEGVALÓSÍTÁS:



a 2 GATE ÖSSZEKÖTVE: BEMENET

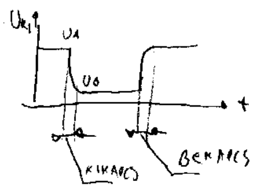
MOS INVERTER KAPCSOLÁSI IDŐI



KÜLSŐ ELEMEK HATÁSA

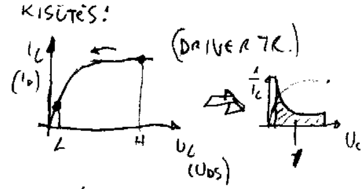
$$t=C\int_{U_A}^{U_B}\frac{1}{I_C(U_{KI})}\,dU_{KI}$$

a kikapcsolás a lassú.



KISÜTÉS:

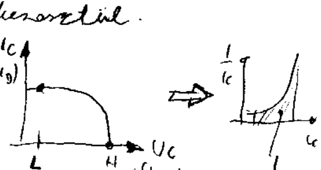
(DRIVER TR.)



a területet integrál-közelítéssel.

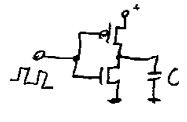
TÖLTÉS

LOAD tranzisztoron keresztül.



$t = I\cdot C$

CMOS FOGYASZTÁSA



$Q_C = C\,U_{DD}$

$(\Delta U = U_{DD})$

~~$W=\frac{1}{2}CU^2$~~

$W = Q\cdot U = C\,U\,U$

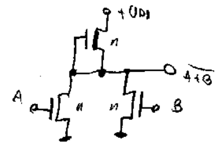
$P=\frac{W}{t}=\frac{W}{T}=W\cdot f$

~~Mivel 1 periódus alatt 2 töltéscsere~~

$W = C\,U_{DD}^2$ $\boxed{P=CU^2f}$

ha U_{DD}-t csökkentjük, akkor P is csökken

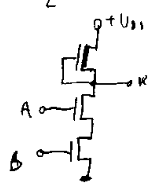
MOS-NOR KAPU



tetszőleges számú bemenet. (kiürítéses terhelésű) méretezés $\left(\frac{W}{L}\right)$ mint az invertereknél.

NAND

a driver TR-oknál a $\frac{W}{L}$ arányt meg kell DUPLÁZNI



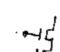
$\frac{W}{L}$ a DRIVERNÉL nem növelhető a végtelenségig, a LOADNÁL nem érdemes mert lassú lesz.

KOMPLEX KAPUK

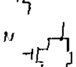
1 LOAD tranzisztor, és megfelelő DRIVER hálózat

A HÁLÓZAT (DRIVER)

Ami: & : SOROS



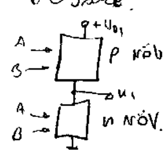
+: PÁRHUZAMOSAN



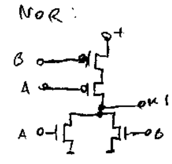
A KIMENET INVERTÁLT!

C-MOS KAPUK

a ~~[illegible]~~ SPECOS kapuk $\frac{W}{L}$-je kétszer nagyobb, mint az elsőké.

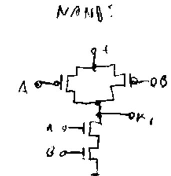


NOR:



CSAK AKKOR 1, HA A,B = 0

NAND:

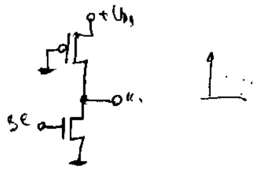


CSAK AKKOR 0 HA A,B = 1

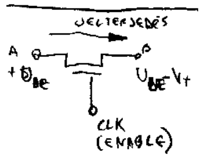
anyi tranzisztor, mint a komplementerben 2X-e. (n MOSNÁL N+1)

PSZEUDO n-MOS

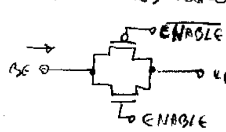
⊗ LOAD tranzisztor GATE-je a földön van. a felépítés olyan mint az n-MOSNÁL.



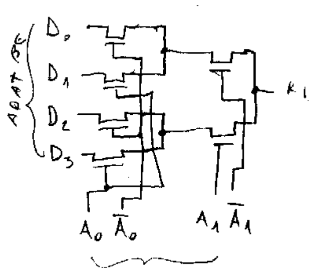
TRANSZFER-GATE



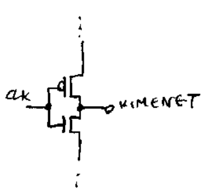
V_T-vesztés nincs, ha:



MULTIPLEXER TRANSZFER GATE-TEL

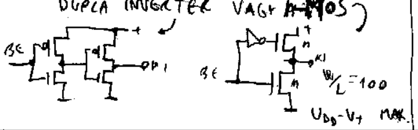


ÓRAJEL VEZÉRELT KAPU

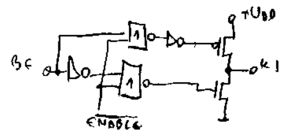


VONALMEGHAJTÓ

DUPLA INVERTER VAGY ~~n~~-MOS)

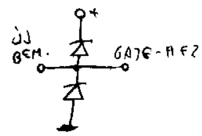


3STATE-MEGHAJTÓ



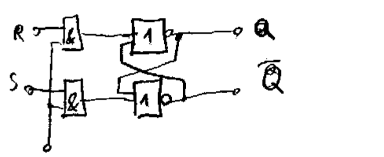
van 1 nagyimpedanciás állapot is

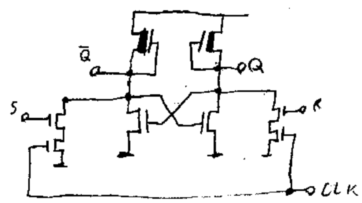
STATIKUS FELTÖLTŐDÉS ELLENI VÉDELEM (MOS)



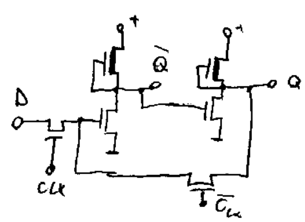
TÁROLÓK

ÓRAJEL VEZÉRELT RS (BISTABIL MV.)

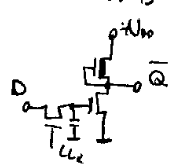




TRANSZFER GATE D-FF



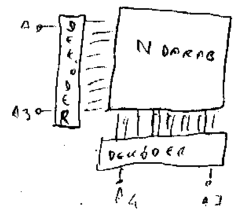
DINAMIKUS D



rövid ideig tárol-ja az INFÓT.

MEMÓRIÁK

- ROM - READ ONLY MEMO
  RAM - RANDOM ACCESS (tetszőleges hozzáf.)
- STATIKUS/DINAMIKUS
  DINAMIKUS: kondenzátor
  STAT: BISTABIL (F-F)
- DESTRUKTÍV/NEM: TÖRLŐDIK-E OLVASÁS.
- SZERVEZÉS:

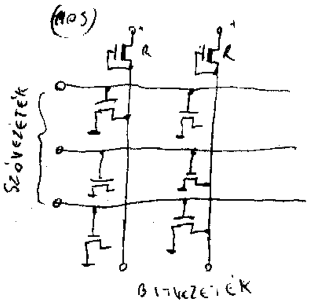


vezetékek:

A - CÍM
D - ADAT
CE - CHIP ENABLE (DEKÓDOT ~~...~~Z PÓTCIMBIT HA TÖBB MEMÓRIA VAN)
RAS - ROW ADRESS SELECT
CAS - COLOUMN A. SELECT
R/W - READ/WRITE

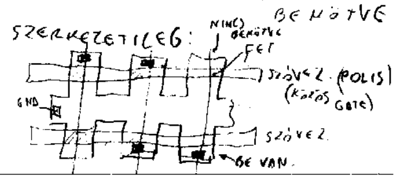
① ROMOK

MASZKPROGRAMOZOTT: (MOS)



Vannak a SZAVAK (szóvezeték választja ki) és a bitek azon belül. Szóvezetékkel kiválasztjuk a szót, és akkor a hozzá tartozó bitek határozzák meg a kimenetet (BITVEZETÉ)
1 BIT 1/0: BE VAN/NINCS BE KÖTVE

SZERKEZETILEG:



- COMPONENT ARRAY:
kész FET-ek ~~[illegible]~~ vannak, csak ott kell megvalósítani a végleges áramköri fázisban, hogy... MÁT... A HUZALOZÁS.

- GATE ARRAY:
egyszerű csak att LOGIKAI alapáramkörök.

- STANDARD CELL ASIC
cellák vannak, ezek funkciókat látnak el. Ezek összekötése az utolsó fázisban a megvalósítható.

- PLD
kész kialakított IC-k. programmal állítható be benne a LOGIKAI elemek összeköttetései.
PROG: 1 szer, többször, végtelen, vagy RESETKOR mindig konfigurálás

IC - TESZTELÉS

mérőautomata véletlenszerűen kerül az IC-kre. (TŰKONTAKTUSOKKAL)
- szeleten
- tokozva

ÁRTÍZSZERE ZŐDÉSI TÖRVÉNY:
IC $\xrightarrow{10x}$ PANEL $\xrightarrow{10x}$ BERENDEZÉS $\xrightarrow{10x}$ FELH.
(idő, szállítás, csere költség)

BONYOLULT IC-knél teljes teszt lehetetlen
DIGITÁLISNÁL megfelelő tesztvektorokat kell kitalálni (kevesebb, mint az összes lehetséges)
a tesztvektorok sorozata: TESZTSZEKVENCIA
HIBÁK:
- hogy OUT kimaradt
- rövidzár } hosszabb
- szakadás } nevezik

teszt
- hiba feltételezés
- kezdeti bemenet, amire a kimenetből látszik, hogy jó-e.

PROGRAMOK generálják a tesztvektorokat
(EZ KOMBINÁCIÓSRA)

SORRENDI:
sok idő kellene a felderítéshez
tesztelhetőségre kell tervezni!

- SCAN-DESIGN:
a tárolóknak 2 üzemmódjuk van:
a) NORMÁL
b) TESZT: ilyenkor sorba kapcsolódnak shift-regiszterként
olyan ha nem jut át a jel akkor ERROR
ehhez kell IN, OUT az összeköttetés-átkapcs. 1 KH.-val

- BEÉPÍTETT ÖNTESZT
az IC-ben van a teszt automata.

akár a szeleten a CHIPEK közt

- BOUNDARY SCAN
szabványos teszt áramkör amit az IC-be építenek

- MEMÓRIATESZT:
a cellákkal a szomszédsági viszonyokat is figyelembe kell venni.
pl: írás, visszaolvasás,
pl 101010...
vagy SAKKTÁBLA MINTA.

FÉLVEZETŐK TERMIKUS

HŐELLENÁLLÁS:

$T_1 \; R_{TH} \; T_2$, P

$$R_{TH} = \frac{T_1 - T_2}{P}$$

$$R_{Th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{A} \qquad R_e = R_1 + R_2$$

λ - fajlagos hővezetés

MEGADJÁK: $R_{THJA} + R_{THCA} = R_{THJC}$

TADJUK ERRE A BRDA NÉLKÜLI HŰTÉSRE: CHIP —□— LEVEGŐ

FÉLVEZETŐK HŰTÉSE

2 HŐELLENÁLLÁS: MEGAD

$R_{TH,JA}$ - SZIL. - TOK (R_{THJC})

R_{THCA} - TOK - KÖRNYEZET (BORDA)

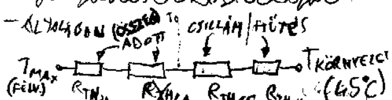
- ugyanazon HŐ LÖKÉSNÉL a HŐKAPACITÁS IS

BELESZÓL:

vagy $R_e = R_{THJA} + R_{THCA}$
vagy $R_e = R_{THJA} + R_{THAH}$ $(+R_{THCS})$

Hőelosztás mérséklés: folyadékkristállyal

- ALJZATBAN (ÖSSZEG) ADOTT | TO | CSILLÁM | HŰTÉS



$R_{THe} = \frac{\Delta T}{P_{TOT}} = R_{TH}$ $\quad \left(R_{THCS} \approx 0{,}5 \frac{°C}{W}\right)$

- HŰTŐFELÜLET

$R_{THAH} = \frac{1}{\alpha \cdot F}$ — FELÜLET (cm^2)

α - HŐÁTADÁSI TÉNYEZŐ 0,5..3 mW/cm^2

$1/\alpha \simeq 500 \frac{cm^2 °C}{W}$

FELÜLET: $\approx 500 \cdot P$

$$F = \frac{1}{\alpha \cdot R_{THAH}} = \frac{500}{R_{THAH}}$$ SIMA ALULEMEZ.

FIZIKAI ÁLLANDÓK

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{Vm}{As}\right]$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm}\right]$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am}\right]$$

$$k_2 = 2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am}\right]$$

BOLTZMANN ÁLLANDÓ

$k \neq k_1 \neq k_2$

$$k = 1{,}3806 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K}\right]$$

MÉRETEZÉS:

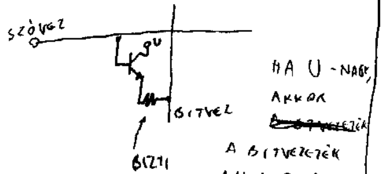
$\Delta T, P \rightarrow R_{TH} \rightarrow R_{THAH} \rightarrow F$ (R_{THCS})

HA FEKETE: $F \rightarrow 0{,}7F$

ALU + CSILLÁM: $16{,}6 \frac{cm^2}{W}$ | ALU: $10 \frac{cm^2}{W}$

PROM

kiégethető BIZTOSÍTÉKKAL.

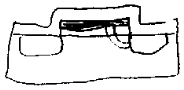


HA U-NAGY, AKKOR A BITVEZETÉK AHOL 0 AZ

égetés közben, ott kiég és olvasáskor 0-t ad.
olvasáskor U-nál kisebb

EPROM

a GATE egy lebegő elektróda. UV-vel semlegesíthető a töltése. íráskor a DRAIN-ből töltések juthatnak fel oda. n×10 évig megmarad



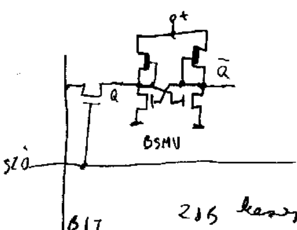
EEPROM

????

② RAM

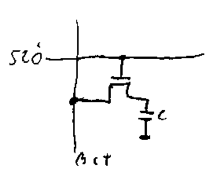
STATIKUS:

(1 CELLA)



2db keresztcsatolású inverter a BISTABIL MULTIVIBRÁTOR
lehet CMOS, NMOS.

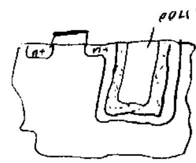
DINAMIKUS
(1 Cella)



itt kevés alkatrész kell csak

mivel ott rövid ideig jó.
A BITVEZ. nagy Tar OLVASÓ erősítő van.

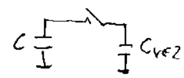
Kialakítás:



árok-KONDENZÁTOR
≈0,04pF

így kis helyen elfér nagyobb kapacitás.

A bitvezetéknek kapacitása van
így az olvasás:

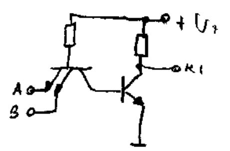


BIPOLÁRIS LOGIKA

(TTL) (1963 tól SN74...!!)

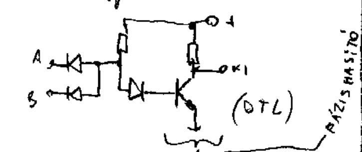
gyors, és kicsi a fogyasztás.

NAND KAPU:



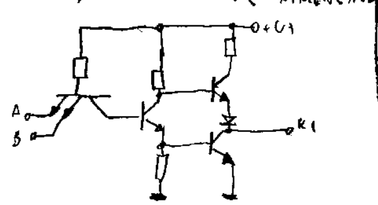
(TTL)

Ez megfelel ennek:



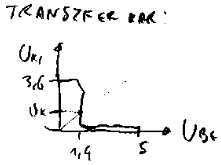
(DTL)

vagy TOTEM-POLE-KIMENETTEL

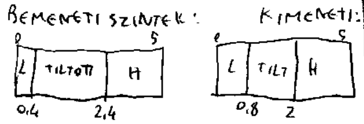


áramnyelő és áramforrásos üzemmód van (állapot L/H)

TRANSZFER KAR.:



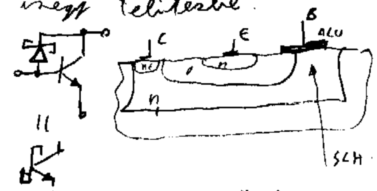
BEMENETI SZINTEK: KIMENETI:



SCHOTTKY TTL

a BIPOLÁRIS tranzisztorok bázistöltés miatti (C_{DIFF}) lassulását kiküszöbölik SCHOTTKY DIÓDÁVAL.
(fém-félvezető átmenet)
PN átmenet ahol a P(+) réteget fémmel helyettesítik NYITÓFESZ.

EGY ilyen SCHOTTKY diódát a BIPOLÁRIS tranzisztor C-B közé kötünk, így az nem megy telítésbe.



A kapcsolásokban a tranzisztorokat ilyenekkel helyettesítjük

ÁRAMKÖR REALIZÁLÁS

① SZOFTVERREL
PROCIVAL
- µP
- MCU

kicsi, csak programozni kell.

② HARDVERREL
- kisz bolti IC-kkel gyártó tervezi.
Erekkel áramkört tervezni, NYÁK-ot
- BERENDEZÉS-ORIENTÁLT IC-k (ASIC)
  - SEMI-CUSTOM
    COMPONENT ARRAY,
    STANDARD CELLA
    GATE ARRAY
    PROGRAMOZHATÓ
    (PLD, PLA FPGA, PAL GAL)
  - FULL CUSTOM
    felhasználó tervez IC-t, gyártó legyártja vagy a gyártó tervezi

BIPOLÁRIS TRANZISZTOR ($U_T = 26\,mV$)

– Ebers-Moll modell:

$$i_C = A \cdot I_S \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1\right) + I_{S0} \left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1\right)$$

$$i_E = e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 + A_i I_{SC0} \left(e^{\frac{U_{BC}}{U_T}} - 1\right)$$

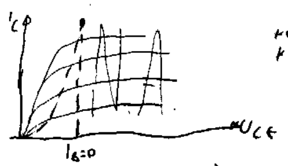
– Működési tartományok:

Norm. aktív: $i_E = I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$

$i_C = A I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$

$A = \frac{B}{1+B}$ $\qquad B = \frac{A}{1-A}$

FB. stat. áramer. $\qquad$ F.E: stat. áram. E.

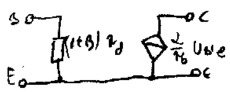


U_H (Uszaturációs)

kisjelű FE áramerősítési tényező: $\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$

– Kisjelű helyettesítőkép

fizikai:

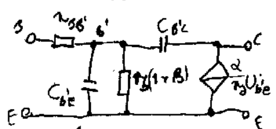


$I_E = \frac{U_T}{r_d}$ $\qquad i_e = \frac{U_{be}}{r_d}$

van soros bázis ellenállás $r_{BB'}$

~~belsőségben ld.~~

– Frekvenciafüggés:



diff. kapacitás

$C_{dE} = \frac{1}{2\pi f_\alpha r_d}$

3 dB-es határfrekvencia: f_β

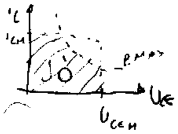
f_T – tranzitfrekvencia $\beta(f_T) = 1$

továbbá:

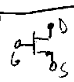
$g_{B'E} = \frac{\alpha}{\beta r_d}$ $\qquad g_{CE} = ?$

μ → Early hatás

– Határadatok:



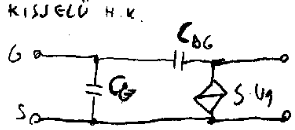
JFET



$$I_d = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2$$

S-meredekség: $S = \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}$

– Kisjelű h.k.



$R_d = \frac{1}{S}$

MOS-FET

– Elzáródásmentes tartomány: $S = \frac{\partial i_D}{\partial U_{GS}}$

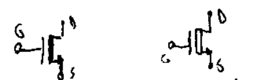
$(U_{GD} > U_P)$ $\quad i_D = 2 I_{DSS}\left(\frac{U_{DS}(U_{GS} - U_P)}{U_P^2} - \frac{U_{DS}^2}{2U_P^2}\right)$

– Elzáródásos:

$U_{GS} < U_P$

$$i_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS}}{U_P}\right)^2$$

– Jel:



– Bipoláris tranzisztor, kisjelű vezérlése

$U_g = \cos\omega t$

$i_E = I_S e^{\frac{U_{BE0} + U_g}{U_T}}$

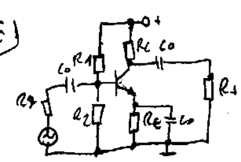
$= I_{E0} \cdot e^{\frac{U_g}{U_T}}$

$I_{E(t)} = I_{E0} + i_e$

munkapont $\quad$ kisjelű

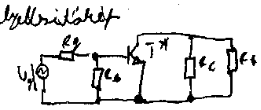
Alapkapcsolás / fokozat (bipol)

FE



$R_B = R_1 \times R_2$

helyettesítőkép



T^*:

• Alapkapcsolás

$A_U = -\frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t) = -\beta \cdot \frac{R_C \times R_t}{(1+\beta) r_d}$

$A_i = \beta$ $\qquad A_{Ug} = \frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t) \cdot \frac{R_{be}}{R_{be} + R_g}$

$R_{be} = (1+\beta) r_d$ $\qquad R_{ki} \approx \infty$

• Fokozat (mérés indexű)

$A_U' = A_U$ $\qquad A_i' = \beta \cdot \frac{R_B}{R_B + (1+\beta) r_d} \cdot \frac{R_C}{R_C + R_t}$

$R_{be}' = [(1+\beta) r_d] \times R_B$ $\qquad R_{ki}' \cong R_C$

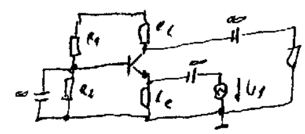
G – teljesítményerősítés

$G = |A_U| \cdot |A_i| = \frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t)\,\beta$

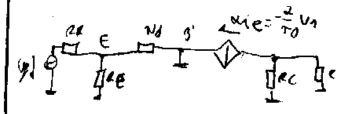
$G' = G \cdot \frac{R_A \times R_2}{R_A \times R_2 + (1+\beta) r_d} \cdot \frac{R_C}{R_C + R_t}$

$\frac{\alpha}{r_d} = \beta \cdot \frac{1}{(1+\beta) r_d}$

FB



kisjelű h.k.



$U_1 = ie\, r_d$

• Alapkapcsolás

$A_U = \frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t)$ $\qquad A_i = -\alpha$

$R_{be} = r_d$ $\qquad R_{ki} = \infty$

$A_{Ug} = \frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t)\frac{R_{be}'}{R_{be}' + R_g}$ $\qquad R_g$-nál nagyon kicsi (?) erősítés

$G = \frac{\alpha^2}{r_d}(R_C \times R_t)$

• Fokozat

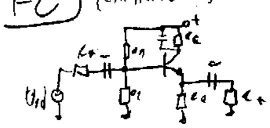
$A_U' = A_U$ $\qquad A_i' = -\alpha \cdot \frac{R_E}{R_E + r_d} \cdot \frac{R_C}{R_C + R_t}$

$R_{be}' = r_d \times R_E$ $\qquad R_{ki}' = R_C$

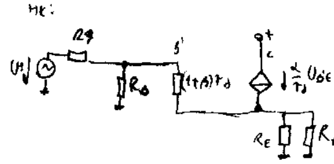
$G' = A_U' |A_i'|$

FC

(emitterkövető)



hk:



• Alapkapcs

$A_U = \frac{R_E \times R_t}{R_E \times R_t + r_d} \approx 1$ $\qquad A_i = -(1+\beta)$

$R_{be} = (1+\beta)(R_E \times R_t + r_d)$ $\qquad A_{Ug} = A_U \frac{R_{be}}{R_{be} + R_g}$

• Fokozat:

$A_U' = A_U$ $\qquad A_i' = -(1+\beta)\frac{R_B}{R_B + R_{be}} \cdot \frac{R_E}{R_E + R_t}$

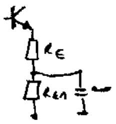
$R_{be}' = R_{be} \times R_B$

$G = \frac{R_E \times R_t}{R_E \times R_t + r_d}(1+\beta)$

☺	A_U	R_{be}	R_{ki}
FE	$-\frac{1}{r_d}(R_C\times R_t)$	$(1+\beta)r_d$	∞
FB	$\frac{1}{r_d}(R_C\times R_t)$	r_d	∞
FC	$\frac{R_E\times R_t}{r_d+R_E\times R_t}$	$(1+\beta)(r_d+R_E\times R_t)$	$r_d+\frac{R_g\times R_B}{1+\beta}$

– MÓDOSÍTÁSOK HATÁSA:

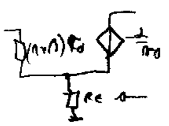
• SOROS R_E FE fokozatnál



$A_U=-\frac{1}{r_d+R_E}(R_C\times R_t)$

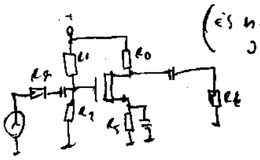
$R_{be}=(1+\beta)(r_d+R_E)$

helyettesítő képben:



FET)

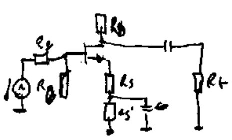
• F. SOURCE, NÖV. MOS-FET (n) (és n csat. J-FET)



$A_U=-S(R_D\times R_t)$ $A_i\approx\infty$

$R_{BE}\approx R_{ki}\approx\infty$ $R_{be}'=R_G$ $R_{ki}'=R_D$

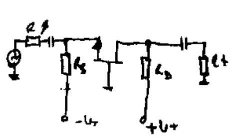
• FS p-CSAT. J-FET (soros R_S)



$A_U=\frac{S(R_D\times R_t)}{SR_S+1}$

$R_{be}=R_{ki}=\infty$ $R_{be}'=R_G$ $R_{ki}'=R_D$

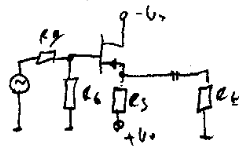
• FG. n csat. J-FET (2-telep)



$A_U=S(R_D\times R_t)$ $R_{BE}=\frac{1}{S}$

$R_{ki}'=\frac{1}{S}\times R_S$

• FD (p-csat. J-FET) (sourcekövető)



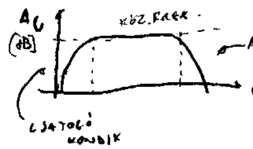
$A_U=1$

$R_{ki}=\frac{1}{S}$

$R_{ki}'=\frac{1}{S}\times R_S$

$R_{be}'=R_G+R_g$

FREKVENCIAFÜGGÉS: $A_U=\frac{U_{ki}}{U_{be}}$ $A_{Ug}=\frac{U_{ki}}{U_g}$

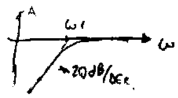


– KISFREKVENCIÁN:

(leválasztó)

$\omega_p=\frac{1}{C_{cs}(R_{be}'+R_g)}$

$$W(j\omega)_{be}=\underbrace{\frac{s/\omega_p}{1+s/\omega_p}}_{\text{frekifüggés}}$$



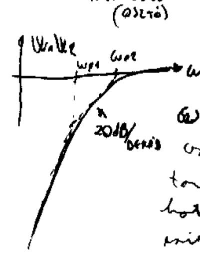
A bemeneten is és a kimeneten is van csatolókondi.

KIMENETEN:

$\omega_{p2}=\frac{1}{C_{cs2}(R_C+R_t)}$

SOROS RC-kezelésnél

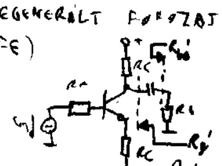
$$A_{Ug}=\underbrace{\frac{R_{be}'}{R_{be}'+R_g}}_{\text{bem. csill. (osztó)}}\cdot\underbrace{\frac{1}{r_d}(R_C\times R_t)}_{A_U}\cdot\underbrace{W_1\cdot W_2}_{\text{bem. kim. } C_{cs}\ C_{cs}}$$



ω_{p1} és ω_{p2} között csak ω_{p2}-ig tartott kondi hatását, ω_{p1} előtt mindkettőt figyelembe vesszük.

– DEGENERÁLT FOKOZAT NINCS BÁZIS FESZ. SZÁLL.

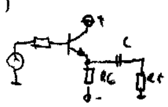
(FE)



$f_a=f_{3dB}=\frac{1}{2\pi(R_C+R_t)C_{cs}}$

$R_{be}'=R_t$ $R_g'=R_E$

(FC)



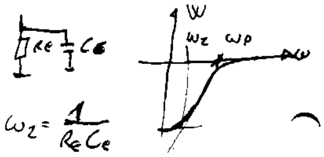
$f_a=\frac{1}{2\pi(R_t+R_g')C_{cs}}$

$R_{be}'=R_t$

$R_{ki}=r_d+\frac{R_g}{1+\beta}$ $R_g'=R_k'=R_{ki}\times R_E$

$R_{ki}=r_d+\frac{R_g}{1+\beta}$

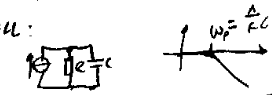
Az emitterkondenzátor hatása:



$\omega_Z=\frac{1}{R_EC_E}$

+ NAGYFREKIN

modell:



$\omega_p=\frac{1}{RC}$

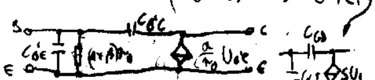
PÁRHUZAMOS RC-t kell keresni

BIPOL FE:

a C_T kapacitás (PN átm. a TR-ben) miatt $\omega_p=\frac{1}{(R_C\times R_t)C_t}$

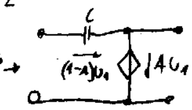
BIPOL

J-FET



– MILLER HATÁS (belső kapac.)

EZ



$Y_S=sC(1-A)$

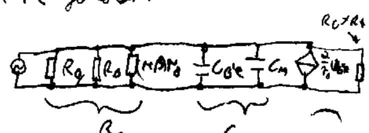
a bemenet szempontjából ugyanaz:

$C_M=(1-A)C$

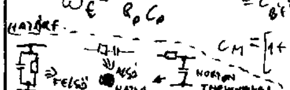
Miller kapacitás

$C_M=(1+|A|)C$

A FE fokozat:



$\omega_f=\frac{1}{R_pC_p}$ $=C_{b'e}+C_M$



$C_M=\left[1+\frac{1}{r_d}(R_C\times R_t)\right]C_{b'c}$

2 FOKOZATÚ ERŐSÍTŐK

– kisjelű helyettesítőképet egymás után kell kötni a fokozatokat.

– C_M-eket kell számolni.

$A_U=-\frac{1}{r_d}(R_C\times R_t)$ (BIPOL, F.E.) ← következő fokozat R_{be}

$A_U=-S(R_D\times R_t)$ (J-FET F.S)

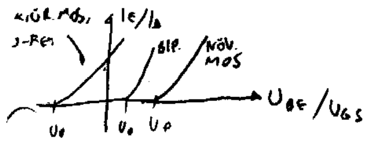
R_g – előző fokozat kim. ellenállása, vagy generátor belső ell.

R_t – következő fokozat R_{be}, vagy terhelő ellenállás

– CSATOLÁSONKÉNT lesz $f_p=\frac{1}{R_pC_p2\pi}$ soros RC-k közül az alsó, párhuzamosakból a felső HATÁRFREKIN!

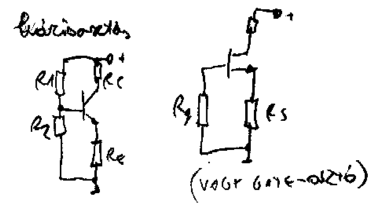
f(3dB) a zárlati f_p

2) MUNKAPONTBEÁLLÍTÁS



Egytelepes típusok

bázisosztás



(VAGY GATE-OSZTÓ)

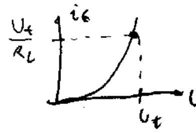
Méretezés: $U_E \to U_C \to I_C \to I_E \to R_E, I_B$

R_E adott → $R_C \to I_C \to I_E \to R_E, I_B$

$R_{be} \to R_1, R_2 \leftarrow U_B \leftarrow U_{B0} = U_E + \frac{I_E}{I_B}$, $U_B = 0{,}7 + U_E$ ← I_B

— GRAFIKUSAN

$U_b < U_C$ legyen

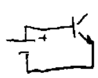


$I_{E_0} = \frac{U_E}{R_E + \underbrace{R_B(1-A)}_{kicsi}}$ $I_{C_0} = A\, I_{E_0}$

— HŐMÉRSÉKLETFÜGGÉS: (FE. BÁZ.)

$\frac{dI_E}{dT} = \frac{-\partial U_{BE}/\partial T}{R_E + (1-A)R_B}$ ← $\approx 2mV/K$

FESZGENERÁTOROS:



$\frac{\partial I_E}{\partial T} = \frac{\partial U_{BE}}{\partial U_T}\cdot\frac{I_{E0}}{U_T}$

BÁZISÁRAMOS:

MAX 1%/K

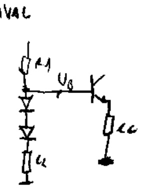
$\frac{dI_E}{dT} = \frac{dB}{B\,dT}\, I_{E0}$

EMITTERÁRAMOSAN:

I_{E0} = áll.

— MUNKAPONT STABILIZÁLÁSA:

DIÓDÁVAL

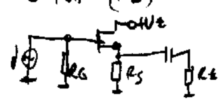


$\frac{dI_E}{dT} = \frac{\partial U_B}{\partial T} - \frac{\partial U_{BE}}{\partial T}$

— FET-EK: (NÖV. MMOS)

$I_{D_0} = I_{DSS}\left(1 - \frac{U_{GS0}}{U_P}\right)^2$

J-FET (FB)



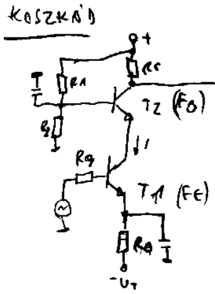
$S = \frac{2 I_{DSS}}{|U_P|}\sqrt{\frac{I_{D0}}{I_{DSS}}}$

$U_{GS0} = U_P\left(1 - \sqrt{\frac{I_{D0}}{I_{DSS}}}\right)$ $U_{GS0} = -I_{D0} R_S$

$\frac{\partial I_{D0}}{\partial I_T} = \frac{U_G' - U_{GS0}'}{1/S + R_S}$

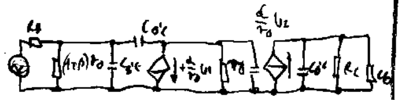
TÖBBTRANZISZTOR:

KASZKÁD



$I \approx \frac{|-U_t| - U_{BE0}}{R_E + \frac{R_g}{1+\beta}}$

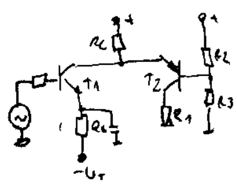
kisjelű:



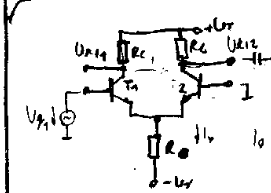
$f_s = \frac{1}{2\pi C_{b'c}(R_C \times R_t)}$

$A_0 = -\frac{\alpha}{r_d}(R_C \times R_t)$ mint a FE-nél

KOMPLEMENTER-KASZKÁD



DIFFERENCIÁL-ERŐSÍTŐ:



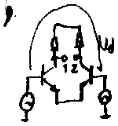
$I_0 = \frac{(-U_t) - U_{BE0}}{\beta_2 - 1}$

$I_{E01} = I_{E02} = \frac{I_0}{2}$ ha nem: ÖSSZESZIMM.

$r_d = \frac{U_T}{I_0/2}$ $A_{U_D} = \frac{\alpha R_C}{r_{d1} + r_{d2}} = \frac{I_0}{2U_T} R_C$ $\boxed{A_{U_D} = \alpha R_C S}$

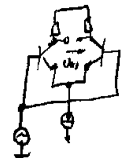
— DIFFERENCIÁL MÓD:

$U_{g1} = -U_{g2}$ $U_d = 2U_g$



$A_{U_d} = \frac{U_{ki}}{U_d} = \frac{I_0}{4U_T}(R_{C1} + R_{C2})\alpha$

— KÖZÖS MÓDUSÚ VEZÉRLÉS



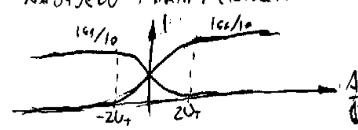
KMET = közös módusú elnyomási tényező

$KMET = \frac{A_d}{A_{KM}} = \frac{R_{kimg}}{r_d}$

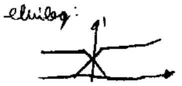
A_d - DIF. MÓD. ER. A_{KM} - KM. JEL ERŐSÍTÉSE.

ha KMET → 0 ⇒ KIRÁLY

— NAGYJELŰ KARAKTERISZTIKAPÁR



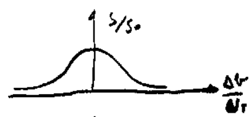
elvileg:



$S = \frac{\partial I_{C1}}{\partial U_d}$

$S = \frac{i_{C1}}{\Delta U} = \frac{1}{r_{d1} + r_{d2}} = \frac{I_0}{4U_T}$

$\Delta U \to \Delta U_{BE}$



$r_{be} = (1+\beta)(r_{d1} + r_{d2})$

HA … R_E $-U_t$

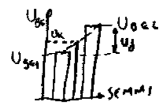
$\boxed{A_{U_{KM}} = -\frac{S R_C}{1 + 2 S R_E}} = -\frac{\alpha R_{C1}}{R_A}\cdot\frac{r_{d1}}{r_{d1}+r_{d2}}$

— SZIMMETRIKUS MŰKÖDÉS: (vezérlés)

$U_d = U_{BE1} - U_{BE2}$ - DIFF MÓDUSÚ, DE SZIMMETR.

$U_K = \frac{U_{BE1} + U_{BE2}}{2}$ - közös módusú

$U_{BE1} = U_K + \frac{U_d}{2}$ $U_{BE2} = U_K - \frac{U_d}{2}$



$S = \frac{1}{r_{d1} + r_{d2}} = \frac{I_0}{4U_T}$

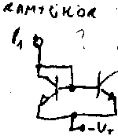
— SZIMMETRIKUS KIMENET:

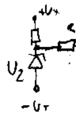
$U_{ki} = U_{ki1} - U_{ki2}$

$A_d = -\alpha \frac{R_{C1} + R_{C2}}{r_{d1} + r_{d2}} = \boxed{-\alpha S (R_{C1} + R_{C2})}$

— AZ ÁRAMGENERÁTOR (ld. …)

a) ÁRAMTÜKÖR





$I_1 = U_Z/R$

b) DISZKRÉT

c) …

— $r_d = \frac{U_T}{I_0/2}$ (szimmetrikus) vagy $r_{d1} = \frac{U_T}{I_{E1}}$ $r_{d2} = \frac{U_T}{I_{E2}}$ (bonyolult)

— R_C helyére $R_C \times R_t$ A_U-ban

— OFFSZET

U_0 2 bemenet közötti fesz, amit rá kell adni, hogy $U_{ki}=0$ legyen

$U_0 = U_{BE1} - U_{BE2}$

$U_{BE1} = U_{T1} \ln \frac{I_{C0}}{A_1 I_{S1}}$ $U_{T1} = \frac{kT_1}{q}$

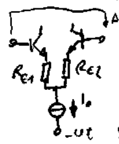
általában $T_1 = T_2$

$U_0 = U_T \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}}$

HŐMÉRSÉKLETFÜGGÉSE: $(10\,nV/K)$

$\frac{dU_0}{dT} = \frac{U_T}{T} \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}}$

— DEGENERÁLT DIFF. FOKOZAT

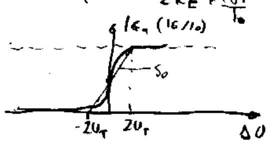


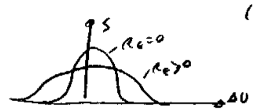
$S = \frac{\partial I_{C1}}{\partial(\Delta U)}$

$S = \frac{1}{2R_E + r_{d1} + r_{d2}}$ NAGYJÁN

Átlag MEREDEKSÉGE

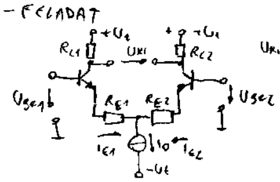
$S_0 - S\left(\frac{\Delta U}{U_T}=0\right) = \frac{1}{2R_E + \frac{4U_T}{I_0}}$ (NAGY R_E: $r_{d1}+r_{d2}$)





$A_U = \frac{\partial U_{ki}}{\partial(\Delta U)} = 2R_C \alpha S_0 = -\frac{R_C \alpha}{R_E + \frac{2U_T}{I_0}}$ $R_C \times R_t$

— FELADAT



$U_{ki} = (U_t - R_{C1} I_{C1}) - (U_t - R_{C2} I_{C2})$

$A_d = -S(R_{C1}+R_{C2})\alpha$

KISJELŰ DIFF. ERŐSÍTÉS

ha $R_{C1}=R_{C2}$ és $R_{E1} \neq R_{E2}$

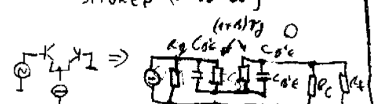
OFFSZET: $I_{C1} = I_{C2}$

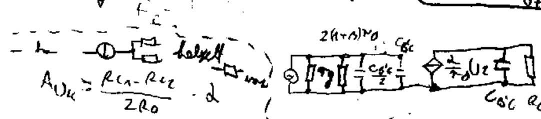
$U_0 = \Delta R_E \cdot I_0/2$

$U_0 = I_{E2} R_{E2} - I_{E1} R_{E1}$

$r_{d1} = \frac{U_T}{I_{E1}}$ $A_{0d} = \alpha S$

— HELYETTESÍTŐKÉP (KISJELŰ)





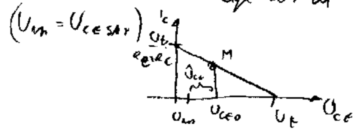
$A_{Uk} = \frac{R_{C1} - R_{C2}}{2R_0} \cdot \alpha$

$U_0 = (R_{C1} - R_{C2}) \cdot I_C = (R_{C1} - R_{C2}) \alpha \frac{I_0}{2}$

— KIVEZÉRELHETŐSÉG

$\hat{U}_{CE} = U_{CE0} - U_m = U_t - I_{C0}(R_E + R_C) - U_m$

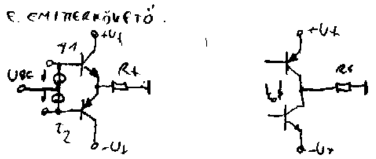
ez a kivezérelhetőségi korlát ($U_m = U_{CE\,SAT}$)



$I_{C\,OPTIM} = \frac{U_t - U_m}{R_C + R_E + R_C \times R_t}$

ELLENÜTEMŰ VÉGFOKOZATOK

E. EMITTERKÖVETŐ



$A_U \approx 1$ $R_{ki} \ll R_t$ $A_U \gg 1$ $R_{ki} \gg R_t$

$U_{ki} = \Delta U_{CE2} = -\Delta U_{CE1}$ $I_{ki} = I_{C2} - I_{C1} = \Delta I_{C1} + \Delta I_{C2}$

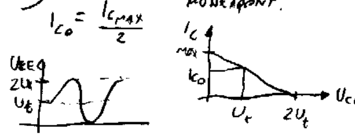
lehet olyan is, hogy $I_{C0} = 0$

ilyenkor egyszerre csak 1 tranzisztor ad áramot. (1 félperiódus)

— A, B, AB osztály

A)

$I_{C0} = \frac{I_{Cmax}}{2}$ MUNKAPONT

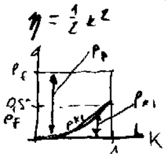


$I_{Cmax} = \frac{U_t}{R_t}$ $P_{ki\,max} = \frac{U_t^2}{2R_t}$

$P_{felvett} = \frac{U_t^2}{R_t}$ P_{disz} legnagyobb, ha $K = 0$

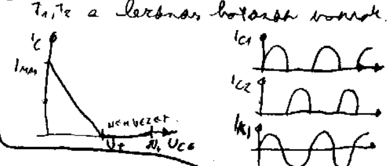
K − kivezérlés (0..1) $P_{disz} = P_f - P_{ki}$

$\eta = \frac{1}{2} K^2$



B) vezérlés nélkül $I_{C0} = 0$

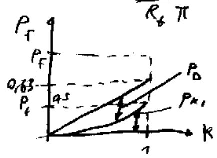
T_1, T_2 a lezárás határán vannak.



amikor $I_{C2} = 0$, de I_{C1} változik, akkor U_{C1}, U_{C2} is változik.

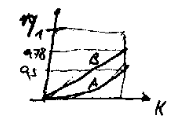
$P_{ki\,max} = \frac{U_t^2}{2R_t}$ $P_{FELV} = \frac{2U_t^2}{R_t \pi} K$

$P_{felv\,max} = \frac{2U_t^2}{R_t \pi}$



P_D maximális, HA $K = 0{,}63$

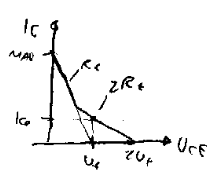
$\eta = \frac{\pi K}{4}$



AB) torzítást csökkentjük, amikor a B-től mindkettő ki van kapcsolva 1 tartományban, pedig nem kell.

$I_{C0} \neq 0$

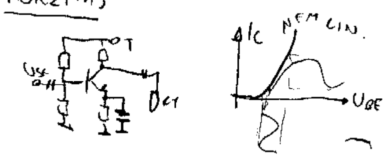
Kis kivezérlésnél A oszt.



$P_{ki} = k^2 \frac{U_t^2}{\frac{U_{t1}}{U_{ki}} R_t}$

$\eta_{MAX} \approx 100\%$

TORZÍTÁS



$I_C = I_S e^{\frac{U_{BE0} + U_{BE}}{U_T}}$

$= I_{C0} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$ e^x TAYLOR SOR

$e^x = 1 + x + x^2 + x^3$

$U_{BE} = U \cos \omega t$ ha $K \ll 1$

$I_C = I_{C0}\left[1 + \frac{U_{BE}}{U_T} \cos \omega t + \frac{1}{2}\left(\frac{U_{BE}}{U_T}\right)^2 \cos^2 \omega t + \dots\right]$

I_{ω} $I_{2\omega}$ $I_{3\omega}$ (2 FELH)

— HARMÓNIKUS TORZÍTÁSI TÉNYEZŐ [k]

$k_2 = \frac{I_C(2\omega)}{I_C(\omega)}$ $k_3 = \frac{I_C(3\omega)}{I_C(\omega)}$

— INTERMODULÁCIÓS TORZÍTÁS: (KERESZTMODULÁCIÓS)

Ha 2 jel van a bemeneten: ω_1, ω_2

$U_{BE} = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$

akkor

$I_C = 1 + \frac{U_1}{U_T} \cos \omega_1 t + \frac{U_2}{U_T} \cos \omega_2 t + \frac{2U_1 U_2}{U_T^2} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$

$\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t$

ÚJ FREKV.

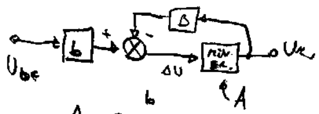
MŰVELETI ERŐSÍTŐ

$A_U \to \infty$ $\quad R_{ki} \to 0$

$A_{UK} \to 0$ $\quad U_0 \to 0$

$R_{be} \to \infty$ $\quad I_0 \to 0$

- külső elemekkel:

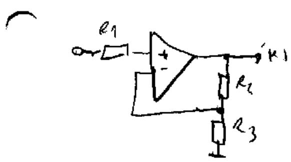


$A_U = \frac{b}{\beta}$

- INVERTÁLÓ ALAPKAPCSOLÁS

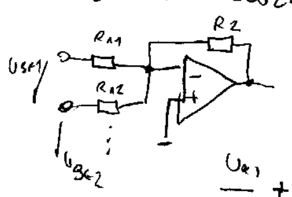
$A_U = -\frac{R_2}{R_1}$

- NEM INVERTÁLÓ AK.



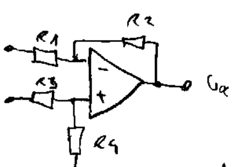
$A_U = 1 + \frac{R_2}{R_3}$

- SÚLYOZOTT ÖSSZEGZŐ



$\frac{U_{ki}}{R_2} + \sum_i \frac{U_{bei}}{R_{1i}} = 0$

- KIVONÓ



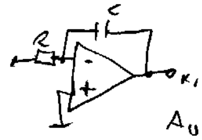
$U_{ki} = A_U U_{be1} + A_U U_{be2}$

$U_{ki} = \frac{R_4}{R_3+R_4} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1} U_{be1}$ $\quad U_{be2}=0$, $U_{be1}=0$

$-\frac{R_2}{R_1} U_{be2}$

$\boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_4}}$

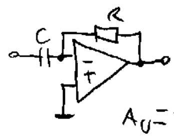
- INTEGRÁTOR



$A_U = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{j\omega}$

$U_{ki}(t_0) = -\frac{1}{RC}\int_0^{t_0} U_{be}(t)\,dt + U_{ki}(t=0)$

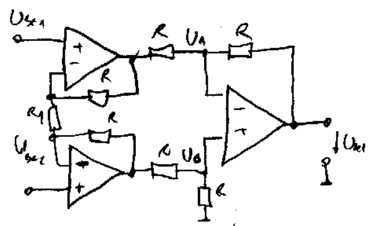
- DIFFERENCIÁTOR



$A_U = -RC \cdot s$

$U_{ki}(t) = -RC \frac{d}{dt} U_{be}(t)$

- MŰSZERERŐSÍTŐ

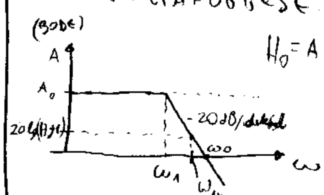


$U_{ki} = U_B - U_A$

$A_U = 1 + \frac{2R}{R_1} = \frac{U_{ki}}{\Delta U_{be}} = \frac{U_K}{U_{be2} - U_{be1}}$

- MŰVELETI ERŐSÍTŐ FREKVENCIAFÜGGÉSE

(BODE)



$H_0 = A\beta$

- 2 TÖRÉSPONTÚ MODELL (ω_1, ω_2)

$A = \frac{1}{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}$ VAGY $A = \frac{A}{1+s/\omega_1}$

$H = H_0 \cdot A$ $\quad A_{U0} = \frac{b}{\beta}$

$h = \frac{H_0}{1+H_0}$ $\quad h = \frac{H}{1+H}$

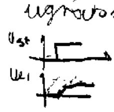
ahol $H = A\beta$ hurokerősítés, h-hibatényező

$A_{U id} = A_{U0} \cdot h = \frac{b}{\beta} h = \frac{b}{\beta} \frac{A\beta}{1+A\beta}$

$\omega_0 \cong \sqrt{\omega_1 \omega_2 H_0}$

- KRITIKUS CSILLAPÍTÁS

ugrásátvitel.

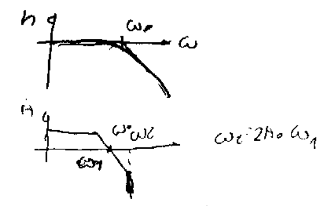


Ha a) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2H_0$ → MAXIMÁLIS LAPOS ÁTVITELI KAR.

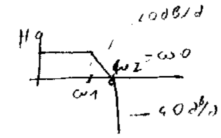
b) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4H_0$ → KRITIKUS CSILLAPÍTÁS

c) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = H_0$ → 45° FÁZISTARTALÉK

a)



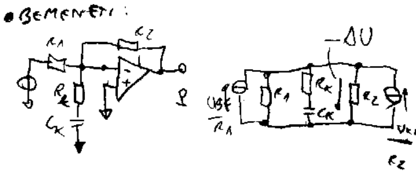
c)



b) ?

- FREKVENCIAFÜGGÉS (NAGYFREKI) KOMPENZÁLÁSA

• BEMENETI:



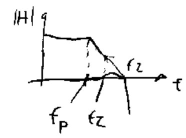
$-\Delta U = 0$

$\beta = \frac{-\Delta U}{U_{ki}}\Big|_{U_{be}=0}$ $\quad A_U = A_{U\infty} \frac{H}{1+H}$

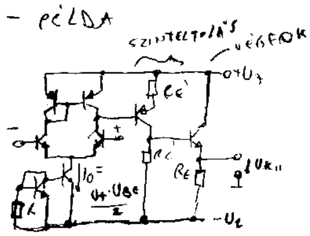
$H = A\beta = A_0\beta_0 \frac{1}{(1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})} \cdot \frac{1+s/\omega_z}{1+s/\omega_p}$

$\omega_p = \frac{1}{(R_1 \times R_2 \times R_e) R_c}$ $\quad \omega_z = \frac{1}{R_k C_k}$

- HUROKERŐSÍTÉS FREKVENCIAFÜGGÉSE



- PÉLDA

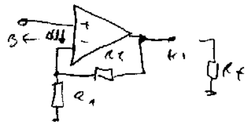


— VISSZACSATOLÁSOK

- SOROS / PÁRHUZAMOS
- FESZÜLTSÉG / ÁRAM

a) SOROS FESZÜLTSÉG VCS)

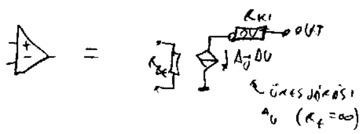
PL. NEMINV. AK.



$\Delta U = \frac{U_{KI}}{A}$ $\quad U_{BE} = \Delta U + U_{KI} \cdot B$

$B = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $\quad R_{BE_{FVCS}} = R_{BE_{IC}} \cdot (1 + AB)$

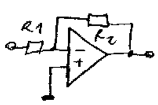
$R_{KI_{VISSZ}} = \frac{U_{KI}}{I_{KI_{IC}}} = \frac{R_{KI_{IC}}}{1 + A_0 \cdot B}$



Jelölés: R_{BE} – IC, R_{BEV} – VISSZACSATOLÁS, ~ NEM.R.

b) PÁRHUZAMOS FESZ.

PL. INV. AK.



$R_{BE_V} = \frac{R2 \times R_{BE}}{1 + A}$

$R_{KI_V} = \frac{R_{KI}}{1 + A_0 B}$

SOROS: vezérlő és a visszacsatolt jel különböző bemenetre kerül.

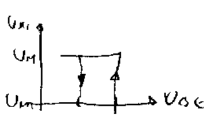
PÁRH.: ugyanarra a bem.

c) SOROS ÁRAM VCS.

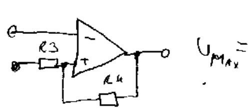
UA. MINT S.F.

NEM INV. AK.

— HISZTERÉZIS KOMPARÁTOR (SCHMITT-TRIGGER)

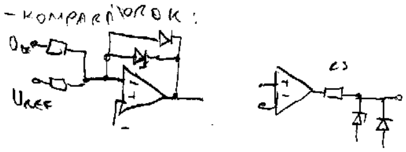


PL. DIFFERENCIÁLIS

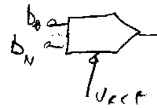


$U_{MAX} =$

— KOMPARÁTOROK:



— D/A ÁTALAKÍTÓK

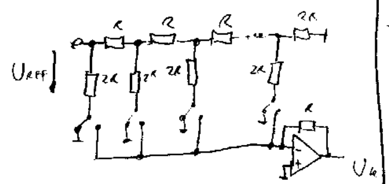


$U_{KI} = k U_{REF} \cdot \frac{D}{2^N}$ $\quad$ k - SKÁLAFAKTOR

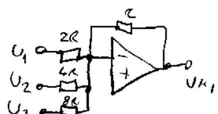
FELBONTÁS $\Delta U = \frac{k U_{REF}}{2^N}$

PL:

- ÁRAMÖSSZEGZŐ TÍPUS ELLENÁLLÁSLÉTRÁVAL (R-2R)



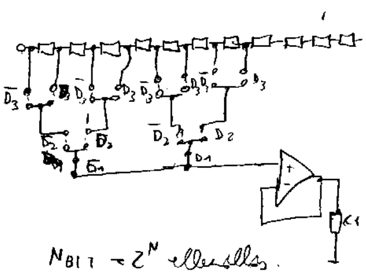
- SÚLYOZOTT ELLENÁLLÁSOS:



U_i : U_R HA ADOTT BIT=1; 0

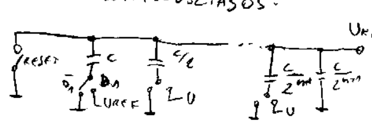
$U_{KI} = -R \sum \frac{U_i}{2^{i-1} R}$

- FESZÜLTSÉGOSZTÓS:



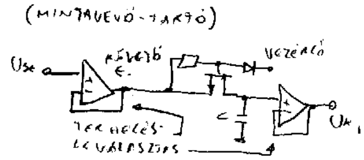
$N_{BIT} \rightarrow 2^N$ ellenállás, 2^{N+1} kapcsoló

- TÖLTÉSÚJRAELOSZTÁSOS:

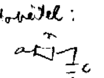


$U_{KI} = U_{REF} \sum_i D_i 2^{-i}$

— SAMPLE-HOLD (MINTAVEVŐ-TARTÓ)



mintavétel:



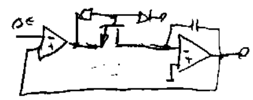
$\tau = R \cdot C$

C: elég kicsi, hogy gyorsan töltődjön, elég nagy, hogy kitartson

VISSZACSATOLT VÁLTOZAT:

* első m e -ben a kimenet megy

INVERTÁLÓ:



A/D)

ΔU_A - apertúra hiba (KVANTÁLÁSI)

$\Delta U_A = \frac{dU_{BE}}{dt} \Delta t < \frac{\Delta U}{2}$

$\Delta t = \tau_A$ $\quad \Delta U_A = U_{BE} \omega \tau_A$

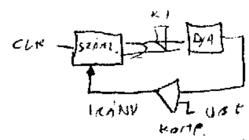
APERTÚRAIDŐ (MINTAVÉTELI)

$FS = 2U_{BEMAX}$ FULL SCALE (TELJES ÁTFOGÁS)

(VIDEO $N = 8$ $\tau_A = 0{,}15nS$; CD $N = 16$ ...)

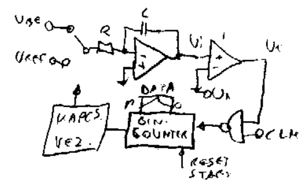
— TÍPUSOK:

- KÉTIRÁNYÚ SZÁMLÁLÓKKAL

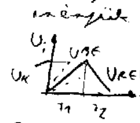


MINTAVÉTEL $2^N \cdot \tau_c$

- 2ES INTEGRÁLÓ (DUAL SLOPE)



előbb U_{BE}-vel töltünk (t_1) míg U_K-t el nem éri, majd U_{REF} (-) -fal kisütjük, míg kisül ennek az idejét mérjük a számlálóval.



$\frac{U_{BE}}{U_{REF}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{N_2}{N_1}$

~~[illegible]~~

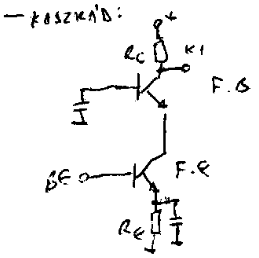
...

— VAGY U_{REF} -fel töltünk, U_{BE}-vel sütünk.

KASZKÁD (KASZKÓD)

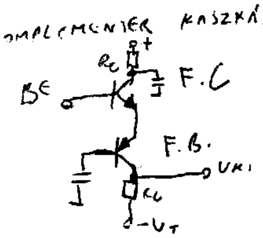
KÖZÖS A MUNKAPONTI ÁRAM!!!

– KASZKÁD:



kimeneti h. k.:
első fokozatból nézve R_C a kimenetén. → 2. FOKOZATNAK nézve R_E.

– KOMPLEMENTER KASZKÁD



1. fokozatnál nézve R_E,
2. fokozatnál nézve R_E

HÍD (VÉGFOK)

Hogy milyen osztályú, az a munkaponti (nyugalmi) I_{C_0} beállításától függ.

A:) [redacted] I_C is érvényes:

[redacted] HA I_{C_0} NEM ADOTT:

$$\left(I_{Kmax}\text{-ből számolni}\right) = \frac{U_t - U_M}{R_E + R_t}$$

$$P_{MAX_{KI}} = I_{KI\,MAX}^2 \cdot R_t$$

$\boxed{I_{C_0} \neq 0}$ ADOTT $\quad I_{C_0} = \frac{I_{CMAX}}{2}$

$I_{FELV_M} = I_{CMAX} = I_{KI\,MAX}$

$K = \frac{U_{KI}}{U_T}$ EFF. ÉRTÉK

$$P_{FELVETT} = I_{C_0} \cdot 2U_T = \text{áll.}$$

$\eta = \frac{P_{KI}}{P_{FELV.}}$ $\quad \eta_{MAX} = 50\%$ $\quad \eta > \frac{1}{2}K^2$ $\quad$ ⊓⊔ -jelnél.

$$P_{DISSZ.} = P_{FELV} - P_{KI} \qquad U_{KI_{MAX}} = U_T - U_M - I_{KI_M} R_E \quad (\text{HA } R_E = U_M = 0)$$

$$P_{KI} = \frac{U_{KI_{EFF}}^2}{R_t} \neq P_{K_{MAX}} \text{ ÁLTALÁBAN}$$

[redacted]

MINDEN OSZTÁLYBAN UGYANAZ A KAPCSOLÁS, CSAK MÁS A VEZÉRLÉS

B) $\boxed{I_{C_0} = 0}$

$$I_{FELV_M} = I_{KI\,MAX} = \frac{U_t - U_M}{R_E + R_t} = I_{C_{MAX}}$$

IDEÁLIS ($R_E = U_M = 0$):

$$P_{FELV_{MAX}} = \frac{2U_T^2}{R_t \pi} \neq \text{áll.}$$

$$P_{FELV} = \frac{2}{\pi}\frac{U_t^2}{R_t} K$$

$K = \frac{U_{KI}}{U_T}$ → kivezérlés, hogy effektív értéke

$$P_{KI_{MAX}} = I_{KI_{MAX}}^2 \cdot R_t$$

$$P_{KI} = P_{K_M} \cdot K$$

$$P_{FELV_{MAX}} = I_{FEL.M} \cdot U_t$$

$$\eta = \frac{P_{KI\,MAX}}{P_{FELV.MAX}} \qquad P_{FELV} = P_{F_M} \cdot K$$

$P_{KI_{MAX}}$ → ⊓⊔ JELNÉL

SZINUSZ JELRE

$$P_{KI_{M\,SZ.}} = \frac{P_{KI\,M\,⊓⊔}}{2}$$

AB)

$$\eta = K\frac{K_F}{K_{CS}}$$

– SZIMMETRIKUS erősítő 2 bemenet 2 kimenet (DIFF. ER.)

– ASSZIMETRIKUS: 1 bemenet 1 kimenet

– ezek variációi is vannak.

MŰVELETI ERŐSÍTŐK

– STATIKUS ERŐSÍTÉSHIBA

$$A = A_0(1+h)$$

tűnnek. egyéb miatt.

$$A = A_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_p}}$$ 3dB-es felső határfrekv.

– amplitúdóhiba (adott ω-n)

$$h_a = \frac{|A| - |A_0|}{|A_0|} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \frac{\Delta A}{A_0}$$

$$\varphi_p = -\frac{\omega}{\omega_p} \quad [\text{RAD}]$$

– VISSZACSATOLT ERŐSÍTŐK

$$A_U = \frac{A}{1+\beta A} \qquad \boxed{\beta A = H} \text{ HUROKERŐSÍTÉS}$$

$$A_U = \frac{A}{1+H} \qquad (A \gg 1,\ \beta \ll 1)$$

ha ideális ($A \to \infty$, $h \to \infty$) $\boxed{A_U = \frac{1}{\beta}}$

$$A_U = \frac{b}{\beta}$$

– STATIKUS ÁTVITELI HIBA:

$$h_s \approx -\frac{\Delta\beta}{\beta}$$

– DINAMIKUS ÁTVITELI HIBA:

• 1 ω_p-vel:

$$A = A_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}}$$

új felső határfrekv.:

$$\omega_{ÚJ} = (1 + H_0)\,\omega_{EREDETI}$$

(sávszélesség növelés hatása.)

• 2 ω_p-vel (2 TÖRÉSPONT)

A_0 az A nek $\omega = 0$ mért értéke (≈ 100 000)

$$A = A_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)}$$

ha β-áll → $\exists$ az $A \cdot \beta$ a H kompenzálásokat is a frekvenciamenete

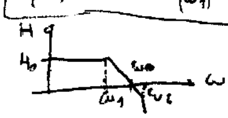
— ÁTVITELI KARAKTERISZTIKÁK

• MAXIMÁLISAN LAPOS F. KAR.

FELTÉTEL: $2H_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

$$\omega_0 = \sqrt{H_0\,\omega_1\omega_2} = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{H(\omega_0) = 1 \qquad h(\omega_1) = -3\,\text{dB}}$$

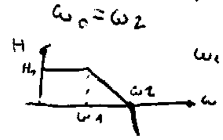


ω_1, ω_2 adott, → H_0 (vezér) H_0 függ a hálózattól. egyenlete paraméterekre.

• 45° FÁZISTARTALÉKÚ KAR.

FELTÉTEL $\frac{\omega_2}{\omega_1} = H_0$

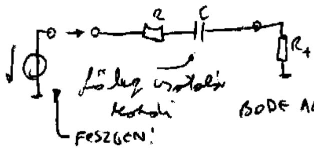
$$\omega_0 = \omega_2$$



FREKVENCIAFÜGGÉS $\boxed{U_T = 26mV}$

– ALSÓ HATÁRFREKI:

ha soros RC van a jel útjában úgy, hogy R terhelés van.



BODE ALAK

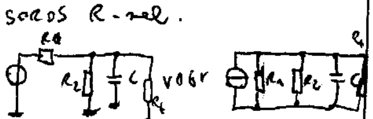
(ha áramgen: NORTON-TEVE)

$\omega_p = \frac{1}{RC}$ $f_p = \frac{1}{2\pi RC}$ $W = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{\omega_p}}$

ha több ilyen van: $W = W_1 \cdot W_2$ és több ω_p van.

– FELSŐ HATÁRFREKI:

ha párhuzamos RC van soros R-rel.



$R = R_1 \times R_2$

$\omega = \frac{1}{RC}$

Ezeket az alakokat kell számolni!

DIFFERENCIÁL ERŐSÍTŐ

– S-MEREDEKSÉG:

$S = \frac{1}{r_{d_1} + r_{d_2}}$ $\left(r_d = \frac{U_T}{I_E}\right)$

ha $r_{d_1} = r_{d_2}$, $T_1 = T_2 \Rightarrow S = \frac{I_0}{4U_T}$

I_C csak a TRANZISZTORTÓL FÜGG

ha van R_E: $S = \frac{1}{R_{E_1} + R_{E_2} + r_{d_1} + r_{d_2}}$

– OFFSZET! ~~HA U_{BE}~~

$U_0 = U_T \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}}$

$= -U_T \ln I_{S2}/I_{S1}$

LOGARITMUS: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

– ERŐSÍTÉS:

$A_{U_d} = -S(R_{C_1} + R_{C_2})\alpha$

$A_{U_K} = \frac{A_{U_d}}{K.M.E.} =$

$K.M.E. = E_K = \frac{R_0}{r_{d_2}}$

Ha $R_{C_1} = R_{C_2}$ akkor $U_{K_1} = 0$ kell. $U_{BE} = U_0$ kell.

– Ha $I_{S_1} = \alpha \cdot I_{S2}$ akkor teljesül:

$I_{E_1} = \alpha I_{E2}$ $A_1 = \alpha A_2$

– KIMENETI ~~(OFFSZET)~~ FESZ.

$U_{K_{10}} = I_{C_1} \cdot R_{C_1} - I_{C_2} \cdot R_{C_2}$

HA $U_{BE_1} = U_{BE_2}$

– ERŐSÍTÉS

● HA A KIMENET: KI_1 és GND között van:

$A_{U_d} = -\alpha S R_{C_1}$

$A_{U_K} = -\alpha S r_{01} \frac{R_{C_1} + R_{C_2}}{R_0}$

$KME = E_{K_1} = \frac{R_0}{r_{02}}$

● HA A KIMENET: KI_1 és KI_2 között van:

$A_{U_d} = -\alpha S (R_{C_1} + R_{C_2})$

$A_{U_K} = -\alpha S \frac{(R_{C_2} r_{01} - R_{C_1} r_{02})}{R_0}$

$KME = E_K =$

$= \frac{R_0 (R_{C_1} + R_{C_2})}{R_{C_2} r_{01} - R_{C_1} r_{02}}$

akkor ha

$\left.\begin{matrix} R_{C_2} r_{d_1} = R_{C_1} r_{02} \\ \text{VAGY} \\ R_0 = \infty \text{ (ÁRAMGEN)} \end{matrix}\right\} E_K = \infty$

$A_{U_K} = \frac{A_{U_d}}{E_K}$

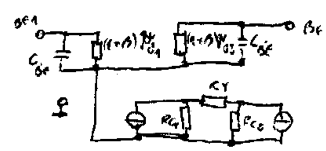
– $r_d = \frac{U_T}{I_E}$

ha $T_1 = T_2$: $r_d = \frac{U_T}{I_0/2}$

ha $I_{S_1} = \alpha I_{S2}$: $r_{d_1} = \frac{U_T}{I_0 \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha}}$

– NAGYFREKI

(áramgenerátoros)



– OFFSZET, HA ~~VAN~~ R_{E_1}, R_{E_2}

$U_0 = U_T \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}} + I_{E_1} R_{E_1} - I_{E_2} R_{E_2}$

~~$U_{0} = A_d U_{0} + \dots$~~

– BEM OFFSZET SZÁMÍTÁSKOR

I_C, I_E csak a TRANZ.-TÓL FÜGG. Ha $T_1 = T_2$ $I_{E_1} = I_{E_2} = I_0/2$

(ilyenkor $U_{BE1} = 0$ $U_{BE2} = ?$ hogy $U_{K1} = 0$ legyen)

~~.....~~ ha $T_1 = T_2 \Rightarrow U_0 = \frac{I_0}{2} \Delta R_E$

R_E általános, nem kΩ-os.

U_0 2 dologból adódhat:

- eltérő tranzok. $\to U_0 = U_T \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}}$
- eltérő R_E $\to U_0 = \frac{I_0}{2} \Delta R_E$ (VAN R_E)

ha eltérő tranzik, és eltérő R_E:

$U_0 = U_T \ln \frac{I_{S1}}{I_{S2}} + (I_{E_1} R_{E_1} - I_{E_2} R_{E_2})$

$I_{E_1} = I_0 \cdot \frac{I_{S1}}{I_{S1} + I_{S2}}$

– KIMENETI FESZ $U_{BE_1} = U_{BE2}$ esetén:

$U_{K} = I_{C_1} R_{C_1} - I_{C_2} R_{C_2}$

I_C a tranzisztortól függ.

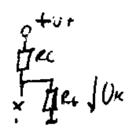
$\left(I_C = I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}\right.$ ha $\left. U_{BE_1} = U_{BE_2}\right)$

akkor $\frac{I_{C1}}{I_{C_2}} = \frac{I_{S1}}{I_{S2}}$

KIVEZÉRELHETŐSÉG

(FÖLDELT EMITTERES)

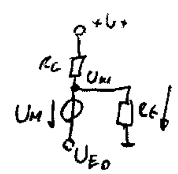
+) KONDI NÉLKÜL (C_E)



$U_{K_1} = +U_T \cdot \frac{R_t}{R_C + R_t}$

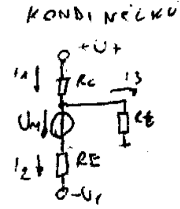
KONDIVAL UGYANAZ.

–) KONDIVAL ~~.....~~



$U_{K_1} = U_{E_0} + U_M$

KONDI NÉLKÜL



$I_1 = I_2 + I_3$

$I_1 = \frac{U_{T+} - U_{K_1}}{R_C}$

$I_2 = \frac{U_{K_1} - U_M - U_{T-}}{R_E}$

$I_3 = \frac{U_{K_1}}{R_t}$ $\left(\begin{matrix} \text{pl} \\ +U_T = +12V \quad -U_T = -12V \end{matrix}\right)$

– KIVEZÉRELHETŐSÉG: $U_{C_0} = ?$

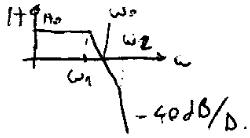
~~..... HA ..... $(I_{..} + I_t) U_{..}$~~

$\hat{U}_{MAX} = MIN\left(|U_{K_1+} - U_{C_0}|, |U_{K_1-} - U_{C_0}|\right)$

● KRITIKUS CSILLAPÍTÁSÚ FREKVENCIAMENET

feltétel: $4H_0 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

$\omega_0 = \frac{\omega_2}{2}$



$-40dB/D$.

— SZÁMÍTÁSOK

● R [illegible] kell:

$\omega_1, \omega_2 \rightarrow H_0 \rightarrow R$

ADOTT FELTÉTEL KAPJS.

o frekikompenzálás:

C_K-val állítjuk ω_1-et.

$\omega_1 = ?$ ω_2 adott

$R \rightarrow H_0 \rightarrow \omega_1$

ω_2

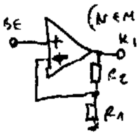
HÁLÓZAT feltétel.

● KIMENETI OFFSZET:

$U_{KI_{OFF}} = A_0 U_{BE_{OFF}}$

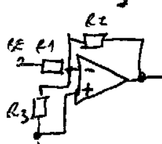
— A, β, b táblázatból.

A_0 adott IC jellemzője.



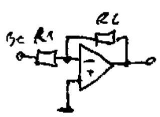
$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$(H = \beta A_0)$



$\beta = \frac{R_3 \times R_1}{R_2 + R_3 \times R_1}$

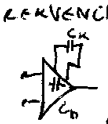
$(H = \beta A_0)$



$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$(H = \beta A_0)$

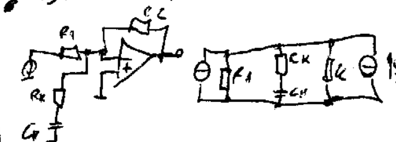
— FREKVENCIA KOMPENZÁLÁS



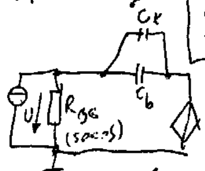
$\omega_1 = \frac{1}{R_{be}(1+A)(C_b + C_K)}$

ELŐRECSATOLÁSSAL (CSAK NEMINVERTÁLÓ FOKOZATOT) INVERTÁLÓNÁL BEMENETI KOMPENZÁLÁST.

● BEMENET KOMPENZÁLÁS



● ELŐRECSATOLÁS: f_T-t állítjuk.



$z_{be} = \frac{C_{be}}{1 + sR_{be}(1+A)(C_b + C_K)}$

STATIKUS ERŐSÍTÉS HIBA

DC erősítő $\omega_0 = 0 \rightarrow \frac{A}{A_{való}}$

AC erősítő [illegible] —"—

ha $H \angle \infty$:

$h_u = -\frac{1}{H_0}$

$h_{r_{dc}} = |h_A| + |h_\beta| + |h_H|$

— DINAMIKUS erősítés HIBA (frekvenciafüggés)

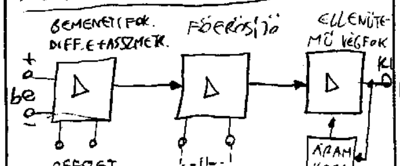
h_K h_φ

[illegible] kisebb, annál nagyobb A_U, és a HIBA.

KOMPENZÁLÓ KAPACITÁS:

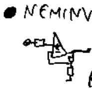
$C_K = \ldots$

MŰVELETI ERŐSÍTŐK FELÉPÍT.



— BEMENETI ELLENÁLLÁS ($R_{ki} \approx 0$,)

● NEMINVERTÁLÓ



HA AZ IC IDEÁLIS $\Rightarrow R_{be} = \infty$

$R_{be} \cong 2R_{be_K} \times [R_{be_S}(1 + H_0)]$

$10^7 \ldots 10^{12}\,\Omega$

$R_{be_K} = \frac{U_{beK}}{I_{beK}}$ (KÖZÖS MÓD)

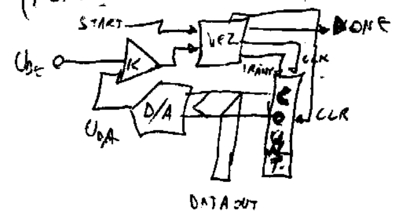
$R_{be_S} = \frac{U_{beS}}{I_{beS}}$ (SZIMMETR.)

● INVERTÁLÓ $R_{be_{IDEÁLIS}} = R_1$

$R_{be} \cong R_1 + \frac{R_2}{1 + A_{U}}$

SZUKCESSZÍV APPROXIMÁCIÓS A/D

(FOKOZATOS KÖZELÍTÉS)

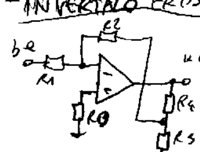


ha a [illegible] D/A konvertált értéke (U_{DA}) eléri U_{BE} értékét, leállítjuk a [illegible]. DONE-jel — kész [illegible] a [illegible].

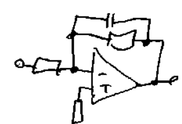
— De [illegible]:

A COUNTER 1 regiszter, (NEM SZÁML.) [illegible] először a legnagyobb helyiértéket állítjuk. ha kicsi, [illegible] kell az adatot, ha nagy csökkenteni amíg K kimenete 0 nem lesz. 1 helyiértéket max $2\times$ változtat. akkor kész, ha már a legkisebb helyiértéket is állítottuk.

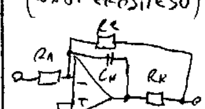
— INVERTÁLÓ ERŐSÍTŐ VÁLTOZATOK



(NAGY ERŐSÍTÉSŰ)



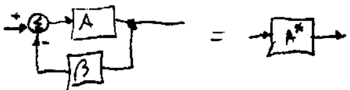
(KIS HATÁRFREKV.)



(TERHELŐ KAPACITÁS KOMPENZÁLÁSA)

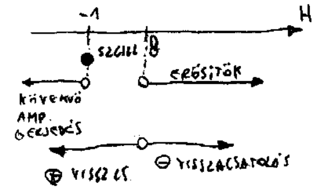
OSZCILLÁTOROK

ERŐSÍTŐK:



$$A^* = \frac{A}{1+H} = \frac{A}{1+A\beta}$$

H - HUROKERŐSÍTÉS



OSZCILLÁCIÓ feltétele: $H=-1$

BŐVEBBEN:

H:
- $|H| = -1$ AMPLITÚDÓ FELTÉTEL
- $\varphi_H = -180°$ FÁZISFELTÉTEL

(HA $A=1$, $\beta=1$ KERESŐ SÍTÉS =1 ($h=-1$), A, B KÖZÜL AZ EGYIKET SZABÁLYOZNI KELL) SZABÁLYOZÁS TECHNIKÁBAN: H' - VAN, $H' = -H$

— OSZCILLÁTOROK:

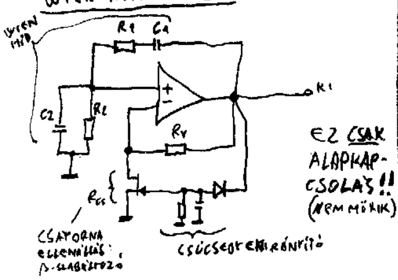
FREQ MEGHATÁROZÓ ELEM ALAPJÁN:
- RC
- LC
- KRISTÁLY

(⊕V.CS. kell, ezt úgy oldjuk meg, hogy ⊖ egyet ⊖ -AN CSATOLUNK VISSZA)

AMPL. STABILIZÁLÁS:
- LINEÁRIS
- NEM LIN.

LINEÁRIS RC:

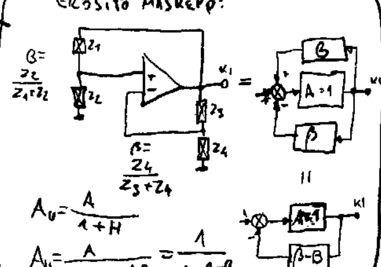
WIEN HIDAS OSZC.



EZ CSAK ALAPKAPCSOLÁS!! (NEM MŰKIK)

MIVEL A CSÚCSEGYENIRÁNYÍTÓ ÉS A MŰVER. NEM IDEÁLIS: EZEKET ÚJ KELL OLDANI.

ERŐSÍTŐ MÁSKÉPP:



$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} \qquad B = \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}$$

$$A_U = \frac{A}{1+H}$$

$$A_U = \frac{A}{1+A\beta-AB} = \frac{1}{1+\beta-B}$$

AMPLITÚDÓ FELTÉTEL:

$$\beta - B = 0$$

$$\frac{R_{cs}}{R_V + R_{cs}}$$

FÁZISFELTÉTEL: 0°

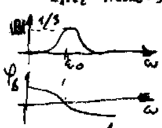
$$\varphi_k = -180° = \varphi_A - \varphi_B$$

A CSÚCSEGYENIR.:

$$\varphi = -180°$$

$$\beta = \frac{R_{cs}}{R_V+R_{cs}}$$

$$B = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{sRC}{1+3sRC+s^2R^2C^2}$$



$\Downarrow$ $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

így $\beta(\omega_0) = 3$ kell

$$R_{cs} = \frac{R_V}{2}$$

R_{cs} BIZTOSÍTÁSA:

$$R_{cs} = \frac{r_{U_{GS}=0}}{1-\frac{U_{GS}}{U_0}} \qquad \frac{-U_0}{2 I_{DSAT}}$$

— ez csak $U_{DS} = 0 \pm 0{,}3V$ KÖRÜL HASZNÁLHATÓ (NEMLINEÁRIS SZAKASZOK ÉS LETÉRÉS MIATT)

Ha $U_{DS} < 0{,}3V \rightarrow U_{KI} < 0{,}9V$ EZ KICSI, a csúcsegyenirányítónak.

— AMPLITÚDÓ SZABÁLYOZÁS:

$\hat{U}_{KI}$ NŐ → $|U_{GS}|$ NŐ → R_{cs} NŐ → β NŐ → U_{KI} CSÖKK.

— GYAKORLATI KAPCSOLÁS:

- ASZIMMETRIKUS A WIEN HÍD ($R_1 \neq R_2$, $C_1 \neq C_2$)

így $\beta_0 = 0{,}1$ → $U_K = 3V$ EZ MÁR JÓ.

- MÉG ELLENÁLLÁS:

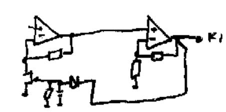
U_1 NÖVEKSZIK de ez rontja a STABILITÁST

$$\beta = \frac{R_{cs}+R_S}{R_{cs}+R_S+R_V}$$

- KIMENETI OSZTÓ

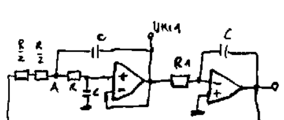
$$R_{V_{cs}} = R_V + R_A \times R_2$$

- MÉGEGY ERŐSÍTŐFOKOZAT KELL



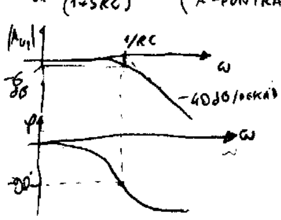
NEMLIN RC:

2FÁZISÚ OSZCILLÁTOR

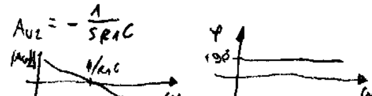


$$A_{U1} = \frac{1}{(1+sRC)^2}$$

(CSOMÓPONT EGYENLET A-PONTRA)



$$A_{U2} = -\frac{1}{sR_1C}$$



— AZ OSZCILLÁCIÓ:

$H = -1 = A_{U1} A_{U2}$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0$ csak $\omega = \frac{1}{RC}$-NÉL

AZ AMPLITÚDÓ FELTÉTELT IS IDE

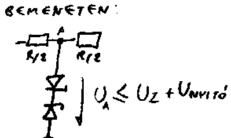
$$|H| = \underbrace{\frac{1}{2}}_{A_{U1}} \cdot \underbrace{\frac{R}{R_1}}_{A_{U2}} = 1 \rightarrow \boxed{R_1 = \frac{R}{2}}$$

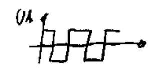
HOGY AZ OSZCILLÁCIÓ BEINDULJON, $|H| \gtrsim 1$ KELL (GERJEDÉS)

A GERJEDÉS: ZAJOKBÓL AZ $\omega = \frac{1}{RC}$ ERŐSÍTÉSE

így $\boxed{R_1 \leq \frac{R}{2}}$

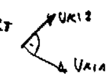
— AZ AMPLITÚDÓT KORLÁTOZNI: A BEMENETEN:





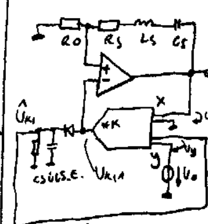
U_A = ALAPHARMONIKUS AMPLITÚDÓJA

2FÁZISÚ, MERT



LINEÁRIS LC OSZC.:

MEACHAM HIDAS



K - SKÁLATÉNYEZŐ

A SZORZÓ VALÓS ÁTVITELŰ

$U_{KI1} = k\, U_x \cdot U_y$ $k = 0{,}1 \frac{1}{V}$

A REZONANCIAFREKVENCIÁN ERŐSEBB A ⊕V.CS.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_S C_S}}$$

ITT $\beta = \frac{R_0}{R_0+R_S}$

$$\beta = \frac{\hat{U}_{KI1}}{\hat{U}_{KI}} = \frac{-kU_0}{1+k\hat{U}_{KI}}$$

$\beta = 0$ kell, ehhez $U_0 < 0$

$k\hat{U}_{KI} < 1$ → $\hat{U}_{KI} < 10V$ kell $-kU_0 < 1$

U_y vezérli U_x ERŐSÍTÉSÉT

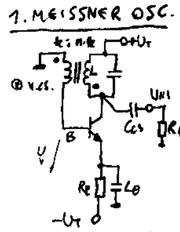
— AMPLITÚDÓ STABILIZÁLÁS:

U_{KI} NŐ → U_{KI1} NŐ → $\hat{U}_{KI1}$ NŐ → U_y NŐ → A_{U2} NŐ

U_{KI} CSÖKK. ← A_{U1} CSÖKK. ← ⊖V.CS. NŐ

NEMLIN LC

1. MEISSNER OSC.



FÖLDELT EMITTERES KAPCSOLÁS

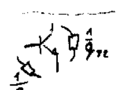
$$A_U = -g_{21} Z_C$$

NAGYOBB ERŐSÍTÉS $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$-NÉL VAN. ITT $A_U = g_{21} R_p$

R_p-PÁRHUZAMOS VESZTESÉGI ELLENÁLLÁS

$$R_p = R_{PÁRHUZ} \times \frac{1}{g_{22}} \times R_t \times \frac{1}{g_{11}} \cdot n^2$$

$$g_{21} = \frac{I_C}{U_T} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}}$$



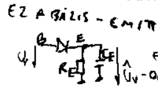
BEKAPCSOLÁS:

kezdetben a tranzisztor elzárva, kinyitni → g_{21} nő → H nő → oszc.

$g_{21} = \frac{I_C}{U_T}$ $H = g_{21} R_p \left(-\frac{1}{n}\right)$

AMPLITÚDÓKORLÁTOZÁS:

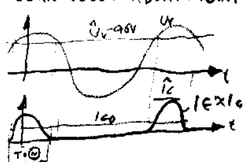
EZ A BÁZIS-EMITTER KÖR (AC)



EZ EGY CSÚCSEGYENIRÁNYÍTÓ, TEHÁT U_E NŐ, HA U_{KI} NŐ

EZ AZ AMPLITÚDÓNÖVEKEDÉS ELLEN HAT

ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBAN:



(Θ-folyási szög)

$I_C \approx I_E$

$I_{C0} = I_C$ átlag

$\frac{U_E - U_T}{R_E} = I_{C0}$ (kondi töltés-kisütés áram)

$y_{21}^* = \frac{\hat{I_C}}{\hat{U_V}}$ leíró függvény ($\sim \frac{1}{U_K}$)

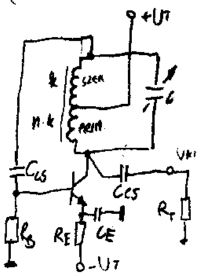
$A_U^* = y_{21}^* R_P^*$

$y_{21}^* R_P^* = n$ az n oszcilláció feltétele

(ez C osztályú működésű ⇒ nem lin)

2. HARTLEY OSZCILLÁTOR

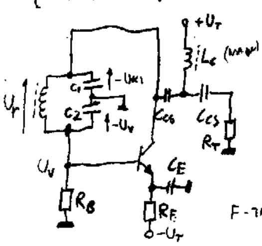
(transzformer helyett +csapolt tekercs)



f-változtatás a kondival, tartomány váltás: tekercscserével, ennél 300-on kell kiválogatni. 3-pont oszcill.

3. COLPITTS OSZCILLÁTOR

A kapacitív oldal van kettéosztva (kapacitív 3 pont oszc)



$-U_{K1} = U_T \frac{C_2}{C_1 + C_2}$

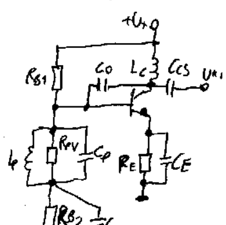
$-U_V = U_T \frac{C_1}{C_1 + C_2}$

$\beta = \frac{C_1}{C_2}$

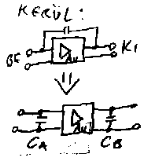
F-tartomány: C_1, C_2 csere

4. MILLER OSZCILLÁTOR

1 tápfeszből megy (single supply)



A C_0 a Miller-hatás miatt máshová kerül:



$C_A = C_0(1 - A_0)$ $C_B = C_0\left(1 - \frac{1}{A_0}\right)$

Így a $C_0 \to C_A, C_B$ a bázis-föld, és a kollektor-föld közé kerül.

$A_U = -y_{21} S L_C \Rightarrow C_A = C_0(1 + y_{21} S L_C)$

Ennek a reaktanciája:

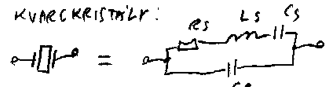
$$X_{C_A} = -\frac{1}{\omega^2 y_{21} C_0 L_C}$$

ami negatív ellenállás!

Ez a rezgőkörrel párhuzamosan van, és kiejti annak párhuzamos veszteségét. → csillapítatlan lesz a rezgése.

KRISTÁLYOSZCILLÁTOROK

Kvarckristály:

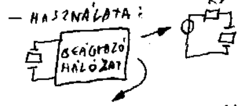


$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L_S C_S}}$ (Thomson)

$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{L_S (C_S \times C_P)}}$

A párhuzamos rezonanciafrekvenciát el lehet állítani külső (párh) kondenzátorral.

– Használata:

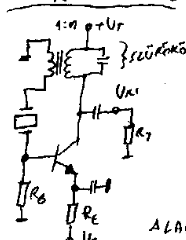


Ha $R_0 \to 0$ soros kr. oszc. C_P-t kiiktatja, ω_S-en megy.

Ha $R_0 \to \infty$ párhuzamos oszc. ω_P-n megy, C_S hatástalanítva van.

(Tank áramkör: párhuzamos rezgőköri mint energiatárolók összessége)

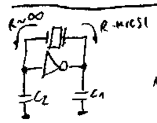
1. Soros kv. oszc.



A szűrőkör kiszűri a nemkívánt frekvenciákat. A kvarc a ω_S felharmonikusain is tud rezegni. Itt a szűrő az alapharmonikust engedi át csak ⇒ alapfrekv. működés (akár ...10 MHz)

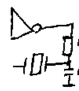
Felharmonikusoknál max k·100 MHz.

2. Párhuzamos kv. oszc.



C_1, C_2 mint a Colpitts oszcillátornál.

Mellékrezonanciaszűrés:



RC aluláteresztő szűrő

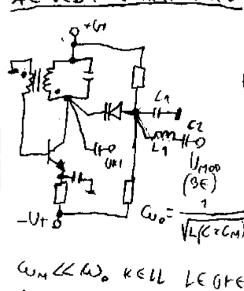
OSZCILLÁTOROK

	RC	LC	Kristály
f [Hz]	$10 \ldots 10^6$	$10^4 \ldots 10^9$	$10^3 \ldots 10^8$
$\frac{\Delta f_0}{f_0}$ pontosság	1% ... 0,01%	0,1% ... 0,001%	1 ppm ... 0,001 ppm
Hangolhatóság	1:10	$1:\sqrt{10}$	nincs

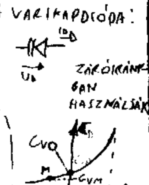
Nagyobb frekvenciákat ezek után kötött PLL-lel érnek el.

VCO-k (FM-modulátorok)

AC-VCO: Meissner alapú



(A varikapdióda: záróirányban használják)



$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_M)}}$

$C_V = \frac{C_{V0}}{\sqrt{1 - \frac{U_D}{U_K}}}$

$\omega_M \ll \omega_0$ kell legyen!!

C_2, L_2 ω_M-en rövidzár, C_1 még szakadás.

A visszahatás megelőzése:

L_1 ω_0-n szakadás (ω_M-en rövidzár)

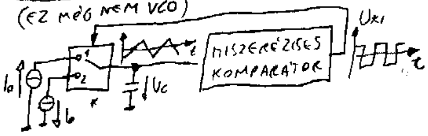
$$\omega_{K1} = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_{VM} \pm \Delta C_V)}}$$

A C-V görbe nemlineáris ⇒ csak kis tartományban közelíti a lineárisat.

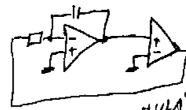
ω_M nem lehet akármilyen kicsi ⇒ AC

Hullámforma generátor

(ez még nem VCO)



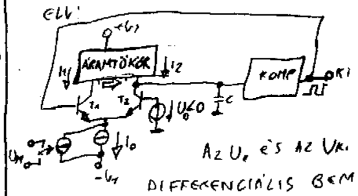
Pontosabban:



Módosított hullámformagenerátor elvű VCO (DC-VCO)

A frekvencia a kondit töltő áramtól függ.

Elv:

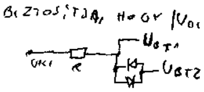


Az U_0 és az U_{K1} együtt differenciális bemenő feszültséget alkotnak. Mivel U_{K1} 4szögjel: I_0 vagy T_1-en vagy T_2-n folyik.

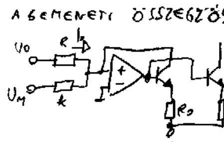
1) $U_{K1} > 0$ akkor $I_{CT1} = I_0$ ⇒ $I_{CT2} = 0$ de az áramtükör miatt $I_2 = I_1 = I_{CT1} = I_0$; ez az I_0 nem tud T_2-n folyni, ezért tölti a kondenzátort. U_C nő lineárisan.

2) Ha $U_{K1} < 0$ akkor $I_{CT1} = 0 \Rightarrow I_{CT2} = I_0$ de az áramtükör miatt $I_2 = I_1 = I_{CT1} = 0$. Az $I_{CT2} = I_0$ áram nem tud az áramtükrön keresztül folyni ⇒ C-felől folyik, kisüti a kondit. U_C csökk. lin.

Megj: kell egy áramkör, ami biztosítja, hogy $|U_{0,FF}| \leq 0{,}6\,V$ legyen.

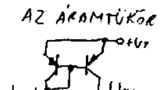


A bemeneti összegzős áramforrás:



$I_0 + \frac{U_M}{R}$

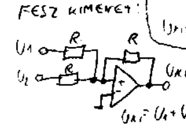
Az áramtükör:



A komparátor:

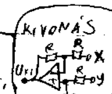
Összegzés

Fesz. bemenet, fesz kimenet:



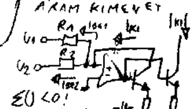
$U_{K1} = U_1 + U_2$

Kivonás:



$U_{K1} = y - x$

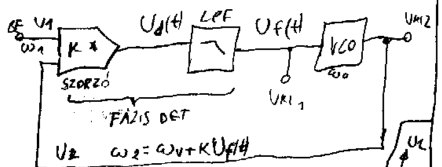
Fesz. bemenet áram kimenet:



$U_0 \leq 0$!

$I_{K1} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$

FÁZISZÁRT HUROK (PLL)



EZ JÓ FM DEMODULÁLÁSRA IS.

HA $\omega_1 = \omega_v$ MODULÁLATLAN, ÁLLANDÓ:

$U_d(t) = K \cdot U_1 \cdot U_2 = K\hat{U}_1\hat{U}_2 \frac{\cos\varphi - \cos(2\omega_0 t + \varphi)}{2}$

HA $\omega_{BEM} = \omega_v$ = áll akkor

$U_{KI} = 0$ KELL LEGYEN.

A SZŰRÉS MIATT $U_{KI} = K\hat{U}_1\hat{U}_2 \frac{\cos\varphi}{2}$

ÍGY $\frac{K}{2}\hat{U}_1\hat{U}_2 \cos\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 90^\circ}$

ALAPHELYZETBEN $\boxed{\text{CSAK } \omega_0\text{-ÁN}}$

A KIMENŐJEL FÁZISA IGYEKSZIK FELVENNI A $\vartheta_{BE} + 90° = \vartheta_{KI}$-T, HA KIMOZDÍTOTTÁK AZ ALAPHELYZETBŐL. ($\omega_{0E} \to \omega_{BE} + \Delta\omega$)

$\boxed{\Delta\omega = \frac{d\vartheta}{dt}}$ TEHÁT: $\boxed{FM}$

$\boxed{\omega_1 = \omega_v + \frac{d\vartheta_1}{dt} = \omega_v + \Delta\omega_1}$

$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \vartheta_e = 90°$ φ $K_d = \frac{1}{2}K\hat{U}_1\hat{U}_2$

HA $U_{BE} = \hat{U}_M \sin(\omega_v t + \vartheta_1)$

AKKOR $U_d(t) = K_d \sin\vartheta_e$

$\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2$ PILLANATNYI FÁZISHELYZETE 1 JELNEK

– A FÁZISDETEKTOR ÁTVITELI FÜGGVÉNYE: $\boxed{\frac{U_d(s)}{\Theta_e(s)} = K_d}$

$\Theta_e(s) = \mathcal{L}\{\vartheta_e(t)\}$ MIVEL U_{KI} CSAK ϑ-TÓL FÜGG

– SZINKRONIZÁLÓDÁS $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ESETÉN VAN. EKKOR $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 < 0$

$\vartheta_e > 0 \Rightarrow U_d(t) > 0 \Rightarrow \omega_2$ MEGNŐ, ÉS ADDIG NAGYOBB MARAD, AMÍG AMÍG $\vartheta_e = 0$ LESZ ($\varphi = 90°$)

(ω_0 - VCO ALAPFREKI)

SZINKRON MÁS FREKVENCIÁN:

$\omega_v > \omega_0$-NÁL: $\vartheta_e > 0$ ($\varphi < 90°$)

$\omega_v < \omega_0$-NÁL $\vartheta_e < 0$ ($\varphi > 90°$)

– ALAPSÁV: VCO MŰKÖDÉSI TARTOMÁNYA $\omega_0 \pm \Delta\omega$

– ALAPSÁVI LINEÁRIS MODELL

TÖBB HELYEN FESZÜLTSÉG (IDŐFÜGGV) HELYETT $\vartheta(t)$-K, PILLANATNYI FÁZISOK VANNAK. FESZ.-RE VALÓ ÁTTÉRÉS K_d-ÁTVITELI FÜGGVÉNNYEL

$U_d(t)$ ϑ_e

($\omega_0 = \omega_v$ ESETÉN $\vartheta_e = 0$ SZINKRONBAN, $\omega_0 \neq \omega_v$-NÉL $\vartheta_e \neq 0$ SZINK. DE ÁLLANDÓ)

PD $\vartheta_1 \to \Sigma \xrightarrow{\vartheta_e} \boxed{K_d} \to U_d$; ϑ_2

(ÚGY IS NÉZHETŐ, HOGY $U_{KI} = -\cos(\varphi + \vartheta)$)

VCO: FESZ → FÁZISSZÖG:

$W = \frac{X_{KI}}{X_{BE}} = \frac{\Theta_2(s)}{U_M(s)} = \frac{K_0}{s}$ ($\vartheta_2 = K_0 \int_0^t U_M(\tau)d\tau$, K_0 - VCO MEREDEKSÉG)

A SZŰRŐ

ELSŐFOKÚ ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐ MAX ELSŐFOKÚ LEHET, MERT A HUROKERŐSÍTÉS MAX MÁSODFOKÚ LEHET, (ENÉLKÜL IS ELSŐFOKÚ) HOGY STRUKTURÁLISAN STABILIS LEGYEN.

HÁNYAD FOKÚ SZŰRŐ = HÁNY DINAMIKUS ELEM VAN BENNE

A) PASSZÍV

$F(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_F}{U_d} = \frac{1/sC}{R_1 + 1/sC} = \frac{1}{1 + sR_1C}$ (τ_1)

MÁSIK:

$F(s) = \frac{1 + sR_2C}{1 + s(R_1 + R_2)C}$ (τ_2, τ_3)

EZEK UTÁN NAGYIMPEDANCIÁS TERHELÉS, VAGY KÖVETŐERŐSÍTŐ KELL

B) AKTÍV

$F(s) = -\frac{1}{sR_1C}$

MÁSIK:

$\tau_2 > \tau_1$ $\tau_2 < \tau_1$

$F(s) = \frac{1 + sR_2C}{sR_1C}$

EZEK FÁZIST FORDÍTANAK! (A PASSZÍVAK NEM)

(MŰVELETI ERŐSÍTŐ CSAK DC VISSZACSATOLÁSSAL MŰXIK. Ez A TELJES HUROKBAN EL +VAN)

A TELJES PLL LINEÁRIS MODELLJE SZABÁLYOZÁSI KÖR!!

$\vartheta_1 \to \Sigma \to \boxed{K_d} \to \boxed{F(s)} \to \boxed{\frac{K_0}{s}}$ — SZORZÓ, LPF, VCO; $-\vartheta_2$

HUROKERŐSÍTÉS: $H = K_d F(s) \frac{K_0}{s}$ (FELNYITOTT KÖR)

DC HUROKERŐSÍTÉS $H_0 = K_d F(0) K_0$

SZINKRONBAN:

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 + H_0\vartheta_e = \omega_0 + K_d F(0) K_0 \vartheta_e$

KÖVETÉSI HIBA:

$\vartheta_e = \frac{\omega_1 - \omega_0}{H_0}$ (HA H NAGY → ϑ_e KIS)

HUROK RENDSZERE: H-NEVEZŐJE HÁNYADRENDŰ

HUROK ÁTVITELE: (ZÁRT KÖR)

$T(s) = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$

HIBAFÜGGVÉNY:

$1 - T(s)$

ω - AZ ω_v-NEK A VÁLTOZÁSA

– HA A SZŰRŐ NULLADFOKÚ, MÉG A HUROK ELSŐFOKÚ ALULÁTERESZTŐ A VCO MIATT. H_0-TÖRÉSPONTÚ

$T(s) = \frac{1}{1 + s/H_0}$

$T(s)$ $1/H_0$ → $1 - T$ ω

tehát GYORSABBAN (ω) VÁLTOZIK AZ $\omega_1 \Rightarrow$ KISEBB LESZ A HIBA

H_0-T LEHET CSAK VÁLTOZTATNI

– HA A SZŰRŐ AKTÍV ELSŐFOKÚ (2. FOKÚ HUROK) (+1 INVERTÁLÓ ERŐSÍTŐ)

$H(s) = K_d \frac{1 + sR_2C}{sR_1C}$

$T(s)$ ω_P $1/\tau_2$ ω

$\omega_p = \sqrt{\frac{K_d K_0}{\tau_1}}$

$Q = \frac{1}{\tau_2\omega_P}$ — SÁVSZÉLESSÉG, STABILITÁS

TERVEZÉS: $\tau_1 \to \omega_P$, $\tau_2 \to Q$

$H_0 \to \vartheta_e$ (KÖVETÉSI TULAJDONSÁG)

– PLL FREKVENCIATARTOMÁNYAI

$2\Delta\omega_H$ KÖVETÉSI TARTOMÁNY (HOLDLOCK)

$2\Delta\omega_P$ BEFOGÁSI TART. (PULL IN)

$2\Delta\omega_L$ GYORS BEFOGÁSI TART. (LOCK-IN)

$\Delta\omega_d$ DINAMIKUS HATÁRFREKVENCIA.

ha $\Delta\omega > \Delta\omega_d \Rightarrow$ KIESIK A SZINKR.

SZINKRONIZÁLÁS IDŐ (HA $2\Delta\omega_L > \Delta\omega$)

$\Delta T = 0{,}25 \cdot \frac{1}{\Delta\omega}$ (?)

CSAK AKKOR SZINKRONOZ, HA $\Delta\omega < \Delta\omega_P$

PLL ALKALMAZÁSAI

1.) KESKENYSÁVÚ ERŐSÍTŐ (FM)

$U_1 \to \boxed{PLL} \to U_2$ $B \neq \omega_0 \pm \Delta\omega_P$

U_{KI} = állandó

2.) FM DEMODULÁTOR:

OSC, K×, LPF, VCO, $U_{KI}(U_F(t))$

$U_{KI} = \frac{T(s)}{K_0/s}\Theta_1(s)$ $\frac{d\vartheta_1}{dt} \to U_{KI}$

3.) FM MODULÁTOR

OSC, Σ, K_d, $F(s)$, Σ, K_0/s, U_M, KI

$U_{BE} - \frac{d\vartheta_2}{dt}$

ITT $\omega_M > \omega_P$ KELL LEGYEN.

4) FREKVENCIASZINTETIZÁTOR

f_1 1:N PD (XOR) LPF VCO f_2 1:M

$f_2 = \frac{M}{N} f_1$

5) AM DEMODULÁTOR

U_{BE} f_{BE} ϑ_{BE} PLL $\hat{U} = ÁLL$, $f = f_{BE}$, $\vartheta_{BE} + 90°$ -90° K× LPF HPF

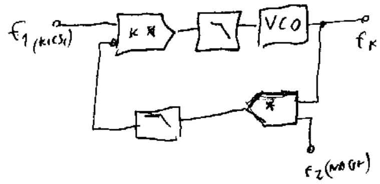
$\frac{1}{2}\hat{U}_1\hat{U}_2(1 - m\sin\omega_M t)$

$U_{MOD} = \hat{U}_1(1 - m \cdot \sin\omega_M t)$ - ELVOLT

KI $\hat{U}\sin\omega_M t$

6.) FREKVENCIAÖSSZEGZÉS

SIMA SZORZÓVAL IS LEHETNE, DE HA $f_1 \ll f_2$ akkor a kimenete $f_2 \pm f_1$ lesz, és az $f_2 - f_1$-et nehéz kiszűrni.



NEMLINEÁRIS ÁRAMKÖRÖK

INVARIÁNS — KARAKTERISZT. FÜGGETLEN AZ IDŐTŐL — $U_{ki} = f(U_{be})$

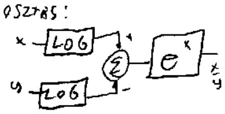
VARIÁNS — ÁTVITEL AZ IDŐTŐL IS FÜGG — $U_{ki} = f(U_{be}, t)$

KVÁZILINEÁRIS — ERŐSÍTÉS A JEL KIZ. JELLEMZŐJÉTŐL FÜGG.

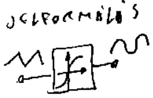
INVARIÁNS

példák:

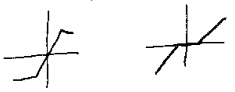
OSZTÁS:



JELFORMÁLÁS

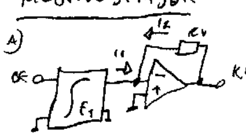


HATÁROLÁS: HOLTZÓNA



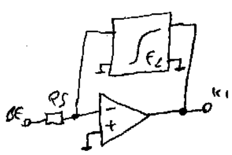
MEGVALÓSÍTÁSOK

A)



$U_{KI} = -R_V f_1(U_{BE})$

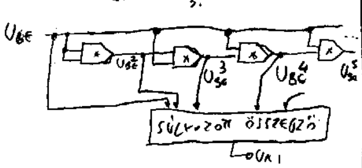
(INVERZFÜGGVÉNY)



$U_{KI} = f_2^{-1}\left(\frac{U_{BE}}{R_S}\right)$

B) TAYLOR SOROKKAL KÖZELÍTÉS:

$f(x) = x + a_1 \frac{x^2}{2!} + a_2 \frac{x^3}{3!} + \dots$



C) RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNNYEL KÖZ.

$f(x) = \frac{m(x)}{n(x)}$

Ugyanaz az előzőhöz

D) TÖRTKITEVŐS KÖZELÍTÉS

$F(x) = a + b\cdot x + \frac{x^c}{D}$

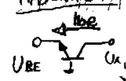
LOG ÉS EXP ÁRAMKÖRÖK

TRANZISZTOR (BJT) $I_C(U_{BE})$ KARAKTERISZTIKÁJA EGY TARTOMÁNYON EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNNYEL KÖZELÍTHETŐ (1nA < I_C < 1mA) $I_C = I_S \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$

akkor ha $U_{BE} > 4U_T = 0{,}1V$

KÖZELÍTÉS HIBÁJA:

HASZNÁLAT:



$\boxed{U_{BE} = -U_T \ln \frac{I}{I_S}}$

$I_{BE} = I_{ÁTFOLYÓ} = \boxed{I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} = I}$

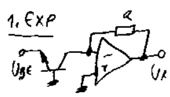
$I_S = I_0 = 10\,pA$ $U_{BE} \neq U_{be}$ HA $U_{BE} < 0{,}1V$

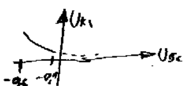
VAGY I_{BE}

HA $U_{BE} > 0{,}1V$ VAGY $U_{BE} > U_{KI}$

KB. U_{KI}, U_{BE}: 0,1V ... 0,6V -IG HASZNÁLHATÓ, KIS FREKV. HŐFÜGGŐ. A KIMENETE AZ ÁRAM. EZ EGY ELLENÁLLÁSON FESZÜLTSÉGET EJTHET. VAGY ÁRAMMAL VEZÉRELVE FESZT AD. MŰVELETI ERŐSÍTŐVEL EGYÜTT SZOKTÁK

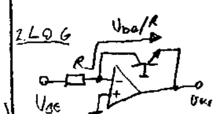
1. EXP

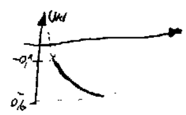




$U_{KI} = R I_0 e^{\frac{U_{be}}{U_T}}$ $\boxed{R \ll g_{21} \approx 100k\Omega}$ EZ ÁRAMF. → R → U_{KI}

2. LOG



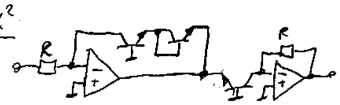


$U_{KI} = -U_T \ln \frac{U_{be}}{I_0 R}$

AZ R-helyére jó lenne ÁRAMFORRÁS. AZ R IS OK: $I = \frac{U_{BE}}{R}$

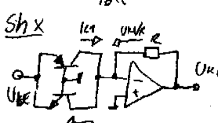
U_{BE} → ÁRAMFORRÁS → $U(I)$ INVERZ FÜGGV.

x^2



$U_{KI} = \frac{1}{I_0 R} U_{BE}^2$

Sh x



$U_{KI} = 2I_0\, sh \frac{U_{be}}{U_T} R$

$I_{VISSZA} = I_{BE} = 2 I_0\, Sh \frac{U_{be}}{U_T}$

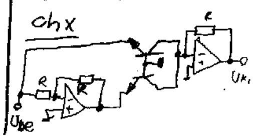
MERT:

$I_{VISSZA} = \frac{U_{KI}}{R} = I_{C2} - I_{C1} = I_0\left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - e^{-\frac{U_{BE}}{U_T}}\right)$ $2Sh\frac{U_{BE}}{U_T}$

CSAK ITT ÉS MOST: $U_{be} = U_{BE}$

(I_{C1}, I_{C2} bevillítva folynak)

ch x



$U_{KI} = 2RI_0\, ch \frac{U_{be}}{U_T}$

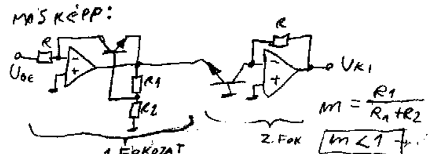
HATVÁNYOZÁS

$U_{BE}^{\ln x \cdot m}$ e^x $U_{KI} \sim U_{BE}^m$

$-U_T \ln \frac{U_{BE}}{U_T}$ $\cdot m$ $R I_S e^{-\frac{U_B}{U_T}}$

feltételek: $U_A < 0{,}7V$ $U_B > 0{,}1V$

MÁSKÉPP:



1. FOKOZAT 2. FOK $m = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $\boxed{m < 1}$

$U_{KI} = \frac{U_{BE}^{1/m}}{(R \cdot I_S)^{1/m - 1}}$ $\sim \ln U_{BE}$ $U_{BE} \xrightarrow{\ln} \frac{1}{m} \ln U_{BE} \to e^x$

BIZONYÍTÁS:

1. FOKOZAT:

$I_{BE} = I_{VISSZA}$

$\frac{U_{BE}}{R} = I_S e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}$ $U_{BE} = U_{KI} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_{KI} m$

EBBŐL $U_{KI_1} = \frac{U_T}{m} \ln \frac{U_{BE}}{R \cdot I_S} = U_T \ln \left(\frac{U_{BE}}{R \cdot I_S}\right)^{\frac{1}{m}}$

$U_{KI2} = R \cdot I_S \cdot e^{-\frac{U_{BE2}}{U_T}}$

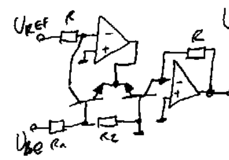
ÖSSZEGÜL: $U_{KI} = R \cdot I_S e^{-\frac{U_T \ln\left(\frac{U_{BE}}{R \cdot I_S}\right)^{\frac{1}{m}}}{U_T}}$ $e^{\ln x} = x$

$U_{KI} = \frac{U_{BE}^{1/m}}{(R \cdot I_S)^{\frac{1}{m} - 1}}$

HŐKOMPENZÁCIÓ

A KARAKTERISZTIKA (BJT) HŐM. FÜGGŐ

1. EXP:



$U_{KI} = U_{REF} \cdot 10^{-\frac{U_{BE}}{K}}$

AHOL $K = \frac{U_T}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \lg e}$

$U_{BE} = 0$ -nál kapjuk $U_{KI} = U_{REF}$

a meredekséget K-val állítjuk

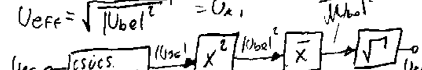
A HŐKOMP:

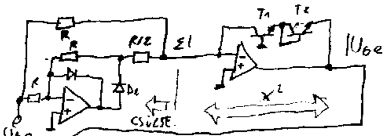
$\alpha\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = -\alpha U_T$ ~~állítani~~ kell beállítani. Ez akkor lehet, ha R_1-NTC

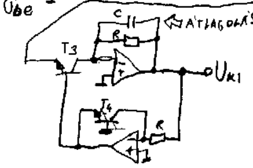
VALÓDI EFFEKTÍVÉRTÉK MÉRŐ

(TRUE RMS CONV)

$U_{EFF} = \sqrt{\overline{|U_{BE}|^2}} = U_{KI}$

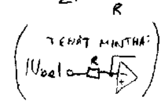






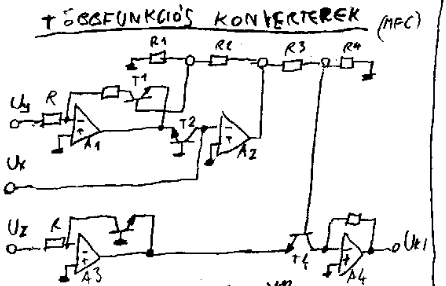
$\Sigma I = \frac{|U_{BE}|}{R}$

(TEHÁT MINTHA:

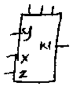


)

TÖBBFUNKCIÓS KONVERTEREK (MFC)



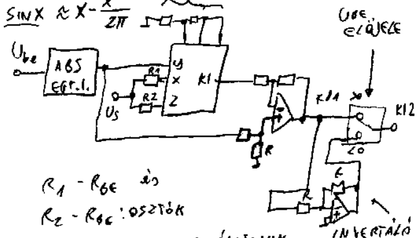
$$U_{ki}=U_Z\left(\frac{U_y}{U_x}\right)^m$$



$$m=m_1\cdot m_2=\frac{R_1+R_2}{R_1}\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

ALKALMAZÁSOK:

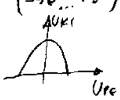
$\sin X \approx X-\frac{X^{2,827}}{2\pi}$ $m=2,827$ (0..90°ig)

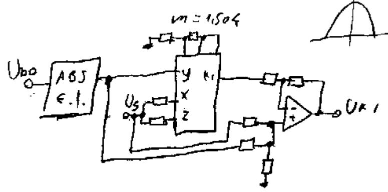


R_1-R_{6E} és
R_2-R_{6E}: osztók

Ezzel U_x, U_Z-t beállítjuk.

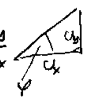
$\cos X \approx 1+0,2325X-\frac{X^{1,504}}{1,445}$ (-90°...+90°)

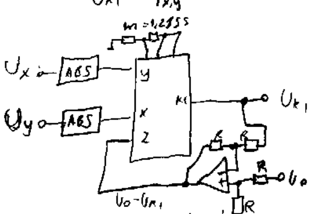




$\mathrm{ARCTG}\,X \approx \frac{X^{1,2125}}{1+X^{1,2125}}$; $X=\frac{U_y}{U_x}$

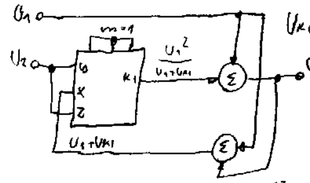
$=U_{ki}\sim\varphi_{x,y}$





$$U_{ki}=(U_0-U_{ki})\left(\frac{U_y}{U_x}\right)^{1,2125}$$

VEKTORÖSSZEGZŐ



$U_{ki}=\sqrt{U_1^2+U_2^2}$

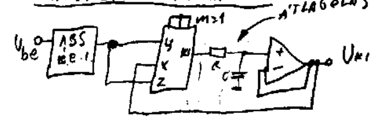
$U_{ki}=U_1+U_2\frac{U_2}{U_1+U_{ki}}=\frac{U_2^2}{U_1+U_{ki}}+U_1$

$U_{ki}(U_1+U_{ki})=U_2^2+U_1(U_1+U_{ki})$

$U_{ki}^2+U_1U_{ki}=U_2^2+U_1^2+U_1U_{ki}$

$U_{ki}=\sqrt{U_2^2+U_1^2}$

VALÓDI EFFEKTÍVÉRTÉK-MÉRŐ



TFK kimenetén:

$$U_{ki1}=|U_{be}|\cdot\frac{|U_{be}|}{U_{ki}}=\frac{|U_{be}|^2}{U_{ki}}$$

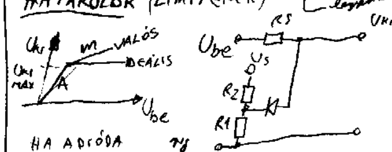
$$U_{ki}=\frac{\overline{|U_{be}|^2}}{U_{ki}}\Rightarrow U_{ki}^2=\overline{|U_{be}|^2}$$

$$U_{ki}=\sqrt{\overline{|U_{be}|^2}}$$

ABS. ÉRT. ~~EGCI.~~ NEM IS KELL $U_{ki}=\sqrt{\overline{U_{be}^2}}$

TÖRTVONALAS ÁRAMKÖRÖK

HATÁROLÓK (LIMITEREK) $\boxed{m<1 \text{ legyen}}$

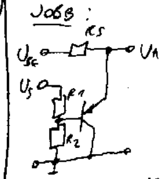


HA A DIÓDA VEZET: r_d

$$\Delta U_{ki}=\Delta U_{be}\frac{r_d+R_1\times R_2}{R_S+r_d+R_1\times R_2}=\Delta U_{be}\cdot m$$

ΔU - az U_{max} feletti rész
ΔU_{ki} az itt hiba.

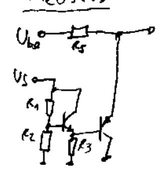
JOBB:



$$\Delta U_{ki}=\Delta U_{be}\cdot m\;\;\frac{r_E+\frac{R_1\times R_2}{\beta}}{}=\Delta U_{be}\cdot\frac{r_E+\frac{R_1\times R_2}{\beta}}{r_E+R_S+\frac{R_1\times R_2}{\beta}}$$

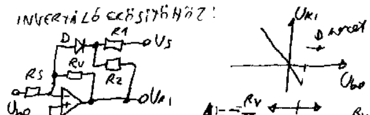
itt az m már jóval kisebb!

MÉG JOBB



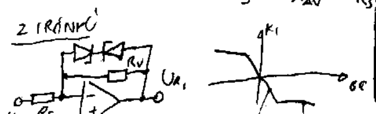
$$\Delta U_{ki}=\Delta U_{be}\cdot m=\Delta U_{be}\cdot\frac{A}{R_S+A}$$

Ezek csak a oldalasak ez is:
invertáló erősítőhöz:



$A_U=-\frac{R_V}{R_3}$ $A_U=-\frac{R_V\times R_3}{R_S}$

2 IRÁNYÚ

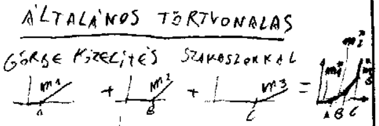


$-\frac{R_V}{R_S}$ $-\frac{R_V\times(r_d+R_Z)}{R_S}$

A határ felett R_V csökken, de ezzel H-nő → negatívan kompenzálni kell → kisebb a határfrekvencia

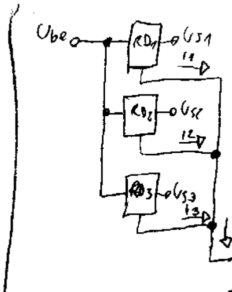
ÁLTALÁNOS TÖRTVONALAS

Görbe közelítés szakaszokkal



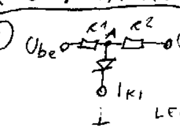
$m_1^*=m_1$ $m_2^*=m_1+m_2$
$m_3^*=m_1+m_2+m_3$

MEGVALÓSÍTÁS: RD ÁRAMKÖRÖKKEL

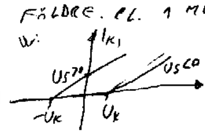


$U_{ki}=-R\cdot\Sigma I$
(TRANSZIMP. AMP.)

RED-ÁRAMKÖRÖK $I_{ki}=f(U_{be},U_S)$

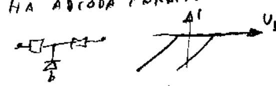
① 

AKKOR MŰKÖDIK, HA A KIMENETET LEHÚZZUK VIRTUÁLIS FÖLDRE. Pl. 1 MŰV. ERŐSÍTŐ BEMENETE

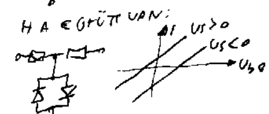


$U_k=-\frac{R_1}{R_2}U_S=U_{beo}$ $W=\frac{\Delta I_{ki}}{\Delta U_{be}}=\frac{1}{R_1}$

HA A DIÓDA FORDÍTVA VAN:



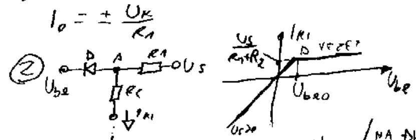
HA EGYÜTT VAN:



HA A DIÓDÁT FORDÍTOM → A GÖRBE A TÖRÉSPONTTÓL A MÁSIK IRÁNYBAN FERDE

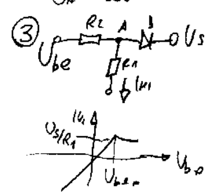
$\boxed{\Delta I_{ki}=\frac{\Delta U_{bo}}{R_1}}$ $I_{ki}=\frac{\Delta U_{be}}{R_1}+I_0$ $U_4=0$ ($U_4=0,6V$)

$I_0=\pm\frac{U_K}{R_1}$

② 

$\boxed{U_{beo}=U_S\frac{R_2}{R_1+R_2}}$ $I_{ki}=\frac{U_{be}}{R_2}$ (HA D1 ANYAG)

$U_A=U_{beo}$ HA D NEM VEZET

③ 

$U_A=U_{be}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}\le U_S$

$\boxed{U_{beo}=U_S\frac{R_1+R_2}{R_1}}$

$I_{ki}=\frac{U_{be}}{R_2}$

$\boxed{U_{beo}\text{ - TÖRÉSPONT}}$

AZ ÁRAM. ÉRTÉKÉVEL NEM KELL SZÁMOLNI, HANEM HELYETTES ELLENÁLLÁS:

① U_{be} — HA A DIÓDA VEZET, EGYÉBKÉNT $I_{ki}=0\Rightarrow R=\infty$; D VEZET, HA $U_{be}\ge U_{beo}$

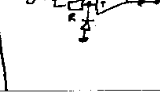
② U_{be} — HA A DIÓDA VEZET $R=R_1+R_2$, EGYÉBKÉNT $I_{ki}=U_S/R_1+R_2$; D VEZET, HA $U_{be}\ge U_{beo}$

③ U_{be} — HA A DIÓDA VEZET $R=R_1$, EGYÉBKÉNT $I_{ki}=U_S/R_1$; D VEZET, HA $U_{be}\ge U_{beo}$

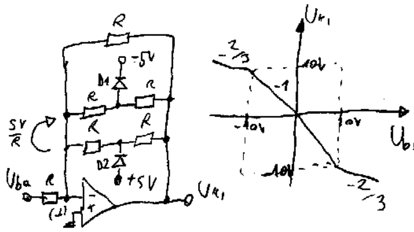
	①	②	③
D VEZ.	R_1	R_2	R_2
D NEM VEZ.	∞	R_1+R_2	R_1

ALKALMAZÁSOK

TÖRÉSPONTOKAT KELL SZÁMOLNI, MAJD AZ OK KÖZÖTT A DIÓDÁKAT VEZETÉKKEL VAGY SZAKADÁSSAL HELYETTESÍTENI.



$U_{ki}=|U_{be}|$



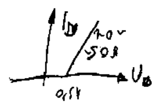
HA D_1, D_2 NYITVA ⇒ $A_U = -1$

HA D_1 ZÁR D_2 NYIT:

$$A_U = -\frac{2R \times R}{R} = -\frac{2}{3}$$

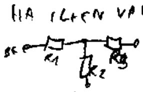
HA D_2 ZÁR D_1 NYIT: FORDÍTVA

HA A DIÓDA VALÓDI:



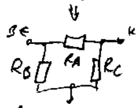
Ekkor van küszöbfeszültség, helyett r_d-t helyettesítünk. AZ R-D ÁRAMKÖR kimeneti ellenállásához HOZZÁADÓDHAT

HA ILYEN VAN



AKKOR CSILLAGDELTA ÁTALAKÍTÁS KELL: (Y→Δ)

⇓



$$R_A = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 \times R_2 \times R_3}$$

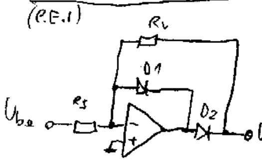
$$\left(R_B = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 \times R_2 \times R_3} \qquad R_C = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 \times R_2 \times R_3} \right)$$

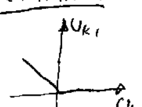
EZ AKKOR NAGYON JÓ, HA A VISSZACSATOLÓ ÁGBAN VAN DIÓDA, EKKOR A Δ KAPCSOLÁSBÓL EZ AZ ELHAGYHATÓ!

R - ELHAGYHATÓ, HA:
- MŰV. ERŐSÍTŐ KIM.-TEL PÁRHUZAMOSAN VAN
- 2 AZONOS POTENCIÁLÚ PONT KÖZÖTT VAN. PL FÖLD ÉS VIRTUÁLIS FÖLD

PRECÍZIÓS EGYENIRÁNYÍTÓ

(P.E.I.)

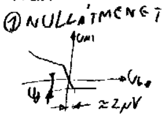




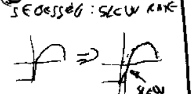
HA A 2 DIÓDA FORDÍTOTT:

HIBÁK:

① NULLÁTMENET:



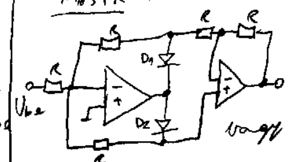
② EMELKEDÉSI SEBESSÉG: SLEW RATE



EZ MÁR NV-OKNÁL NYIT.

ABSZOLÚTÉRTÉK EGYENIRÁNYÍTÓK

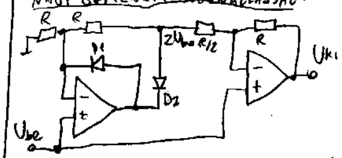
MÁSIK:



$A_U = -1$

vagy D_1, vagy D_2 vezet: az egyik vezetékre, a másik zárolódik. Az erősítések meghatározhatóak, $U_{be} > 0$ és $U_{be} < 0$-ról

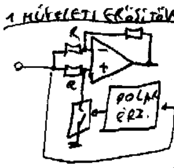
NAGY BEMENETI ELLENÁLLÁSSAL:



$U_{be} > 0$: D_1 VEZ, D_2 NEM VEZ, $U_{ki} = U_{be}$

$U_{be} < 0$: D_1 NEM VEZ, D_2 VEZ, cem invertáló $A_U = -1$

1 MŰVELETI ERŐSÍTŐVEL:

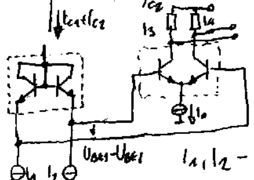


SZORZÓK

ÁRAMARÁNY-TÜKÖR:

$U_{be} = U_{BE1} + U_{BE2}$

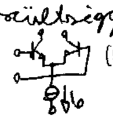
$$\frac{I_{c1}}{I_{c2}} = e^{\frac{U_{be}}{U_T}}$$



$$\frac{I_3}{I_4} = \frac{I_1}{I_2}$$

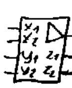
$$a = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

I_1, I_2-t a bemenő feszültséggel vezéreljük:



(DIFFERŐSÍTŐ) FESZVEZÉRELT ÁRAMOSZTÓ

A SZORZÓ:

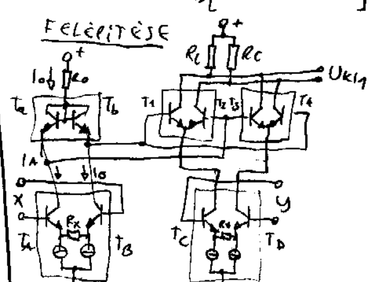


$$U_{ki} = A_{US}\left[K(x_1-x_2)(y_1-y_2)-(z_1-z_2)\right]$$

x, y, z: feszültségek

$$U_{ki} = A_{US}\left[K \cdot \Delta x \cdot \Delta y - \Delta z\right]$$

FELÉPÍTÉSE



$$U_{ki1} = (I_A + I_B)R_C - (I_2 - I_4)R_C$$

MŰKÖDÉS:

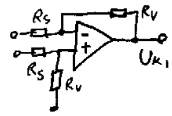
FESZVEZÉRELT ÁRAMOSZTÓ VEZÉREL ÁRAMVEZÉRELT FESZOSZTÓT: ÁRAMARÁNY TÜKÖR

A 4/4-ES KIEGYENLÍTETT

SZORZÓBAN A T_A, T_B VEZÉRLI A $T_1 T_2$-t és a $T_3 T_4$-et. Ez az X osztásra és Y osztására is igaz fesz → áramarány → fesz.

$$U_{ki1} = k_1 U_x U_y \qquad k_1 = -\frac{4R_C}{I_0 R_x R_y}$$

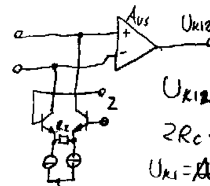
4/4-ES, MERT A SZINUSZJEL MIND A 4 NEGYEDÉRE MŰKÖDIK. ENNEK SZIMMETRIKUS A KIMENETE HOGY ASSZIMETRIKUS LEGYEN: DIFFERENCIÁLERŐSÍTŐ A KIMENETEN.



$$K_2 = -\frac{R_V}{R_S} \qquad K = K_1 K_2$$

$$U_{ki} = k_1 k_2 U_x U_y$$

HA VAN Z CSATORNA:



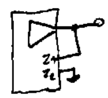
$$U_{ki2} = -\frac{U_Z}{R_Z} 2R_C A_{US}$$

$2R_C = R_Z$ esetén

$$U_{ki} = A_{US}(K\,\Delta x \cdot \Delta y - \Delta Z)$$

ALAPEGYENLET: $\boxed{\Delta Z = K \cdot \Delta X \cdot \Delta Y}$

HA A Z-T NEM HASZNÁLJUK:



$$U_{ki2} = K \cdot U_x U_y$$

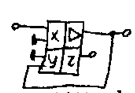
U_{ki} kiszámítható, ha van visszavezetés, is U_{ki} kimenetnél $U_{ki} = f(U_{be}, U_x, U_y)$ PL ha y-ra kötjük, akkor $Z = KXY \Rightarrow Z = KX \cdot U_{ki}$

ALKALMAZÁSOK:

SZORZÁS:

$U_{ki} = K \cdot X \cdot Y$

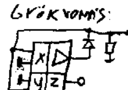
OSZTÁS:



$$U_{ki} = \frac{Z}{K \cdot X}$$

$Z = KXY \Rightarrow Z = KX \cdot U_{ki}$

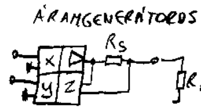
GYÖKVONÁS:



$$U_{ki} = \sqrt{-10Z}$$

$Z < 0$ legyen! de ha a dióda fordított, akkor $Z > 0$

ÁRAMGENERÁTOROS KIMENET:



$$I_{ki} = \frac{KXY}{R_S}$$

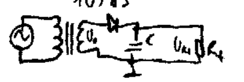
HIBÁK:

1. OFFSZETHIBA: $x = y = 0$ -nál $U_{ki} \neq 0$. OFFSZETPOTMÉTEREKKEL NULLÁZZÁK.
2. ERŐSÍTÉSHIBA [redacted] 0,1% ... 1%. A SKÁLATÉNYEZŐ HIBÁJA.
3. LINEARITÁSI HIBA: HA x = áll, és y-t állítjuk, U_{ki} nem lineárisan változik. 0,01% ... 1%

E: eredő hiba: 0,2 ... 2%

CSÚCSEGYENIRÁNYÍTÓK

1UTAS



2ϑ-folyási szög

BRUMM: ΔU $b=\Delta U/U_{ki}$

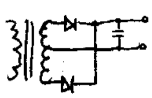
$\vartheta=\sqrt{2\cdot b}$

$$b=\frac{\Delta U}{U_{ki}}=2{,}3\cdot\left(\frac{r_d}{R_t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$I_{D_{max}}=3{,}5\cdot\frac{U_{ki}}{R_t}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}$$ ÁRAM IGÉNYBEVÉTEL

$$U_{D_{max}}\approx 2U_0 \qquad C\geq\frac{1\cdot\frac{2\pi}{n}}{f\,\Delta U_{kívánt}}$$

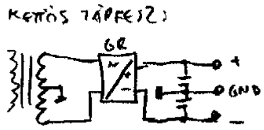
2UTAS E.I.



n-UTAS: $b=2{,}3\left(\frac{r_d}{nR_t}\right)^{\frac{2}{3}}$

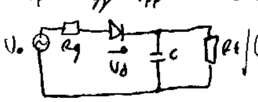
GRÄTZ HIDAS E.I.

KETTŐS TÁPFESZ.:



MÉRŐEGYENIRÁNYÍTÓK

U_t vagy U_{pp} mérésre.

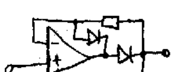


$$U_{ki}=\frac{U_0-U_D}{1+b}$$

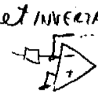
$R_t C \ggg \frac{1}{f}$

PRECÍZIÓS E.I.: $b=2{,}3\left(\frac{r+r_g}{R_t}\right)^{\frac{2}{3}}$

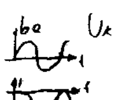
AKTÍV MÉRŐ E.I.:



lehet INVERTÁLÓ is.

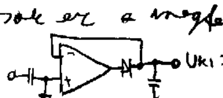


PÁRHUZAMOS: $U_{ki}=\frac{R_2}{R_1}\hat{U}_0$



$U_{ki}=2U_0-U_{pp}$

EZEK KAPACITÍVAN LEVÁLASZTOTTAK, AZ I_k, nem folyik át a generátoron, ezért csak ez a megfelelő.



$U_{ki}=\hat{U}_{be}-U_d$

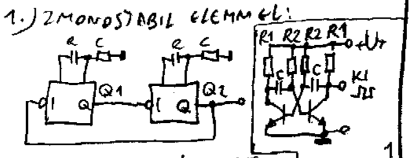
4SZÖGJEL-GENERÁTOROK

folyamatosan állapotot vált, azaz ASTABIL MULTIVIBRÁTOR.

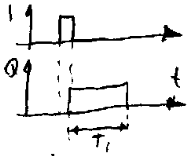
FAJTÁI:

- 2 MONOSTABIL ELEMBŐL ÁLL
- KÉSLELTETVE VISSZACSATOLT INVERTER
- RC-taggal VISSZACSATOLT SCHMITT-TRIGGER

1.) 2 MONOSTABIL ELEMMEL:

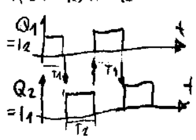


A MONOSTABIL ÁRAMKÖR: $R_A C\approx\tau=\frac{1}{2f}$



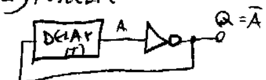
1-VEZÉRLŐJEL LEFUTÓ ÉLÉRE INDUL AZ IDŐZÍTÉS.

AZ ÁRAMKÖR:



BEKAPCSOLÁSKOR INDÍTANI KELL, KÜLÖNBEN NEM REZEG! 1 LEFUTÓ ÉL KELL!

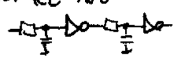
2.) KÉSLELTETVE VISSZACSATOLT INV.:



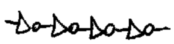
T idő múlva Q az A-ra kerül, tehát A=Q lesz de az inverter, mivel inverter, invertál, $\bar{A}=\bar{Q}$-at lesz a kimeneten

$Q \ldots \bar{Q} \ldots Q \ldots \bar{Q}$

- a késleltetés:
- TL 1μs: KÉSLELTETŐ MŰVONAL
- TL 100nS: VEZETÉK
- SOK RC TAG



- KAPUKÉSLELTETÉSSEL

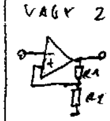


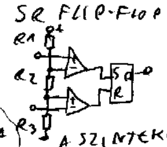
3. SCHMITT TRIGGERES:

A SCHMITT.T.: KOMPARÁTOR, DE KÉT KOMPARÁLÁSI SZINTTEL: EGYIK NÖVEKVŐ ÉLRE, A MÁSIK CSÖKKENŐRE.

MÁSNÉVEN HISZTERÉZISES KOMPARÁTOR.

MEGVALÓSÍTÁS: ⊕ VISSZACSATOLÁS, VAGY 2 KOMP + SR FLIP-FLOP

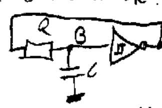


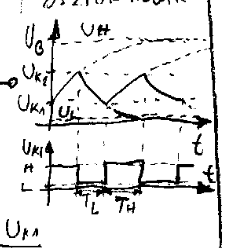


A KIMENET LEOSZTVA HOZZÁADÓDIK A K. SZINTHEZ

A SZINTEKET AZ $R_1R_2R_3$ OSZTÓK ADJÁK

A GENERÁTOR:

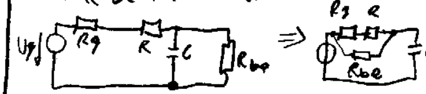




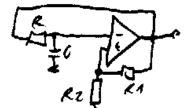
$$T_L=RC\ln\frac{U_{K2}-U_L}{U_{K1}-U_L}$$

$$T_H=R\cdot C\cdot\ln\frac{U_H-U_{K1}}{U_H-U_{K2}}$$

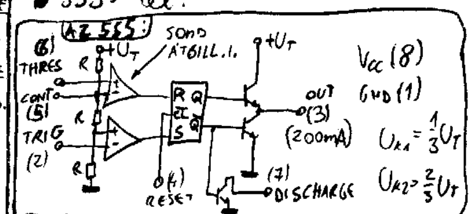
HA R BE NEM NAGY:



- TTL: $R_g\approx 300\Omega$ CMOS: $1k\Omega..1M\Omega$
- HULLÁMFORMAGENERÁTORRAL

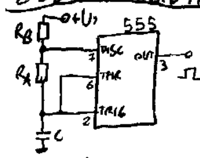


- 555-tel:



$U_{K1}=\frac{1}{3}U_T$ $U_{K2}=\frac{2}{3}U_T$

AZ 555 ASTABIL MÓDJA:



EGYÉB LÁBAK: CONTROL VOLTAGE (5) 10nF

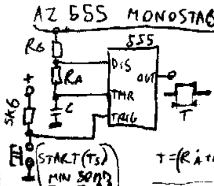
RESET(4): $+U_T$-re.

MŰKÖDÉSE:

C töltődni kezd R_A+R_B-n keresztül, eléri U_{K2}-t, ekkor a DISCHARGE-láb kisüti a kondit R_A-n keresztül, amíg el nem éri U_{K1}-et, ekkor DISCH. megszűnik, újra töltődik. kisütéskor a tápot plusz árammal $I=U_T/R_B$-vel terheljük $R_B\ll R_A$ - hogy $T_L\approx T_H$ lehessen. $T_L=C\cdot R_B\cdot\ln 2$, [redacted]

$T_H=C\cdot(R_A+R_B)\cdot\ln 2$ $T=T_L+T_H=\frac{1}{f}$

AZ 555 MONOSTABIL (IDŐZÍTŐ) MÓDBAN

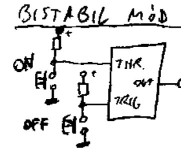


START: discharge elengedi, kimenet 1-re vált, töltődni kezd a kondi.

$T=(R_A+R_0)C\cdot\ln 2$ Ha U_{K2}-t eléri, DISCH bekapcs. és a kimenet 0-ra vált. DISC=ON.

START(T_S) MIN 50nS $T_S<T$!!

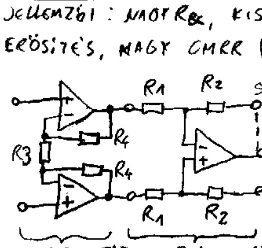
BISTABIL MÓD (BIST. MULTIVIBRÁTOR)

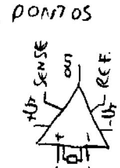


[redacted]

MÉRŐERŐSÍTŐK

JELLEMZŐI: NAGY R_{be}, KIS R_{ki}, PONTOS ERŐSÍTÉS, NAGY CMRR (E_k)





AZ 1. FOKOZAT A NAGY BEMENŐ ELLENÁLLÁS MIATT KELL. ANÉLKÜL $R_{be}=2\cdot R_1$,

és $R_{BEközm.} = 0{,}5(R_1+R_2)$ LENNE.
AZ 1. FOKOZAT SZIMMETRIKUS IN/OUT.

$A_{U_{szim1}} = 1 + \frac{2 \cdot R_4}{R_3}$,

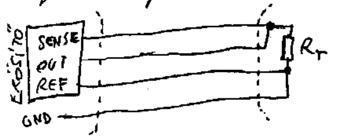
A KÖZÖS MÓDÚ FESZERŐSÍTÉS $= 1 = A_{UK}$

A 2. FOKOZAT: $A_{U_{szim2}} = -\frac{R_2}{R_1}$ $A_{UK2} = 0$

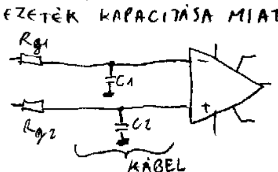
CMRR $= \varepsilon_K = \infty$ (ideális eset)

$R_{be} = \infty$

–TÁVOLI TERHELÉS:
a vezeték lerontja a fesz-t, így hibát okoz. (ERŐSÍTÉS)
Ekkor használható a TÁVOLI ÉRZÉKELÉS: az (OUT–SENSE) kimenetet a kábel másik végén kötjük össze:



–TÁVOLI FORRÁS
CMRR $= \varepsilon_K$ ROMOLHAT A VEZETÉK KAPACITÁSA MIATT.



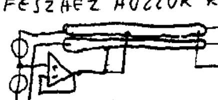
A KÖZÖSMÓDÚ ZAVARJELBŐL SZIMMETRIKUS ZAJ SZŰRŐDHET BE.

$$Z = U_{K.M.} \cdot \left[\frac{1}{1+sR_{g1}C_1} - \frac{1}{1+sR_{g2}C_2}\right]$$

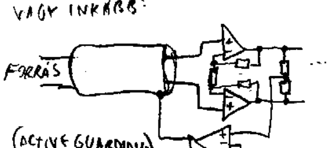
$$\approx U_{K.M.} \cdot s(\tau_2 - \tau_1)$$

$$CMRR = \left|\frac{U_{BEKM}}{U_{BE\,szim\,(BEszűrődő)}}\right| = \frac{1}{\omega(\tau_2-\tau_1)}$$

MEGSZÜNTETÉSE A HATÁSNAK:
AZ ÁRNYÉKOLÁST A KÖZÖS BEM. FESZHEZ HÚZZUK KÖVETŐERŐS.-VEL



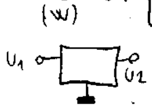
VAGY INKÁBB:



– A SZIMMETRIKUS ERŐSÍTÉST AZ 1. FOKOZATRA CÉLSZERŰ BÍZNI.

EGYENFESZÜLTSÉGFORRÁSOK

- REFERENCIAFORRÁS (mW, mA)
  - ELEMI ZENERES
  - PRECIZIÓS
- TÁPEGYSÉGEK (W)
  - FOLYTONOS ÜZEMŰ
  - KAPCSOLÓ ÜZEMŰ



– TULAJDONSÁGOK:

● FESZÜLTSÉGSTABILIZÁLÁSI JÓSÁG
$Q_F = \frac{\Delta U_1/U_1}{\Delta U_2/U_2}$ HA I_2, T = áll.

● HŐMÉRSÉKLETI EGYÜTTHATÓ:
$\alpha_{U_T} = \frac{\Delta U_2/U_2}{\Delta T}$ I_1, I_2 = áll.

● LINE REGULATION: (FESZ. STAB. T.)
$L.R. = \frac{(\Delta U_2/U_2)\cdot 100\%}{\Delta U_1}$

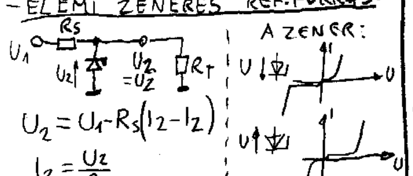
● LOAD REGULATION (TERHELÉSSZAB.)
$LO.R. = \frac{(\Delta U_2/U_2)\cdot 100\%}{\Delta I_2}$

● RIPPLE REJECTION (BRUMM ELNYOMÁS)
$R.R. = \frac{U_{1PP}/U_{1DC}}{U_{2PP}/U_{2DC}}$

● HATÁSFOK:
$\eta = \frac{P_{KI}}{P_{BE}} \cdot 100\%$ ΔP – a TÁPON DISSZIP.

● KIMENETI ELLENÁLLÁS:
$R_{KI} = \frac{\Delta U_2}{\Delta I_2}$ U_1, T = áll

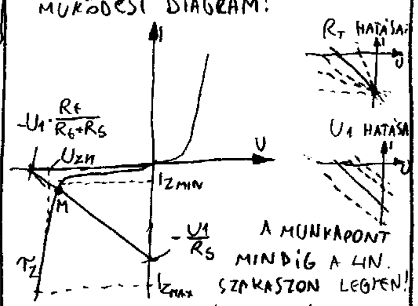
– ELEMI ZENERES REF. FORRÁS:



$U_2 = U_1 - R_S(I_2 - I_Z)$

$I_2 = \frac{U_2}{R_T}$

MŰKÖDÉSI DIAGRAM:

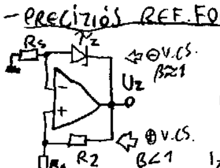


$I_{R_{Smax}} = I_{2max} + I_{Zmin}$ = áll. | $R_S \le \frac{U_1 - U_2}{I_{2max} + I_{Zmin}}$

$Q_F = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{R_S}{r_Z}$ $R_{KI} \approx r_Z$ ($n \times 10\Omega$)

$I_{Zmax} > I_{R_{Smax}}$

–PRECIZIÓS REF. FORRÁS

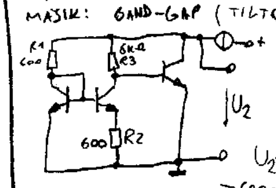


⊕V.CS. $\beta \approx 1$ $\beta > 1 \Rightarrow$ STABIL

$U_2 = U_Z \frac{R_1+R_2}{R_2}$

⊖V.CS. $\beta < 1$ I_Z = áll $\Rightarrow U_Z$ = áll

MÁSIK: BAND-GAP (TILTOTT SÁVOS)

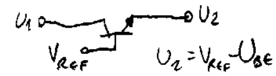


A CÉL: HŐMÉRSÉKLET-FÜGGETLENSÉG (TI LM185)

$U_2 \approx 1{,}2V$
$= 600mV + \frac{U_T \ln \frac{R_3}{R_1}}{600\Omega}$

2 HŐMÉRSÉKLETI TÉNYEZŐ KIEJTI EGYMÁST.

–SOROS ÁTERESZTŐTRANZISZTOROS TÁPE.



$U_2 = V_{REF} - U_{BE}$

PL ZENERES.
A BÁZISÁRAM HAT A ZENERRE

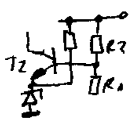
RÉSZEI:
- V_{REF} ELŐÁLLÍTÓ
- HIBAJEL ERŐSÍTŐ
- TELJESÍTMÉNY ÁRAMKÖR
- VÉDŐ ÁRAMKÖR

MÁSKÉPP:
- A KIMENETET LEOSZTJUK,
- AZT HASONLÍTJUK A (LEOSZTOTT) V_{REF}-FEL
- AZ ÖSSZEHASONLÍTÓ VEZÉRLI A TRANZISZTOR ÁRAMÁT. (AMÍG EGYENSÚLY LESZ)

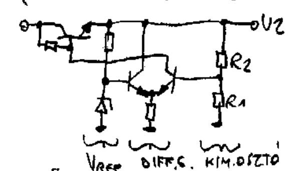
ez így R_1-R_2-VEL SZABÁLYOZHATÓ

MEGOLDÁSOK:
● SIMA TRANZISZTOROS:
(H.E – HIBAJEL ERŐSÍTŐ)

$U_2 = \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)(U_Z + U_{BE2})$

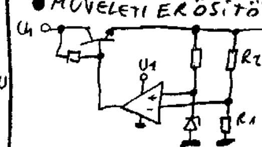


●(SZIMMETRIKUS) DIFFERŐSÍTŐVEL:



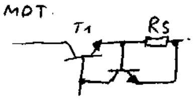
$U_2 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)U_Z = \frac{R_2+R_1}{R_2}U_Z$

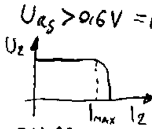
● MŰVELETI ERŐSÍTŐVEL:



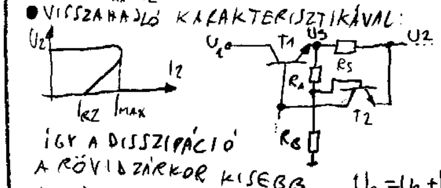
A MŰVELETI ERŐSÍTŐ U_1-RŐL MEGY, HOGY KI TUDJON ADNI ELÉG NAGY FESZÜLTSÉGET

TÚLÁRAMVÉDELEM:
● EGYSZERŰ:
SOROS ELLENÁLLÁSON ESŐ FESZÜLTSÉGGEL MÉRJÜK AZ ÁRAMOT.
TRANZISZTOR NYIT, HA
$U_{R_S} > 0{,}6V = R_S \cdot I_{MAX}$





● VISSZAHAJLÓ KARAKTERISZTIKÁVAL:



ÍGY A DISSZIPÁCIÓ A RÖVIDZÁRKOR KISEBB. $U_3 = U_2 + I_2 R_S$

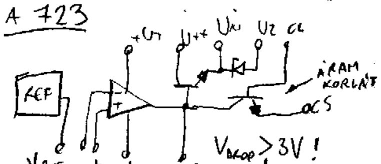
HATÁROL, HA:
$U_{BE_2} = 0{,}6V = I_2 \cdot R_S - \frac{R_A}{R_A+R_B}U_3$, $I_2 = I_{2MAX}$

HATÁROLÁS UTÁN:
$0{,}6V = I_{RZ} R_S \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R_A+R_B}\right)$

$U_2 = 0$. EBBŐL R_A, R_B-VEL LEHET $\frac{I_{RZ}}{I_{2MAX}}$ ARÁNYT BEÁLLÍTANI.

TÁP IC-K

A 723



V_{REF} -+ $-U_T$ COMP

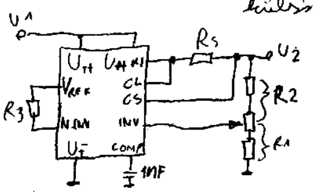
(7,15V) N.INV INV

$V_{DROP} > 3V$!

$R_{BE INV} \doteq R_{BE N.INV.}$!

ALKALMAZÁSOK:

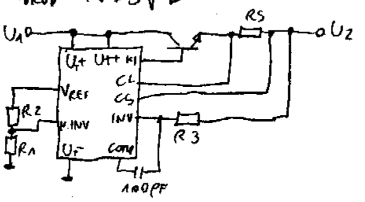
• 20±2V → 12V, 50mA → nem kell külső tranz.



$R_3 = R_1 \times R_2$ $U_T > V_{REF}$ → kimeneti osztó kell V_{REF} osztó nem.

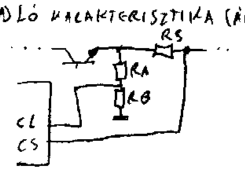
• 10±1V → 5V, 2A → EGYSZERŰ ÁRAMK. KÜLSŐ ÁT.E.T.

$V_{DROP} = 4V > 3V$



$U_2 < V_{REF} \Rightarrow V_{REF}$-et kell osztani

• VISSZAHAJLÓ KARAKTERISZTIKA (ÁR. K.)



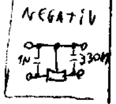
FIX STABILIZÁTOROK (78xx)

5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24 V $V_{DROP} > 3V$

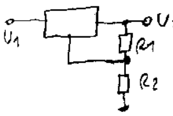
ALKALMAZÁSA:

330nF TANTÁL 100nF KERÁMIA

79xx: NEGATÍV



A FÖLDVEZETÉKEN MINIMÁLIS ÁRAM FOLYIK. ÍGY OSZTÓRA IS LEHET TENNI:

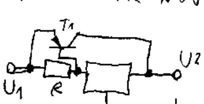


ÍGY U_2 NÖVELHETŐ

$U_{R1} = U_n$

$U_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1} \cdot U_n$

ÁRAMHATÁR NÖVELÉSE:



I_{MAX}-NÁL (I_n) $U_R = 0,6V$

I_{MAX} felett a T1 tranzisztor fokozatosan átveszi a terhelést $R = \frac{0,6V}{I_n}$

$\eta = \frac{U_2}{U_1} = \frac{P_1}{P_2}$

AZ IC TÚLÁRAMVÉDELME:

KIS U_{BE}-NÉL EGYSZERŰ TÚLÁRAMVÉDELEM, NAGY U_{BE}-NÉL VISSZAHAJLÓ.

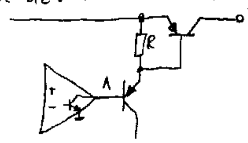
LDO:

LOW DROPOUT REGULATOR

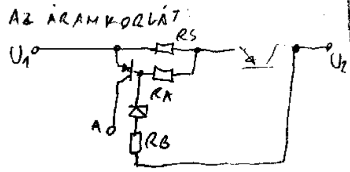
PNP-TRANZISZTOROK,

$U_{DROP} \approx 0,6V$ P-MOS-NÁL: 0,1V

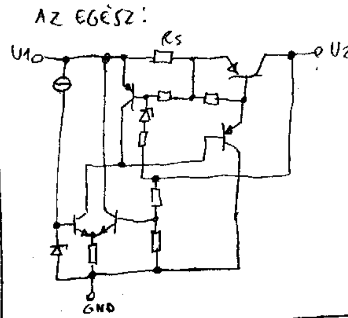
DE 0,2V-ra is lemehet.



AZ ÁRAMKORLÁT:



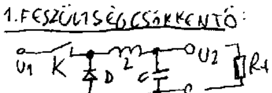
AZ EGÉSZ:



KAPCSOLÓÜZEMŰ STAB.

HATÁSFOK JOBB. A KAPCSOLÓN IDEÁLISAN I=0 VAGY U=0 → P=0

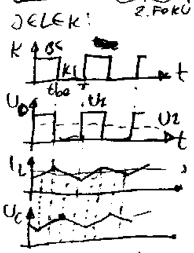
1. FESZÜLTSÉGCSÖKKENTŐ:



$U_2 \leq U_1$

2. FOKÚ ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐ

JELEK:



$D = \frac{t_{be}}{T}$ – KITÖLTÉSI TÉNYEZŐ

$U_2 = D \cdot U_1$

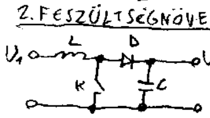
$\Delta I_L \approx 0,2\, I_{2MAX}$

ÁLTALÁBAN SZABÁLYOZÁS (D) NÉLKÜL $\Delta I_L < 2 \cdot I_{MIN}$ LEHET, ÉS

$\Delta I_L = \frac{U_{DROP} t_{be}}{L}$ $\Delta U_2 = \frac{\Delta I_L}{8fC}$

$L = \frac{U_{DROP} t_{be}}{\Delta I_L}$ $C = \frac{\Delta I_L}{8f\Delta U}$

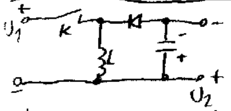
2. FESZÜLTSÉGNÖVELŐ



$U_2 = U_1 \cdot \frac{1}{1-D}$

$U_2 \geq U_1$

3. POLARITÁSFORDÍTÓ



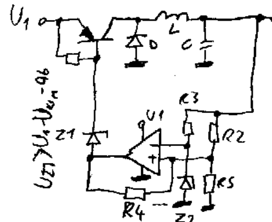
$|U_2| > |U_1|$ vagy $|U_2| < |U_1|$ is lehet

de polaritást fordít

$U_2 = \frac{-D}{1-D} U_1$

ÖNREZGŐ STABILIZÁTOR

A KIMENETI FESZT 2 ÉRTÉK KÖZÖTT TARTJUK. EZ ÁLLÁSOS SZABÁLYOZÁS. A HIBAJEL-ERŐSÍTŐ (HISZTERÉZISES KOMPARÁTOR. HA I_2 VÁLTOZIK, f-IS. LÉNYEG: ADDIG HAGYJUK NÖVEKEDNI U_2-t, AMÍG ELÉRJÜK U_{Z2}-t. UTÁNA A TERHELÉS CSÖKKENTI U_2-t U_{K1}-IG.



$U_2 = U_{Z2} \cdot \frac{R_2+R_5}{R_5}$

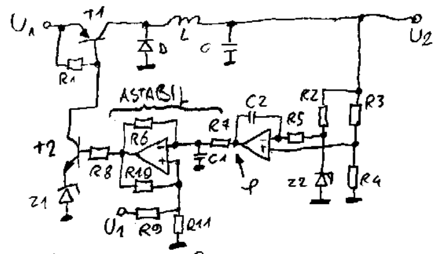
E KÖRÜL VÁLTOZIK.

$\Delta U_2 < \frac{R_2}{R_4} \cdot U_1$

$R_2 \times R_5 \ll R_4$ így $\Delta U_{ICBE} \leq \frac{R_2 \times R_5}{R_4 + R_2 \times R_5} \cdot U_1$

lesz a hiszterézis az IC bemenetén

PWM STABILIZÁTOR



$U_2 = U_{Z2} \cdot \frac{R_3+R_4}{R_4}$

ez azért kell, hogy U_{C1} változásaira polaritást tudjon fordítani a SCHMITT TRIGGER.

R1: ha I_2 nezet(?), akkor R_1-en esik akkora feszültség, hogy T_1 kinyisson

R6: HOGY periodikus legyen.

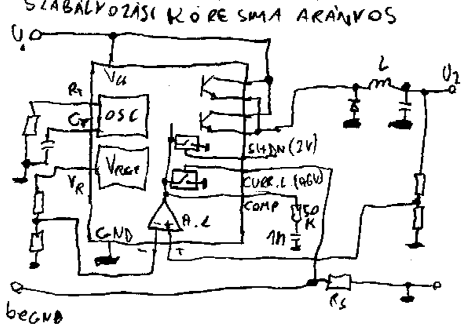
R6 kisüti, R7 tölti C_1-et

A hibajel-erősítő (integrátor) kimenete (ℓ) szabja meg t_{be}, t_{ki} értékeket. A H.E. pedig az ΔU_2-től függ, így függ: $U_2 - U_{Zn} \rightarrow t_{be}, D$

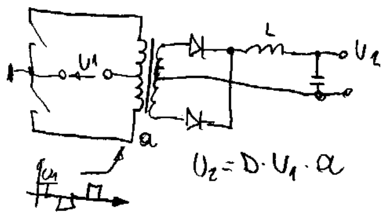
C_1-miatt integráló jellegű.

AZ SG1524

A KIMENETEN 2db TRANZISZTOR VAN. AZ IMPULZUSOKAT FELVÁLTVA ADJÁK KI. ÖSSZEKÖTVE ÉRDEMES HASZNÁLNI DE LEHET ELLENÜTEMŰKÉNT, VAGY FÉL-IMPULZUSSAL HASZNÁLNI. (D/2) SZABÁLYOZÁSI KÖRE SIMA ARÁNYOS



PUSH-PULL CONVERTER



$U_2 = D \cdot U_1 \cdot a$

AKTÍV SZŰRŐK

– KASZKÁD SZINTÉZIS

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{D_n(s)} = \frac{\prod^m (s-z_i)}{\prod^k (s-p_i)} \qquad m \le n$$

$$= k\underbrace{\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{(s-z_3)(s-z_4)}{(s-p_3)(s-p_4)}}_{B} \cdots$$

A SZŰRŐ ÁTVITELI FÜGGVÉNYE FELÍRHATÓ ÍGY. A VÉGÉN FELBONTHATÓ MAXIMUM MÁSODFOKÚ RÉSZEKRE. EZEK A SZŰRŐ-ALAPTAGOK. EZEKET KÜLÖN VALÓSÍTJUK +, ÉS EGYMÁS UTÁN KAPCSOLJUK (LÁNC), MÁSODRENDŰEK.

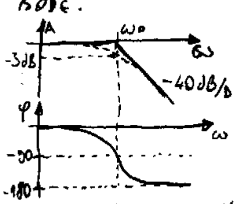
– AZ ALAPTAGOK:

● ALULÁTERESZTŐ: (LOW PASS FILTER)

$$F_A(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2} = \frac{1}{D(s)}$$

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2$$

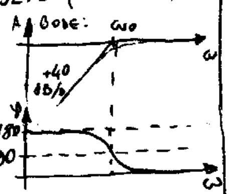
BODE:



● FELÜLÁTERESZTŐ (HIGH PASS)

$$F_F(s) = \frac{\frac{1}{\omega_0^2}s^2}{D(s)}$$

(2. FOKÚ)



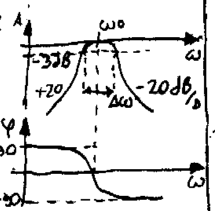
● SÁVÁTERESZTŐ:

$$F_S(s) = \frac{\frac{1}{Q\omega_0}s^2}{D(s)}$$

(BANDPASS)

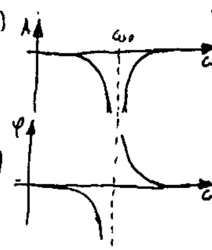
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

JÓSÁGI TÉNYEZŐ



● SÁVZÁRÓ (NOTCH) (BAND REJECT)

$$F_Z(s) = \frac{1 + \frac{1}{\omega_0^2}s^2}{D(s)}$$



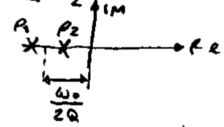
Q - JÓSÁGI TÉNYEZŐ
ω_0 - PÓLUS FREKV.
$\xi = \frac{1}{2Q}$: CSILLAPÍTÁSI T.

– MINDEGYIKNÉL A NEVEZŐ UGYANAZ.

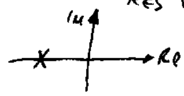
APÓLUSOK:

$$p_{12} = -\omega_0\left(\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}\right)$$

● HA $Q < \frac{1}{2}$ → 2 VALÓS GYÖK VAN



● HA $Q = \frac{1}{2}$ → (1db) KÉTSZERES VALÓS GYÖK

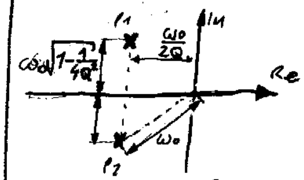


$Q \ge \frac{1}{2}$ KELL LEGYEN → X-PÓLUS O-ZÉRUS

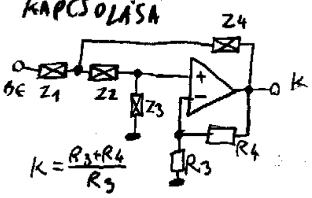
● HA $Q > \frac{1}{2}$ → KOMPLEX KONJUGÁLT GYÖKPÁR VAN. (ÁLTALÁBAN EZ)

EKKOR:

$$p_{12} = -\omega_0\left(\frac{1}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)$$



– AZ ALAPTAG (AKTÍV RC) KAPCSOLÁSA



ADOTT FELTÉTEL: $R_3 \ge R_4$ MEGADOM + K_1, K_2 VÁLASZTÁS

$$K = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$$

ERŐSÍTÉS

$$F(s) = K \cdot \frac{Y_1 Y_2}{Y_2 \cdot [Y_1 + Y_4(1-K)] + Y_3(Y_1 + Y_2 + Y_4)}$$

A KÉPLETBE ELLENÁLLÁS ESETÉN $Z_i \to Y_i$ -t kell $\left(\frac{1}{R}\right)$ helyettesíteni kondi esetén $C \to sC = Y \to Z = \frac{1}{sC}$

MI-MI?	Y_1	Y_2	Y_4	Y_3
ALULÁ.	R_1	R_2	C_1	C_2
FELÜLÁ.	C_1	C_2	R_1	R_2

$Z_i = 1/Y_i$

$Z = R$ VAGY $1/sC \Rightarrow Y = 1/R$ VAGY sC (C)

$K = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$

AZ R_i és sC_i R_3, R_4 értéket behelyettesítjük az $F(s, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, K)$ KÉPLETBE, MAJD ÖSSZEHASONLÍTJUK A MEGFELELŐ (LP, HP...) $F(s, \omega_0, Q)$ KÉPLETTEL, ÉS ω_0-t Q-t kapjuk $R_1 R_2, C_1 C_2, R_3 R_4$-gyel kifejezve. HA ω_0-t, Q-t (APPROX) tudjuk → R_i, C_i SZÁMÍTHATÓ.

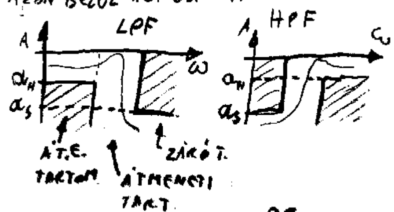
HA MÁS KELL NEM MEGY:

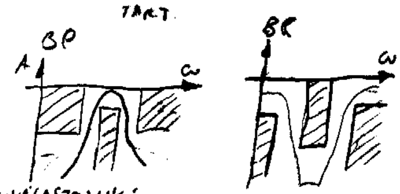
$R_1 = R_2$, ~~vagy~~ $R_1 + R_2 = R_2$

ω_0, Q AZ APPROXIMÁCIÓ ALAPJÁN.

– SZŰRŐTERVEZÉS

1.) SPECIFIKÁCIÓ, TOLERANCIASÉMÁKKAL: mit kell teljesíteni a szűrőnek.
AZON BELÜL AZT CSINÁL AMIT AKAR.





KIVÁLASZTJUK: a_S, a_H csillapításokat.

$\omega(a_S) = \omega_S \qquad \omega(a_H) = \omega_H$.

2.) ÁTALAKÍTÁS ($\omega \to \Omega$ $s \to S$)

ÁTTÉRÉS MÁS FREKVENCIÁRA: (TRANSZFORMÁCIÓ) $\Omega = f(\omega)$

ÚJ ÁTVITELI FÜGGVÉNY: (AMPL. K.)

$a(\Omega) = g(A(\omega)) = a(f(\omega))$

ALULÁT.E.: $\Omega = \frac{\omega}{\omega_H}$ FELÜLÁT.E.: $\Omega = -\frac{\omega_H}{\omega}$

SÁVSZŰRŐ:

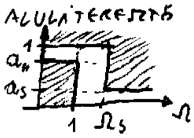
$$\Omega = \frac{\omega_K}{\Delta\omega_H}\left(\frac{\omega}{\omega_K} - \frac{\omega_K}{\omega}\right) = A(B - C)$$

SÁVZÁRÓ:

$$\Omega = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)^{-1}$$

$\omega_K = \sqrt{\omega_{HA}\,\omega_{HF}}$ $\quad \Delta\omega_H = \omega_{HF} - \omega_{HA}$

ÍGY MINDEN TÍPUSBÓL REFERENS ALULÁTERESZTŐ SZŰRŐT KAPUNK:



$\Omega_H \to 1$
$A = 0dB \to 1$

3.) APROXIMÁCIÓ (FÜGGV. ELŐÁLLÍTÁS)

Többféle van ezek az $a(\Omega)$ matematikai realizálásában különböznek, és (1 sávban többféle alakú függvény is passzolhat.) a görbealakban: simaság, linearitás, monotonitás.

KERESSÜK $a(S\Omega)$ VAGY $a(S)$ FÜGGVÉNYT.

JELLEMZŐ A BONYOLULTSÁG: n-PÓLUSSZÁM, FOKSZÁM, MAX MEREDEKSÉG (n·20dB/D).

$a_H \to \varepsilon_H \qquad a_S \to \varepsilon_S$ kerül.

$$\varepsilon_H = \sqrt{\frac{1}{a_H^2} - 1} \qquad \varepsilon_S = \sqrt{\frac{1}{a_S^2} - 1}$$

FAJTÁI:

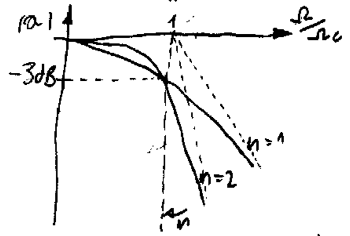
● BUTTERWORTH

max lapos, minél simább. $\Omega = 0$-nál a lehető legjobban simul az Ω tengelyhez

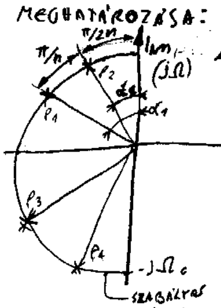
$$|a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}}$$

Ω_c - TÖRÉSPONT FREKV

$$n \geq \frac{\lg \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_H}}{\lg \frac{\Omega_s}{\Omega_H}} \qquad \Omega_c = \frac{\Omega_H}{\sqrt[n]{\varepsilon_H}}$$



EZUTÁN A PÓLUSOK (Ω) MEGHATÁROZÁSA: (PZMAP)



← HA n PÁROS

Ω_c SUGARÚ KÖR

A PÓLUSOK KOORDINÁTÁI: (Σ_i, Ω) KONJUGÁLT KOMPLEX PÓLUSPÁROK.

EZ MÁR GEOMETRIA

HA PÁRATLAN: A „PÁRATLANADIK" UTOLSÓ PÓLUS: $(-\Omega_c, 0)$ HELYEN

α_i - A PÓLUSOK SZÖGEI:

$\alpha_i = \frac{\pi}{2n}(n+1-2i)$ HA PÁROS FOKSZÁM,

$\alpha_i = \frac{\pi}{2n}(n+2-2i)$ HA PÁRATLAN.

A PÓLUSPÁROK ADATAI:

$\Omega_{0i} = \Omega_c$ → VAGY TÁBLÁZATBÓL

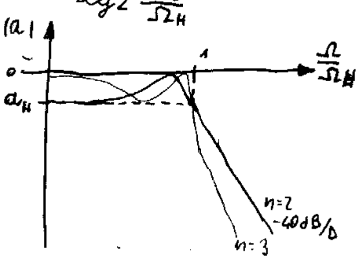
$Q_{Ri} = \frac{1}{2\sin\delta_i}$ → VAGY TÁBLÁZATBÓL

● CSEBISEV FÉLE

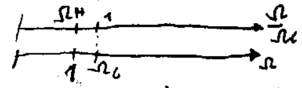
AZ ÁTERESZTŐTARTOMÁNYBAN INGADOZIK, MAJD HIRTELEN CSÖKKEN AZ ÁTVITEL. AZONOS FELTÉTELT KISEBB FOKSZÁMMAL IS TELJESITI, MINT A BUTTERWORTH.

$n = ?$

$$n \geq \frac{\lg 2\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_H}}{\lg 2\frac{\Omega_s}{\Omega_H}}$$



KOORDINÁTÁK:



A GÖRBÉN CSÚCSPONTOK: $n-1$ db van.

Ω_c ELŐTT FENT VAN AZ UTOLSÓ

Ω_H-NÁL $|a| = a_H$

Ω_c-NÉL $|a| = -3dB$

MEREDEKSÉGE: $n \cdot 20 dB/DEKÁD$

A PÓLUSOK:

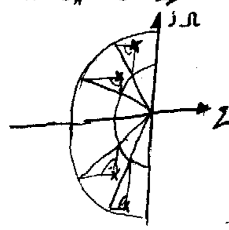
$$\Omega_{0pi} = \sqrt{\varepsilon_i^2 + \Omega_i^2}$$

$$Q_{Rpi} = \frac{\Omega_{0pi}}{-2\varepsilon_i}$$

$n/2$ PÓLUS VAN, HA n PÁROS, E.K.: $\frac{n+1}{2}$

A PÓLUSOK NEM KÖRÖN, HANEM ELLIPSZISEN VANNAK. EXCENTRICITÁS a_H-TÓL FÜGG.

HA $\varepsilon_H \to 0$ ⇒ SZŰRŐ → BUTTERWORTH-HOZ

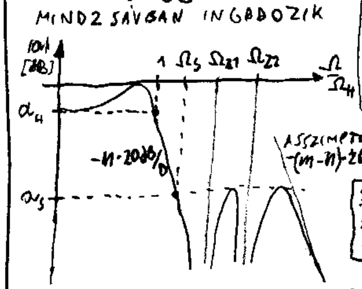


A SZÖGEKET UGYANÚGY LEHET SZÁMÍTANI, MINT AZ ELŐZŐNÉL.

● ELLIPTIKUS (CAUER)

A LEGKISEBB FOKSZÁMÚ MINDZ SÁVBAN INGADOZIK

$n \geq \frac{2}{\pi^2} \ln 4 \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_H} \ln \frac{8}{\sqrt{1-\frac{\Omega_H}{\Omega_s}}}$



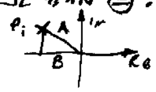
$m = n-2$ HA n PÁROS, $m = n-1$

ITT MÁR ZÉRUSOK IS VANNAK. EZEK A FÜGGŐLEGES ASSZIMPTÓTÁK. AZ ÁTERESZTŐ TARTOMÁNYBAN OLYAN, MINT A CSEBISEV.

GYÖKÖKET (z_i, p_i) TÁBLÁZATBÓL

4) PÓLUSOK VISSZATRANSZFORMÁLÁSA

- $\omega_{pi} = \omega_H \cdot \Omega_{pi} \cdot 2\pi$ PÓLUSFREKVENCIA
- MINDEN PÓLUSNAK VAN JÓSÁGI TÉNYEZŐJE, AMI ω-BAN ÉS Ω-BAN ⊜.



$$Q = \frac{A}{2B}$$

APROXIMÁCIÓ EREDMÉNYEI (Σ_i, Ω_i) PÓLUSOK, EZEKHEZ TÁBLÁZATBÓL (Ω_{pi}, Q_{pi}) MAJD EBBŐL ω_{pi}, Q_{pi}

ω_{pi} - 1 PÓLUS PÁRÉ, TEHÁT 1 PÓLUS PÁR → (2. FOKÚ) 1 ALAPTAG.

$\omega_{pi} = \omega_0$ I. ALAPTAGNÁL

$(\Omega_{pi} = 1$ LESZ $\to \omega_{pi} = \omega_H)$

A TÁBLÁZAT ADOTT $a_H = -3dB$-RE ADJA + AZ ADATOKAT. KÜLÖN VAN MINDEN APRÓK. FAJTÁHOZ.

5.) SZŰRŐÁRAMKÖR-MÉRETEZÉS (előbb leírva)

— OPTIMÁLIS ELRENDEZÉS:

A KÖZBÜLSŐ RÉSZEN NE LEGYEN TÚLVEZÉRLÉS:

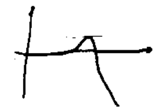
$U_{be} \cdot A_{u1} < U_{ZBEMAX}$ $(A_u \to A_{umax})$

$A_{u2} > U_{u1}$ LEGYEN!

— Q - JÓSÁGI TÉNYEZŐ:

HA $Q > \frac{1}{2}$, ÉS $Q > 1$:

KIEMELÉS VAN $\circ \pi. (Q_i > 1\ \omega_{0i}$ -n$)$



HA $Q > \frac{1}{2}$, DE $Q < 1$ → NEM.

EZ LEHET BUTTERWORTH-NÁL, CSEBISEV-NÉL... BÁRHOL: PÓLUSTULAJDONSÁG

— AZ AKTÍV RC SZŰRŐKET IC-BEN GYÁRTJÁK, ezekhez általában leírni tervezőszoftver, ami adja a kapcsolást is.

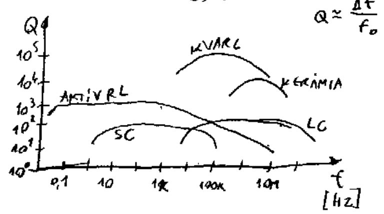
SZŰRŐK

– FAJTÁK — SZIMMETRIKUS (DIFFERENCIÁLIS)
— ASSZIM. (SINGLE ENDED)

- AKTÍV RC
- PASSZÍV RC
- PASSZÍV LC
- 1 ALKATRÉSZES PASSZÍV
- KAPCSOLT KAPACITÁS (SWITCHED CAP: SC)

Az approximáció után keletkező átviteli függvényt bármelyikkel meg lehet valósítani, bizonyos korlátok között:

$Q \approx \frac{\Delta f}{f_0}$

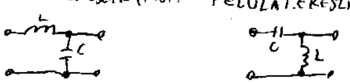


– PASSZÍV LC SZŰRŐK:
létra-kapcsolású. Minden kondi/tekercs 1-gyel növeli a fokszámot

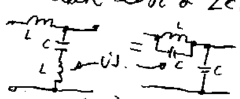
ELŐRE VEZETŐ ÁG
FÖLD FELÉ VEZ. ÁG

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- A pólusok a függőleges tengelyen lesznek ($Q_i = \infty$) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- Gyakran használt feltétel: $R_g = R_t$ legyen. $R_g = 0, R_t = \infty$ megvalósítása nehézkes lenne.
- ALULÁTERESZTŐ (TAG): FELÜLÁTERESZTŐ:

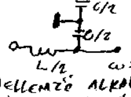


- HA ZÉRUSOK is kellenek: akkor az előre vezető ágat párhuzamos rezgőkörré kell alakítani. (vagy a föld felé v.t sorossá) A rezonanciafrekvencián lesz a ZÉRUSPÁR



(ALULÁTE.)

- PARAMÉTEREZÉS: Minden póluspár = 1 frekvencia = 1 elempár = 2 FOK.
Pólusokból frekvencia, abból elempár
- DIFFERENCIÁLIS JELEKRE!



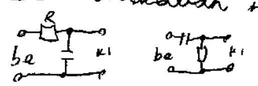
Nem duplán csillapít! (1 PÓL. PÁR) −40dB/DEKÁD

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- JELLEMZŐ ALKALMAZÁS: KAPCSOLÓ ÜZEMŰ TÁPOK/ERŐSÍTŐK, PWM DEMODULÁLÁS, DC mint leválasztás (KÖZÉPÉRTÉK)

– AKTÍV RC: korábban le van írva. (ELEKTRO)

– PASSZÍV RC legkisebb, legegyszerűbb, de nagy a veszteség. Ezért teljesítményelektronikában nem használják

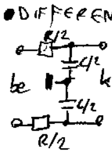


$\tau = RC$

$\omega = \frac{1}{RC}$

1 TAG = 1 elempár = 1 frekvencia = 1 PÓLUS

- DIFFERENCIÁLIS JELEKRE:



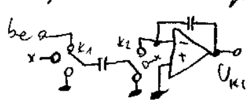
itt ~~se~~ duplán csillapít −20dB/DEKÁD

$\omega = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2 \cdot \frac{R}{2} \cdot 2 \cdot \frac{C}{2}}$

– KAPCSOLT KAPACITÁSÚ SZŰRŐK:
(SWITCHED CAPACITOR FILTER)

$f_{kapcs} \gg f_{be,max}$ kell legyen

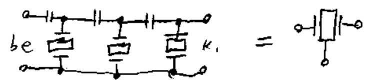
Lényeg kapcsolgatással lassított integrálású integrátor.



K1, K2 felváltva vezet, váltott irányban.

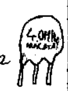
Ezt IC-kben valósítják meg.

– KVARCSZŰRŐK:
sáváteresztő, vagy sávzáró.
Sima rezgőkvarcokból is lehet ilyet: EBBEN IS EZ VAN

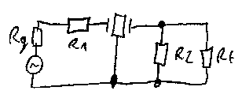


Nagyon kicsi a sávszélesség.
Az elve a PIEZOELEKTROMOSSÁG
Fix frekvenciákra gyártják.

– KERÁMIASZŰRŐK
kvarcszűrőhöz hasonló; de kicsit pontatlanabb, és nagyobb a sávszélesség.



HASZNÁLAT:

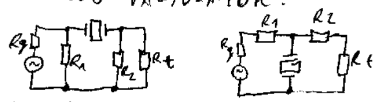


feltétel:

$R_g + R_1 = R_2 \times R_t$ = INPUT/OUTPUT IMPEDANCIA

(KERÁMIA REZONÁTOR: REZGŐKVARC-HOZ HASONLÓ)

2 PÓLUSÚ VÁLTOZATOK:

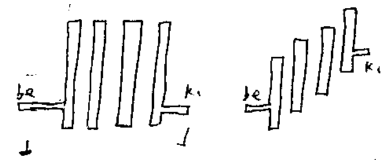


KIS (R_t) TERHELÉSKOR, (10Ω)

NAGY R_t, R_g-NÉL (50kΩ)

– MIKROHULLÁMÚ PCB SZŰRŐK
elosztott paraméterű rezonátorok. (MICROSTRIP)
Ezekben koncentrált tápvonalakat alkalmaznak (1GHz felett jellemző)
λ/4-nél rövidebb, rövidrezárt (üregű) tápvonalakkal helyettesítik az induktivitásokat.
FAJTÁI: FELÜLÁTERESZTŐK:

- FÉSŰS SZŰRŐ: LÉPCSŐS SZ.



KISEBB HELYET HASZNÁL A HAJTŰSZŰRŐ:

SÁVZÁRÓ:

EZEKET TOKOZVA IS GYÁRTJÁK: FELÜLETI HULLÁM-SZŰRŐK: SAW-FILTER

– ÁTVITELI FÜGGVÉNY AMPLITÚDÓ-MENETÉT INSERTION-LOSS-NAK HÍVJÁK ITT, ÉS MÁS CSILLAPÍTÓ JELLEGŰ 4PÓLUSOKNÁL IS [dB] ESETLEG ADOTT FREKVENCIÁN

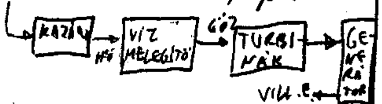
GROUP DELAY: A fáziskarakterisztika deriváltja: $t(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega)$
Ez az adott frekvenciájú jel időkésése.

– LC SZŰRŐK NAGYFREKVENCIÁS tulajdonságainak (Z_2, S_{11}, S_{21}) számításához MATHCAD-FÁJLOK vannak.

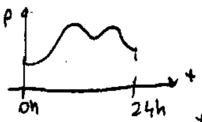
15. fejezet

Villamos energetika

- VILLAMOS ENERGIA:
felhasználás helyén tiszta, előállítás helyén nem.
- PRIMER energiahordozókból készül.
fosszilis tüzelőanyagok:

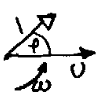


- FELHASZNÁLÁS:



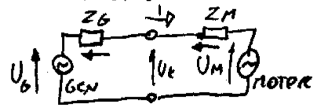
de a napok, és az évszakok is különbözőek.
becsülhető.
- tárolás: nagy mennyiségben nehézkes, esetleg a tározós erőművekben.
- az atomerőművek állandó teljesítménnyel mennek, a gázturbinás erőműveket ki/be kapcsolgatják. A csúcsok napok alatt állnak be.

- ELEKTROTECHNIKA: (1 FÁZISÚ)
$U = U_{eff}$, teljesítmény: S, impedancia: Z
$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t) = \sqrt{2}\cdot U\cdot\cos\omega t$
$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t - \varphi)$
$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\,Hz = 314\,\frac{rad}{s}$
- KOMPLEX FAZOROK:

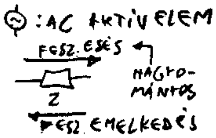


$\bar{U} = U_{eff}\, e^{j\omega t}$
$\bar{I} = I_{eff}\, e^{j(\omega t + \varphi)}$

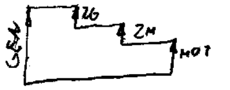
IDŐFÜGGVÉNY: a vízszintes tengelyre vett vetület:
$U(t) = \sqrt{2}\cdot Re\{\bar{U}\}$
- KOMPLEX OHM TÖRVÉNY:
$\bar{U} = \bar{Z}\cdot\bar{I}$
- $p(t) = u(t)\cdot i(t) =$
$= P(1 - \cos\omega t) + Q\sin(2\omega t)$
KOMPLEX TELJESÍTMÉNY:
$\bar{S} = P + jQ = \bar{U}\cdot\bar{I}^*$
$|\bar{S}|$ - LÁTSZÓLAGOS TELJESÍTMÉNY
$|\bar{S}| = S = U\cdot I$
- AZ 1 FÁZISÚ HÁLÓZAT ELEMEI:



⏀: AC AKTÍV ELEM

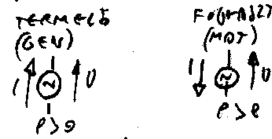


HUROKTÖRVÉNY A FESZÜLTSÉG-EMELKEDÉSEKRE:
$U_G - I\cdot Z_G - I\cdot Z_M - U_M = 0$



ÁRAM, ÉS FESZEMELKEDÉS ELLENTÉTES

$P > 0$ FOGYASZTÓNÁL / TERMELŐNÉL
(EDDIG TERMELŐNÉL $P < 0$ VOLT)



- FOGYASZTÓK:

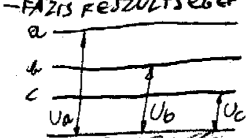
M	U, I	$S = U\cdot I^*$	Z
R	I → U	$S = I^2 R$, $Q = 0$, $P > 0$	R
L	I, U	$S = j\cdot Q$, $= jU^2/X_L$, $P = 0$, $Q > 0$	jX_L
C	I, U	$S = j\cdot Q$, $= -jU^2/X_C$, $P = 0$, $Q < 0$	$-jX_C$
SOROS RL	I, U	$S = P + j\cdot Q$, $P > 0$, $Q > 0$	$R + jX_L$

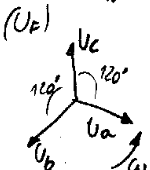
$P_{TERMELT} = P_{FOGYASZTOTT}$
(TERMELŐ → FOGY.)
$Q_{TERMELT} = Q_{FOGYASZTOTT}$
(FELHASZNÁLÓ → HÁLÓZAT)
VESZTESÉG ≈ 10%
MEDDŐ VESZTESÉG:
$Q_V = |I|^2 X_L$

- 3 FÁZISÚ HÁLÓZATOK:
A FÁZISOK:

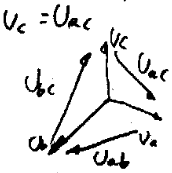
MAGYAR T.K.	IPARBAN	KÜLFÖLD
a	R	U
b	S	V
c	T	W

- FÁZIS FESZÜLTSÉGEK (U_F)



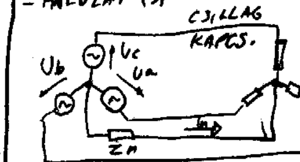


- VONALI FESZÜLTSÉGEK: (U_V)
$U_b - U_a = U_{ab}$ $U_a - U_c = U_{ac}$
$U_{bc} = U_c - U_b$
EZT ADJÁK MEG



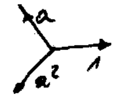
$U_F = |U_a| = |U_b| = |U_c|$
$U_V = |U_{ab}| = |U_{ac}| = |U_{bc}|$
$\boxed{U_V = \sqrt{3}\, U_F}$
NÉVLEGES FESZ = VONALI!
HELYI HÁLÓZAT: $U_F = 230\,V$ $U_V = 400\,V$
- FESZÜLTSÉGSZINTEK: (U_V)
120 kV ... 750 kV - NAGYFESZ (NF)
6 kV ... 35 kV - KÖZÉPFESZ (KÖF)
400 V - KISFESZ. (KIF)

- HÁLÓZAT (3F)

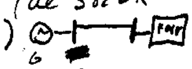


Z_n - NEUTRÁLIS.
$I_n = 0$: IDEÁLIS
2 CSILL. P. KÖZÖTT

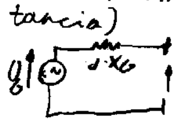
- SZIMMETRIKUS VEKTOROK!



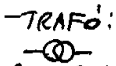
$a = e^{j120°}$
$a^2 = e^{j240°}$
3 SZIMM. VEKTOR ÖSSZEGE = 0
$(1 + a + a^2 = 0)$
U_a, $U_b = U_a\cdot a^2$, $U_c = U_a\cdot a$
- 3 FÁZISNÁL kevesebb a vezeték: 6 helyett 3 vezeték kell.
- MODELLEZÉSKOR 3 DB 1 FÁZISÚVAL modellezzük: a többi ugyanígy működik.
- TELJESÍTMÉNY:
$P(t) = 3\cdot U\cdot I\cdot\cos\varphi$ = konst. (nem leng)
$\boxed{S = 3\cdot U_F\cdot I = \sqrt{3}\, U_V\cdot I}$ $U_V = U_n$
- FOGYASZTÓK:
- HÁZAK: 1 FÁZIS + CSILLAGPONT
mindenki más fázist, egyenletesen elosztva.
- VASÚT: VONALI feszültség
- ÁBRÁZOLÁS:
1 VONALAS RAJZ: egyfázisú modell. csak 1 fázist ábrázolunk. (de 3 SZOR ÁTHÚZVA: —///—)



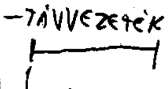
- GENERÁTOROK
U_n [kV], S_n [MVA], X [%] [reaktancia]



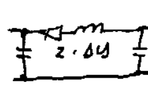
$X_G = \frac{X}{100}\cdot\frac{U_n^2}{S_n}$
$S = \sqrt{3}\, U_n I_n$
- TRAFÓ:



U_{n1}/U_{n2}, S_n [MVA], ε [%] (drop)
$\varepsilon = \frac{U_1}{U_{n1}/\sqrt{3}}\cdot 100$
$\boxed{\frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{I_{n2}}{I_{n1}}}$
$X_{TR1} = \frac{\varepsilon}{100}\cdot\frac{U_{n1}^2}{S_n}$ ← PRIMER OLDALI
$S_n = \sqrt{3}\, U_{1n}\cdot I_{1n} = \sqrt{3}\, U_{2n}\cdot I_{2n}$
- TÁVVEZETÉK:



U_n, ℓ, Z, Z'
SOROS
PÁRH. (SÖNT) IMP.



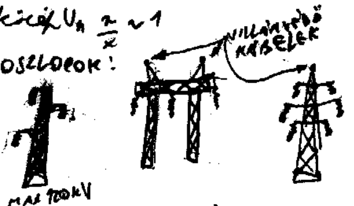
$Z = r + jX_L$ [Ω/km] $Z' = -jX_C$ [MΩ·km]

X/R függ U_n-től (INDUKTÍV)

nagy U_n: $\frac{r}{x} \ll 1$ ($r \ll x$)

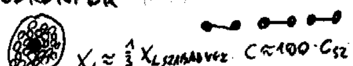
kicsi U_n $\frac{r}{x} \sim 1$

– OSZLOPOK:



– KÁBELEK (FÖLD ALATT)

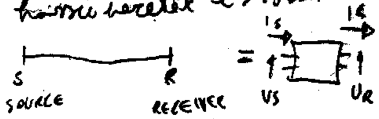
SODRONYOK KÖTEGES VEZ.



$X_L \approx \frac{1}{3} X_{L\,szabadvez.}$ $C \approx 100 \cdot C_{sz}$

– RÖVID VEZETÉK: $l < 5$ km

hosszú vezeték $l > 150$ km



$U(y) = U_R \operatorname{ch}\gamma y + I_R Z_0 \operatorname{sh}\gamma y$

$I(y) = \frac{U_R}{Z_0} \operatorname{sh}\gamma y + I_R \operatorname{ch}\gamma y$

HA $Z_R = Z_0$ → $I_R = \frac{U_R}{Z_0}$ és

$U(y) = U_R e^{\gamma y}$ $Z_0 = \sqrt{z \cdot z'}$

$I(y) = \frac{U_R}{Z_0} e^{\gamma y}$ $\gamma = \sqrt{\frac{z}{z'}}$

veszteségmentes vezetéknél!

$P_0 = \frac{U_R^2}{Z_0}$ TERMÉSZETES TELJESÍTMÉNY (ÁTVIHETŐ HATÁSOS)

– MEDDŐ TELJESÍTMÉNYEK:

Q_C – termelt meddő (kapacitás által)

Q_L – fogyasztott, (fogyasztó által)

a cél, hogy $Q_L = Q_C$ legyen, különben a feszültség akar megváltozni.

Szabályozzuk X_C-t (C-t) hogy $Q_C > Q_L$ legyen. ekkor $P_R = P_0$

HA $P_R > P_0$ akkor $Q_L > Q_C$

HA $P_R < P_0$ akkor $Q_L < Q_C$

ADOTT VEZETÉKRE P_0 jellemző.

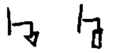
ha P_0-lal terhelik, akkor ideális a működés

(20kV → 1MW, 120kV → 38MW, 400kV → 559MW $= P_0$)

Q_C ADOTT, Q_L változik.

– $P_{3f} = 3P_{1f}$ $S_{3f} = 3S_{1f}$ $Q_{3f} = 3Q_{1f}$

– FOGYASZTÓK: U_n, S_n, $\cos\varphi$ ÁLTALÁBAN INDUKTÍV

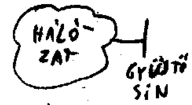


többnyire fogyasztói csoportokat nézünk.

FAJTÁI: állandó Z, állandó S, állandó I. (U_n MINDIG állandó)

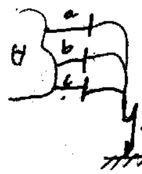
$Z_f = R_f + jX_f$

– NAGYHÁLÓZAT



– ZÁRLAT:

S_Z – ZÁRLATI TELJESÍTMÉNY (ZÁRLATKOR $U_n = 0$) I_Z – ZÁRLATI ÁRAM. $S_Z = \sqrt{3} U_n |I_Z|$



$I_f = 0$ → nem a földbe folyik I_Z

1 FÁZISÚ HELYETTESÍTÉS:

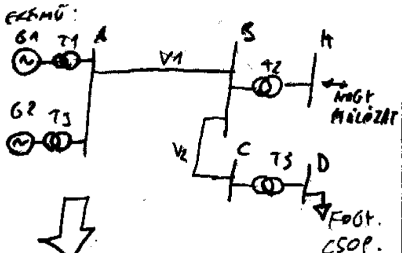
$|I_Z| = \frac{U_n}{\sqrt{3} X_H}$

$S = \frac{U_n^2}{X_H}$

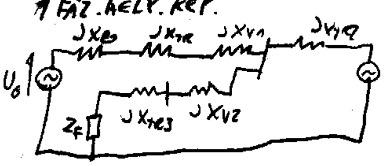
I függvényében U_K változik kicsit változik, ha S_Z NAGY. ($S_Z = \infty \Rightarrow$ végtelen hálózat)

– A SIMA ZÁRLAT A fázisok között van. Fázis és föld között a FÖLDZÁRLAT van.

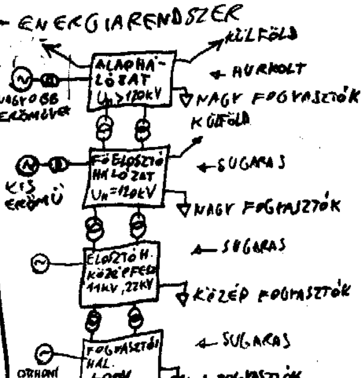
– A HÁLÓZAT



1 FÁZ. HELY. KÉP.



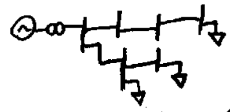
– ENERGIARENDSZER



– HURKOLT HÁLÓZAT

(TÖBBUTAS)

SUGARAS H. (1 UTAS)



MAVIR - független rendszerirányító. (TEHERELOSZTÓ)

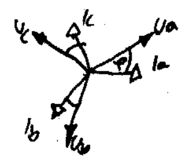
– FELADAT: S_n adott

$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_n}$

$\boxed{S = P + jQ = S_n(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$

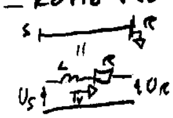
$P = S_n \cos\varphi$

FAZORÁBRA:



$Z = \frac{U_n^2}{S_n} \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

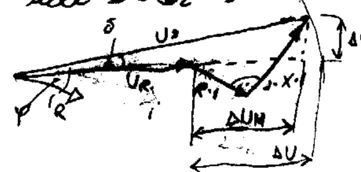
– RÖVID VEZETÉK



$I_{fogy} = I_w - jI_m$ INDUKTÍV, WATTOS, MEDDŐ

$U_S = U_R + I_V \cdot Z_V = U_R + (I_w - jI_m)(R + jX)$

U_R-t tartják, I-t, φ-t ismerjük, de U_S-t mekkorára kell akkor állítani?:



U_R, I_R adott. $R \cdot I$ párhuzamos I_R-rel. $jX \cdot I$ erre merőleges.

ΔU_H – hosszirányú fesz. esés ($\approx \Delta U$)

ΔU_K – keresztirányú feszesés } FÁZISF.

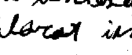
($\Delta U_H = I_w R - jI_m X$ $\Delta U_K = I_w X - jI_m R$)

δ – TERHELÉSI SZÖG.

– VESZTESÉGEK CSÖKKENTÉSE:

R, X nem csökkenthető, de I_m igen: ha a fogyasztónál van a FÁZISJAVÍTÓ KONDI:

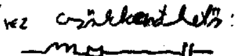
így az oda-vissza áramló meddő teljesítmény nincs, ami veszteséget okoz a hálózat impedanciáján.



(ΔU_H kisebb, δ is)

C-t változtatni kell P-től függően (FOGYASZTÓI CSOPORTOK)

X_{vez} csökkenthető:



EZ ZÁRLAT MIATT IS JÓ.

- A meddő azért meddő, mert oda-vissza áramlik. Ha közben van impedancia, akkor veszteség is van. cos φ miatt az áramló Q mennyiséget fenn kell tartani, tehát a veszteséget pótolni. Ez maga a veszteség. :)
- Pl.

$\Delta U = I_w \cdot R + I_m \cdot X = I_F(x)$

$I_F = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_n}(\cos\varphi - j\sin\varphi)$

$S_n = \frac{P_n}{\cos\varphi}$

$\Delta U[\%] = \frac{\Delta U}{U_n} \cdot 100\%$ (U_n - fázisfesz.)

- $P_v = 3 \cdot R \cdot |I|^2$

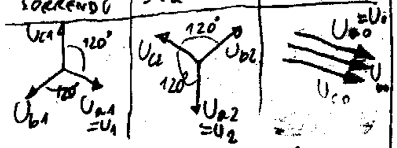
veszteség az ohmoson.

I - függ a wattos, és a meddő is! $I = I_w + I_m$.

- Szimmetrikus összetevők

tetszőleges aszimm. rendszert fel lehet bontani 3 db szimmetrikus rendszerre:

pozitív sorrendű	negatív sorr.	zérus sorrendű



ábrázolva is lehet.

részletek

$U_a = U_{a1} + U_{a2} + U_{a0}$

$U_b = U_{b1} + U_{b2} + U_{b0}$

$U_c = U_{c1} + U_{c2} + U_{c0}$

$U_{a1} = U_1 \quad U_{a2} = U_2 \quad U_{a0} = U_0$

$U_{b1} = a^2 U_1 \quad U_{b2} = aU_2 \quad U_{b0}$))

$U_{c1} = aU_1 \quad U_{c2} = a^2 U_2 \quad U_{c0}$))

Az összetevők: (S - szim.)

$U_S = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$

a rendszer (eredeti, aszimm.)

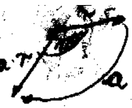
$U_F = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$

$U_F = A\, U_S$ — A - transzf. mátrix

Elég U_1, U_2, U_0-t megadni. Ezek a 3 rendszer első elemei, a többi (2) elemet képezhetjük elforgatással: a-val szorozva

$a = e^{j120°}$

$a^2 = e^{-j240°}$



$+120° = -240°$

Tehát U_a, U_b, U_c felírható U_0, U_1, U_2-vel, és ezek a^x-es elforgatásával.

- Ohm törvény:

$U_F = Z_F \cdot I_F \qquad Z_F = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix}$

$Z_{xy} = \frac{U_x}{I_y}$

$U_S = Z_S I_S \qquad \begin{bmatrix} Z_ö & Z_K & Z_L \\ Z_L & Z_ö & Z_K \\ Z_K & Z_L & Z_ö \end{bmatrix}$

$Z_K = Z_L$

$Z_ö$ - önimpedancia, Z_K - kölcsönös

$Z_S = \begin{bmatrix} Z_ö+Z_K+Z_L & 0 & 0 \\ 0 & Z_ö+a^2Z_K+aZ_L & 0 \\ 0 & 0 & Z_ö+aZ_K+a^2Z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} Z_ö+2Z_K & 0 & 0 \\ 0 & Z_ö-Z_K & 0 \\ 0 & 0 & Z_ö-Z_K \end{bmatrix}$

Mi a Z_K:

$U_x = R \cdot I_y \qquad x, y \in a, b, c$

Mi a $Z_ö$:

$U_x = R \cdot I_x$ (pl. $U_a = R \cdot I_a$)

$U_S = Z_S \cdot I_S$

- Csillagpontok között I_n folyik.

$I_n = 3 \cdot I_0$

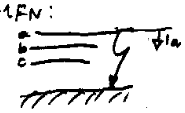
Ha a fogyasztó igényel I_n-et, akkor kell 0-vezeték

- Ha nincs zárlat, és szimm. (normális) akkor csak ⊕ összetevők vannak

- Zárlatszámítás:

FN - földzárlat
1FN - 1 fázis a földre
2FN - 2 fáz. a földre
2F - zárl.

-1FN:



$I_b = I_c = 0 \qquad U_a = 0$

$I_a \neq 0 \qquad I_a = I_2$

$I_b = I_0 + a^2 I_1 + a I_2 = 0$

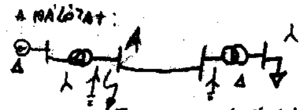
$I_c = I_0 + a I_1 + a^2 I_2 = 0$

$U_a = U_0 + U_1 + U_2 = 0$

Megvalósulás:

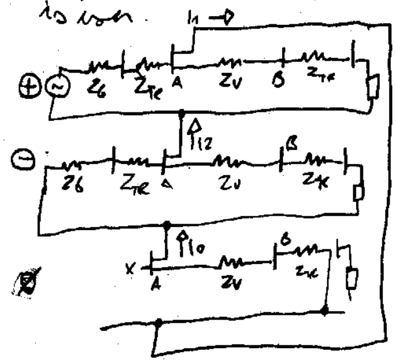
$I_0 = I_1 = I_2$ (soros)

A hálózat:



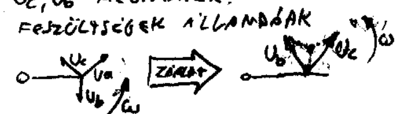
A gyűjtősínen van a zárlat.

Ez a fázison van a zárlat (most itt), ez azt jelenti, hogy az 1, 2, 0 összetevőkben is van.



Ha a 2. traf. másik oldala szigetelt csillagpontú, akkor $I_0 = 0$ (nincs zárlati áram).

U_c, U_b megnőnek, a vonali feszültségek állandóak



$I_2 = 0$

A zárlatot gyorsan le kell kapcsolni.

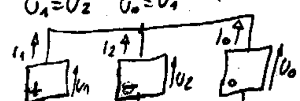
-2FN:

$U_b = U_c = 0 \qquad I_a = 0$

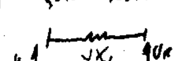
$U_0 + a^2 U_1 + a U_2 = U_0 + a U_1 + a^2 U_2$

Ezekből:

$U_1 = U_2 \quad U_0 = U_1$ (párhuzamos)



- Rövid nagyfesz vezetékek teljesítménye (söntkapacitás nélkül, $R \ll X_L$)



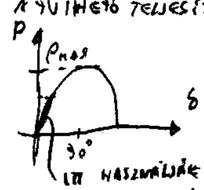
$I = \frac{U_S - U_R}{jX_L}$

$I^* = -j\frac{U_R}{X}$

$S_S = U_S I^*$

$P_R = P_S = \frac{|U_R||U_S|}{X_L}\sin\delta$

Átvihető teljesítmény:



$P_{max} = \frac{|U_R||U_S|}{X_L}$

Korlátok: ez (stabilitás), fesz. esés, termikus terhelés (áramkorl.)

A VEZETÉKEN $Q_V = Q_S - Q_R$ ESIK.

$$Q_V = I^2 X = \frac{(U_S - U_R)^2}{X}$$

$$Q_S = \frac{U_S(U_S - U_R\cos\delta)}{X}$$

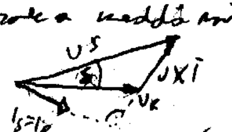
$$Q_R = \frac{U_R(U_S\cos\delta - U_R)}{X}$$

- FELADAT:
JX adott. P - változás, tehát P_R $(=P_S)$ MERT OHMOS veszteség nincs.

$$P = \frac{U_S U_R}{X}\sin\delta \rightarrow \delta \rightarrow Q_S, Q_R$$

a meddő a 2 végpont bármelyikéből mérendő (U_S lehet $>,<$ U_R)

A SZÁMÍTÁS:
U_S, U_R, P adott, $\rightarrow \delta \rightarrow Q_{SR} \rightarrow Q_V$
ideális az eset, veszteség csak a meddő miatt van.



- CSILLAGPONTOK (0-VEZETÉK)
CSILLAGPONTI POTENCIÁL:
- a 3F delta súlypontja.
- λ - közepe és a föld között mérhető.
- ZÉRUS SORRENDŰ FESZ. (U_0).

RÖGZÍTHETŐ A CS.P. FESZ, HA LEFÖLDELIK. FÖLDHÖZ KÉPEST 0V, VAGY 1-2% $\cdot U_n$
A TRAFÓ FÖLDELÉSI SZEMPONT-BÓL 2 RÉSZRE OSZTJA A HÁLÓZATOT. 2 HÁLÓZAT ELTÉRŐ LEHET, AZ ERŐMŰVEK FÖLDELETLEN λ ZÁRLATOK FELEDPONT-EMELKEDÉST OKOZ.

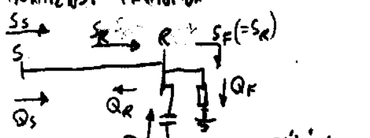
- TELJESÍTMÉNYÁTVITEL:

$$S_S = U_S \cdot I^* \qquad I^* = \frac{U_S^* - U_R}{-JX}$$

$$S_S = \frac{|U_S|^2}{X} e^{J90^\circ} + \frac{|U_S||U_R|}{X} e^{J(\delta+90)}$$

$$S_R = \underbrace{\frac{|U_R|^2}{X}}_{k_R} e^{-J90^\circ} + \underbrace{\frac{|U_S||U_R|}{X}}_{S_R} e^{J(-\delta+90)}$$

- ÁRAMLÁSI IRÁNYOK



- TELJESÍTMÉNYEGYENSÚLY
FOGYASZTÓ IGÉNY (PILLANATNYI):
$P_F = \Sigma P \qquad Q_F = \Sigma Q$

a turbinánál kinetikai tell a fogyasztók teljesítmény-igényét. a f-et állandóan kell tartani.
Ha a mechanikai telje-sítményt nem állítják, a F- változik. (FORDULATSZÁM VÁLTOZ)

$$P_{KI} = P_{MECH} - \Theta\frac{d\omega}{dt}\cdot\omega \qquad \boxed{F = \frac{\omega}{2\pi}}$$

$$P_{KI} = P_{MECH} - \frac{dW}{dt}$$

KINETIKUS EN. VÁLTOZÁS. (=0 legyen)

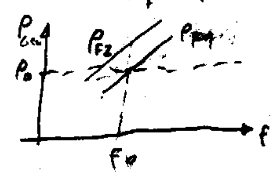
f addig változik, míg a

$$\boxed{P_{GEN} = P_{IGÉNY} + P_{SEGÉDÜZEM}}$$

egyensúly be nem áll.

- AZ IGÉNYELT MEDDŐT a generátornak, és a kondenzátoroknak adják. legyen! $K_F = 1$

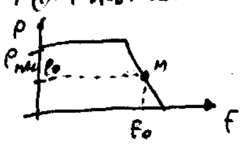
$$\Delta f = -\frac{\Delta P_F \cdot f_0}{P_F \cdot k_F}$$



P_F NŐ $\rightarrow$ ω, F CSÖKK, QNŐ, $U_{CSÖKK}$, $P_{CSÖKK}$ (VAGY 1 ERŐMŰ LEÁLL)

P_F CSÖKK $\rightarrow$ ω, F NŐ, Q CSÖKK, U NŐ, P NŐ

- GENERÁTOR
P(f) KARAKTERISZTIKA (P_{MECH})



A SZABÁLYOZÁS:
- PRIMER (GENERÁTORNÁL FORDULATSZÁM ALAPJEL RE SZABÁLYOZ. F CSÖKK → P NŐ)
- SZEKUNDER

JELLEMZŐK:
STATIZMUS:

$$R = 100\% \frac{\Delta F}{F_0} \quad \text{ADOTT ÉRTÉK}$$

TEHÁT $\frac{\Delta F}{F_0} \doteq \frac{\Delta P}{P_{MAX}} \cdot R \; [\%]$

MEREDEKSÉG:

$$K_F = \frac{P_{MAX}}{\Delta F} \quad \left[\frac{MW}{Hz}\right]$$

- FESZÜLTSÉGSZINTEK:
- TERMELÉS: 10KV
- SZÁLLÍTÁS: NAGYFESZ, a kis veszteségek miatt.
- FELHASZNÁLÁS: KISFESZ, baleset védelmi okok, OLCSÓBB ESZKÖZÖK

2. RÉSZ ENERGIA ÁTALAKÍTÁS

- ENERGIAÁTALAKÍTÓK (VILLAMOS)

MECHANIKAI VILL GÉP

UGYANAZ AZ ESZKÖZ TUDJA MINDKÉT IRÁNYT.

- VILL EN: tiszta, a felhasználás helyén, könnyen átalakítható
- ÁTALAKÍTÓK:
- MECH ↕ VILL: LINEÁRIS MOTOROK, FORGÓ GÉPEK, GÖMB MOTOROK
- VILL ↕ VILL: TRAFÓ, KONVERTEREK
- MÁS EN ↕ VILL E (nem konvencionál): SZUPRAVEZETŐS, MHD (MAGNETO-HIDRO DINAMIK.), NAPELEM 1,5 kW/m² ÜRBEN (150 W/m²), TÜZELŐANYAG CELLA, TERMO VILLAMOS

- VILLAMOS HAJTÁS:

- VILLAMOS GÉP:
ÁLLÓ, ÉS VÁLTOZÓ MÁGNESES TEREK HATÁSÁRA MOZGÁS JÖN LÉTRE.

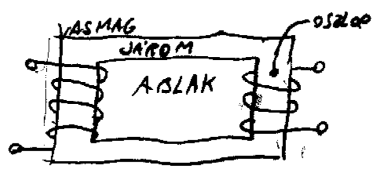
- TRAFÓ ...

P, f: állandó, U, I, FÁZISSZÁM I VÁLTOZIK

NÖVEKEDÉSI TÖRVÉNY:
$S \sim \ell^4$ ℓ - LINEÁRIS MÉRET
S - LAYSZ. TELJESÍTMÉNY

2X TELJESÍTM $\rightarrow$ $\sqrt[4]{2}$X MÉRET.

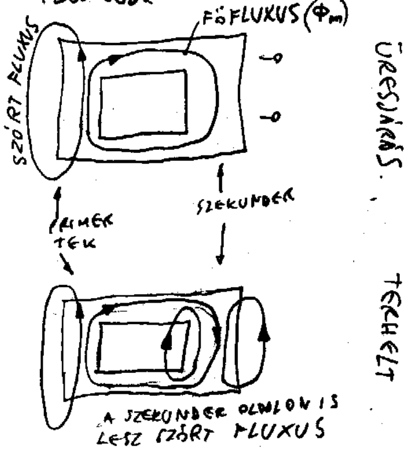
FELÉPÍTÉS:
1db 3F /VAGY/ 3db 1F
1 FÁZISÚ HELYETTESÍTÉSSEL ÁBRÁZOLJUK



PRIMER (NAGYFESZ) SZEKUNDER TEK. (KISFESZ)

általában a 2 tekercs egymáson van.

– FLUXUSok



ÜRESJÁRÁS.
TEKERCSELT

HA N_2 [illegible], $\Phi_m \to 0$

$\Phi_{szórt} \to B \cdot A = \Phi_{összes}$ ($U_2 \to 0$)

A VASMAG: [illegible]

$U_1 = j\omega N_1 \Phi_m$ $U_2 = j\omega N_2 \Phi_m$

ÁTTÉTEL: [illegible]

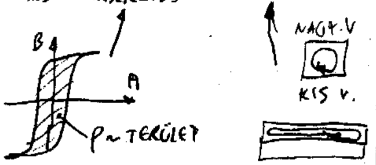
$$\boxed{n = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}}$$

EFFEKTÍV ÉRTÉKEKRE:

$U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} \to U_{eff} = 4{,}44 f N_1 \Phi_m$

– VASVESZTESÉGEK

$P_{VAS} = P_{HISZTERÉZIS} + P_{ÖRVÉNYÁRAM}$



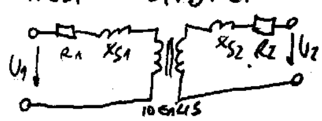
– LÉGRÉS:

MÁGNESES ENERGIA $\sim V$

LEVEGŐBEN 1000X AKKORA ENERGIA KELL UGYANAKKORA B-HEZ, MINT VASBAN

[illegible handwritten paragraph]

– HELYETTESÍTŐ KÉP



$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j X_{s1} \bar{I}_1 + \bar{U}_{i1}$

$\bar{U}_2 = R_2 \bar{I}_2 + j X_{s2} \bar{I}_2 + \bar{U}_{i2}$

Z_n – NÉVLEGES IMPEDANCIA:

$Z_n = \frac{U_n}{I_n}$ $I_1 N_1 = -I_2 N_2$

RELATÍV EGYSÉGEK: [%]

$u_1 = \frac{U_1}{U_{1n}}$ $r_1 = \frac{R_1}{U_{1n}}$ $x_{s1} = \frac{X_{s1}}{U_{1n}}$

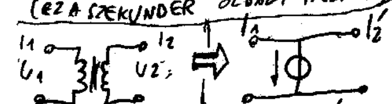
GERJESZTÉS: N:1

$N_1 I_1 + N_2 I_2 = F = \text{áll.}$

1 TEKERCS HELYETTESÍTHETŐ, (MINTHA AZ LENNE HELYETTE)

HA $I_2' = \frac{I_2}{n}$ $U_2' = U_2 \cdot n$

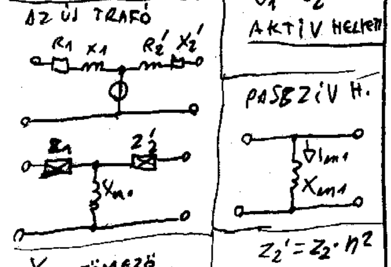
(EZ A SZEKUNDER OLDALI HELYETT.)



AZ ÚJ TRAFÓ

AKTÍV HELYETT.

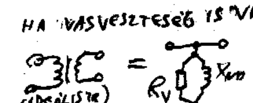
PASSZÍV H.



$Z_2' = Z_2 \cdot n^2$

X_m – FŐMEZŐ INDUKTIVITÁS

HA VASVESZTESÉG IS VAN:



– ÜRESJÁRÁSKOR IS FOLYIK ÁRAM

X_{m1} – [illegible], R_V – [illegible] I_{10} – ÁRAM.

RÖVIDZÁR: $U_2' = 0$ ($U_2 = 0$)

U_1 [illegible]

$\varepsilon = \frac{\Delta U}{U_n}$ (5..15%)

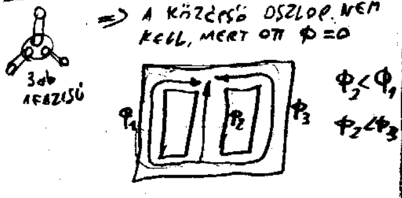
ε-DROP: RÖVIDZÁRÁSI FESZ ESÉS [%]

ha $\varepsilon > 0$ → fesz csökken (U_1)

ha $\varepsilon < 0$ → fesz NŐ pl KAPACITÍV TERH.

– 3FÁZISÚ TRAFÓ

⇒ A KÖZÉPSŐ OSZLOP NEM KELL, MERT OTT $\Phi = 0$



$\Phi_2 < \Phi_1$

$\Phi_2 < \Phi_3$

U_i – INDUKÁLT FESZ, VAGY FESZ. KÉNYSZER

• CSILLAG ⅄

• DELTA △

• ZEGZUG KAPCSOLÁS

$P = 3 \frac{U_f}{\sqrt{3}} I_f \cos\varphi$

FOLDASOK: [illegible]

– FORGÓ MOZGÁS

2 MÁGNES: MOTOR/GENERÁTOR (=)

M ~ sin α

α = áll.-t célszerű

[illegible] M = áll.

a tekercselést fogok [illegible]

– INDUKCIÓ VEKTOR (B) [illegible]

– PÓLUSSZÁM: a kerületen hány periódusa van B-nek

– MEZŐK: $\alpha_{vill} = p \cdot \alpha_{kör}$

• álló: egyenáram [illegible]

• LÜKTETŐ: AC [illegible]

• FORGÓ: [illegible]

– PÓLUSOSZTÁS: $\tau_p = \frac{K}{2p}$

– FORGÓMEZŐ:

3 db szinuszos AC áram, egymáshoz 120°-kal ($\frac{2\pi}{3}$) ELTOLVA.

$B(x,t) = \frac{3}{2} \hat{B} \cos(\omega_{vill} t - \frac{x}{\tau_p}\pi)$

– ROTOR: FORGÓRÉSZ (ROT)

STÁTOR: állórész (ST)

– $\omega_0 = \frac{\omega_1}{p}$: $\omega_{MECH} = \frac{\omega_{vill}}{p}$

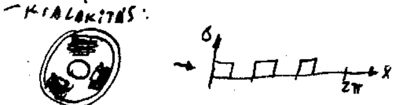
NYOMATÉKKÉPZÉS FELTÉTELE:

$P_{ST} = P_{ROT}$

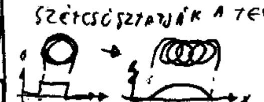
FREKVENCIA-FELTÉTEL:

$\omega_{ST(vill)} = \omega_{ROT(vill)} + \omega_{mech}$

– KIALAKÍTÁS:



SZINUSZOS MEZŐELOSZLÁS: SZÉTOSZTJÁK A TEKERCSEKET:



DE ENNEK AZ ALAPHARMONIKUSA SZINUSZOS.

– INDUKÁLT FESZÜLTSÉG:

$U_i = 4{,}44 \cdot f_1 N_1 \Phi_{max} \cdot \xi_1$

ξ_1 – tekercselési tényező.

$\xi_1 = 1$, ha $q = 1$ q-PÓLUSONKÉNTI HORONYSZÁM. q=1: 4SZÖGMEZŐS GÉP.

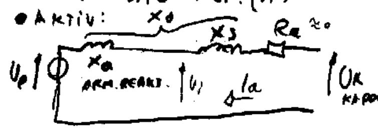
– ARMATÚRA: EBBEN A FESZ. INDUKÁLÓDIK (ÉS EBBE ADJÁK AZ ÁLLANDÓ GERJESZTÉST IS) EZ A PÓLUSFESZÜLTSÉG. A MÁSIK A PÓLUSKERÉK [illegible]

– SZINKRONGÉP

Csak $n = n_0$ ($n_0 = n_{vill}$) – en működik. Ez a szinkron állapot. Önállóan nem képes indulni (kihozva $\omega_0 t$ -val kell külső segítséggel – elektronikával).
A forgórész állandó mezőt: (áll. mágn. vagy DC elektro-m) ideálisan az állapotban.

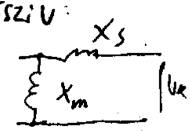
– HELYETTESÍTŐ KÉP: (1F)

● AKTÍV:



X_d – SZINKRON REAKTANCIA

● PASSZÍV:



– BEKAPCSOLÁS (SZINKRONOZÁS)
feltételek: felfutás f_0-ra, azonos fázissorrendet kapcsolunk rá.
Utána: TERHELÉSFELVÉTEL: I_g (GERJESZTŐÁRAM) NÖVELÉS, nyomaték többlete: HAJTÓ (GEN) vagy FÉKEZŐ (MOT)

$$P_{mech} = P_{légrés} = 3 U_K \frac{U_P}{X_d} \sin\delta$$

(δ a terhelési szög)

$$M = \frac{3p}{\omega_1} \frac{U_K U_P}{X_d} \sin\delta$$

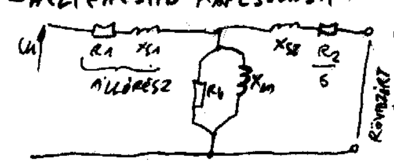
– MUNKAPONT $\omega_{1vill} \cong \omega_{mech}$. STABILIS, ha kibillentve visszatér ide. STATIKUS/DINAM.

– ASZINKRON GÉPEK

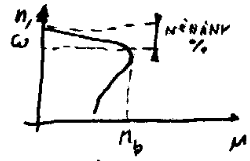
forgórész 3F. Ez a legelterjedtebb. Állórész rövidrezárt tekercsek, vagy ellenálláson keresztül rövidrezárt, vagy csúszógyűrűn keresztül bekapcsolható. KALICKÁS/TEKERCS.
A forgórészen fesz. indukálódik. az állórész-hez képest az $\omega_2' = \omega_0 - \omega_1$ de a forgórészhez képest $\omega_2 < \omega_0$ (NÉZVE, ω_1)
$\omega_2 = s\omega_1$ (VILL. KÖRFR.)
ÍGY A SLIP = $s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$
TERHELÉS NÉLKÜL $\omega_{mech} \approx \omega_1$, DE $\omega_2 \approx 0$ → SLIP = $s = \frac{0}{\omega_1} = 0\%$

$$\omega_{mech} = \omega_{1vill}(1-s)$$

– HELYETTESÍTŐ KAPCSOLÁS: (1F)



– MAXIMÁLIS NYOMATÉK: BILLENŐ NYOMATÉK (M_b)



– INDÍTÁS:
indításkor nagy, indító-nyomaték kicsi.
Megoldások:
● CSÚSZÓGYŰRŰSNÉL indításkor nem rövidzárva, hanem TERHELŐ ELLENÁLLÁS. $R = 4R_2$
● ÁRAMKISZORÍTÁSOS:
$\omega_2 \approx \omega_1$ indításkor → nagy kiszorítás. majd $\omega_2 \approx s\omega_1$ illetve akkor kis kiszorítás
● Y-Δ csillagban indítják majd átkapcsolják Δ-ba.

– EGYENÁRAMÚ GÉPEK:

3F (SOK F) forgórész, 1 F álló (állandó mágn. vagy DC – E.M.)
PÓLUSKERÉK → állórész
ARMATÚRA → forgórész
úgy oldják, hogy a forgórészmező az állórészhöz viszonyítva állandó az ARMAT.-ban AC fesz indukálódik, t forgó (f. szemről nézve) mezőt a kommutátorral állítják elő.

– INDUKÁLT FESZ:
a forgás közben a forgórészben fesz indukálódik (U_i) de ha is kapcsolunk feszt ($U_K = U_{kapocs}$).

$$U_i = k_U \Phi_e \cdot n$$

fesz. tényező, gerjesztés

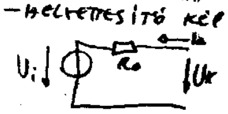
– NYOMATÉK:

$$M = k_M \cdot \Phi_a \cdot I_a$$

NY. TÉNYEZŐ, ARMATÚRAÁRAM

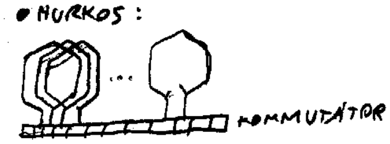
MOTOR: $M = M_{TERH}$ GEN.: $M = M_{TERH.}$

– HELYETTESÍTŐ KÉP:

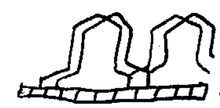


MOTOR: $U_K = U_i + R_b \cdot I_a$
GEN: $U_K = U_i - R_b \cdot I_a$

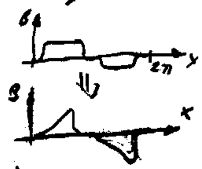
– TEKERCSELÉS
● HURKOS:



● HULLÁMOS:



– ARMATÚRAVISSZAHATÁS:
az eredeti pólusmezőhöz hozzáadódik az armatúraáram által keltett mező. Eltorzul, B_{max} megnő.
Ennek oka:
● SEGÉDPÓLUSOK
● KOMPENZÁLÓ TEKERCSELÉS



– GERJESZTÉSI MÓDOK:

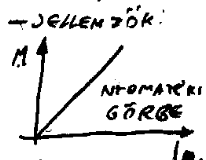
● KÜLSŐ:

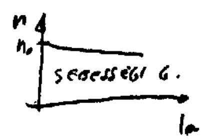
● PÁRHUZAMOS

● SOROS

● VEGYES

– JELLEMZŐK:





NAGYFESZ. TECHNIKA

– SZIGETELÉSVIZSGÁLAT:
vizsgálófeszültséggel: ez lehet AC, DC, aperiodikus feszültséghullám, vagy nagyfrekvenciás csillapodó hullám. A terhelés az üzemi fesz. kétszeresével történik. Lökőfeszült, sokszoros.
– Nagyfesz trafó: olaj-szigetelésűek. Ennek nagyon tisztának kell lennie.
– Nagyfesz elleni védelem: a lábon (rendszer) alatt földelőháló, vagy lemez. A trafók a levezetésre

- nagyfesz esetén töltetlen kondenzátor nincs.

- Szigetelők:

Nem szabályos alkotórészek esetén inhomogén az erőtér a fesz elektródák (kondi) között. Ha az átütési szilárdságot csak bizonyos helyeken lépi át a térerősség, részleges átütés lesz.

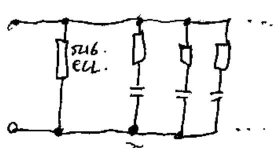
- átütési szil. alatti térerősségnél vezetés (kicsi) és polarizáció van.

Ha átlépi, villamos ív jön létre (plazmacsatorna). Ez az anyagban átütés, vagy a felületen átívelés.

- polarizáció: 1 anyagban többféle is lehet. (töltéshordozó eltolódás)

Ennek időállandója van: $10^{-14}s$ .. $10^{4}s$

Így a szigetelők helyettesítő képe:



τ_1 τ_2 τ_3 ...

- az átütés roncsolja a szilárd szigetelőket, de a gáz, vagy folyadékok regenerálódnak.

AC-nál kisebb az átütési szilárdság.

- átütés csatornát képez a részleges átütések idővel fa alakú csatornát alkothatnak, és előbb-utóbb lehet teljes átütés.

Fajtái:

- VILLAMOS ÁTÜTÉS: töltéshordozók kiszakadnak.
- HŐ-VILLAMOS ÁT.Ü. (áltolóban)

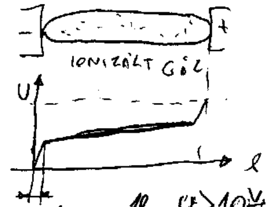
KAPCSOLÓK:

mechanikus, olvadóbiztosító, félvezetős, túlfesz védelmi.

- nagyfesz kapcsolók kikapcsolása után villamos ív keletkezik. Ezt ívoltó szerkezetek oltják.

- Az ív: 4000K° − 20 000 K°

I > 1A kell legyen.



≈10V/μm (ANÓDA-ESÉS)

Ha $U > 10\frac{V}{\mu m} \cdot l\,[\mu m]$ akkor lehet ív.

- megszakítók: a zárlati áramok kikapcsolására.

- OLVADÓBIZTOSÍTÓK:

VAN GYORS, és lassú (T-jelű)

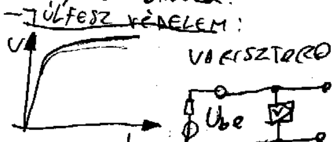
$I_{OLV} \approx 1/3 \;...\; 2 \cdot I_{MAX}$ LEGYEN.

nagyobb tápkondenzátoroknál lassú kell.

Feladatuk: zárlati áramok megszakítása.

- TÚLFESZ VÉDELEM:

VARISZTOROK

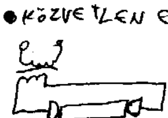


CSAK EGYENÁRAMRA JÓ, mert AC-n R megnő

- VILLAMOS MELEGFEJLESZTÉS

- KÖZVETLEN ELLENÁLLÁSHEVÍTÉS

A BETÉT AZ, AMIT FŰTENI KELL.



BETÉT ÉRINTKEZŐ

- KÖZVETETT ELLENÁLLÁSHEVÍTÉS

NEM FOLYIK ÁRAM A BETÉTEN. Vagy a közeget hevítjük, vagy infravörösen adjuk át a hőt a betétnek.

- INDUKCIÓS HEVÍTÉS:

A BETÉTBEN INDUKCIÓ ÚTJÁN ÖRVÉNYÁRAMOK KELETKEZNEK. Az INDUKTOR kelti a teret.

- ÍVHEVÍTÉS:

Ívet hoznak létre, ez hevít. (acélgyártás)

- ELEKTRONSUGARAS
- LÉZERES: kis átmérőre fókuszálják
- DIELEKTROMOS H.: (NAGYHULLÁMÚ) dielektrikumot hevítünk szinuszos váltakozó elektromos térrel.

Szabványos frekvenciákat használnak.

lehet kapacitív hevítés: kondi fegyverzetei között. (pl műanyag zacskó hegesztés)

- PLAZMAHEVÍTÉS

plazmagenerátorral gázt hevítünk. (2000K°...20000K°) forró és ionizált gáz lesz. villamos ív melegíti a gázt.

- VILLÁMVÉDELEM

- Ha villámkisülés önmagában folyik, (nagy nagyságrendű) az feszültséget indukál a közeli vezetőhurkokban.

- A villám: 5..10 cm csatornában kb 20 000 K°, 30KA...200KA ez 1μs alatt (MAX 200KA/μs)

- villámcsapáskor a föld-potenciál (1..10Ω) megemelkedik ($I_{VILL} \cdot R_{FÖLD} = \Delta U$)

Ez kb 30KV...200KV

- INDUKCIÓ:

Pl 1 10m×10m hurokban 100KA/μs esetén 100 KV lesz. (50cm × 50cm → 1KV)

- IPARI ELEKTROSZTATIKA

- Anyagok érintkezésekor és szétválásakor keletkezik töltésszétválasztás. Ezek a töltések kisüléseket hozhatnak létre, amik nagyobb áram-, feszültség-tüskéket, és szikrákat hozhatnak létre. Érzékeny anyagot már 1mJ szikra begyújthat. 1 emberen 15mJ töltés-energia is keletkezhet. Ennek 10%-a sül ki. Nagyobb tárgyakon 20mJ is lehet. Ezeket földelni kell.

- Ilyen problémák védelmével van az ESD védelem: (ESD-kisülés) földelnek mindent, embereket, tárgyakat.

- FET ezt 1NJ is tönkreteheti.

- ZAVAROK

- EMC − elektromágneses kompatibilitás; 2 berendezés egymás EM terében képes működni.

- ÁRAMÜTÉS

- FÁZIS-FÖLD ÉRINTÉS

Az ember érintkezik a talajjal, és megérinti a fázist.

- FÁZIS−FÁZIS.
- HIBAFESZÜLTSÉG: földelt burkolatra hiba folytán fázis kerül, így a földelési ellenálláson eső feszt érinti.
- LÉPÉSFESZÜLTSÉG ATTIDMÁSA: földön hez folyik.

16. fejezet

Elektronikai technológia

- DISZKRÉT ALKATRÉSZEK:

tokozott, különálló elk.

• FURATSZERELT:
hajlékony, vagy merev kivezetéseiket a furat túloldalán forrasztják, hullámforrasztással.

• FELÜLETSZERELT: (SMD)
rövid merev kivezetései vannak, amiket a vezető pályákra forrasztanak forrasztópasztával, infra kemencében

• CHIP és CHIP MÉRETŰ:
felületre ragasztják, lehuzalozzák, vagy BUMP-okkal illesztik

- ÁRAMKÖRI HORDOZÓK:

• NYOMTATOTT HUZALOZÁSÚ LEMEZEK:
rézfóliával borított üvegszál erősítésű epoxi lemezből alakítják ki
- felületszerelt
- furatszerelt
- vegyes szerelésű

• VASTAGRÉTEG ÁRAMKÖRÖK:
kerámia hordozóra szitanyomással felvitt paszták beégetésével készül

• VÉKONYRÉTEG ÁK.:
üveghordozóra vákuumeljárással felvitt rétegek litográfiás megmunkálásával készülnek

• HIBRID IC:
vastagréteg hordozóra ráforrasztanak SMD-alkatrészeket.

• MULTICHIP MODULOK:
nagy vezetéksűrűségű hordozóra több CHIP, vagy CHIP méretű alkatrészt.

- VÁKUUMTECHNIKA:

DURVA VÁKUUM – $1 - 10^5$ Pa
NAGYVÁKUUM – $10^{-5} - 1$ Pa
ULTRA NAGY VÁKUUM – $10^{-10} - 10^{-5}$ Pa

1. – NYITHATÓ VÁKUUMEDÉNY
2. – KIFAGYASZTÓ (KONDENZ)
3. – NAGYVÁKUUM SZIVATTYÚ (DIFFÚZIÓS)
4. – ELŐVÁKUUMSZIVATTYÚ (ROTÁCIÓS)

- VÉKONYRÉTEGEK FELVITELE:

• VÁKUUMPÁROLOGTATÁS:
anyag elpárologtatása melegítéssel, majd a részecskék lecsapódnak.

• VÁKUUMPORLASZTÁS:
ionizáció / az ionok részecskéket löknek ki az anyagból. Ezek lecsapódnak a céltárgyra

- EPITAXIÁLIS RÉTEGNÖVESZTÉS:

• DIFFÚZIÓ:
gázból az atomok bediffundálnak a felületbe

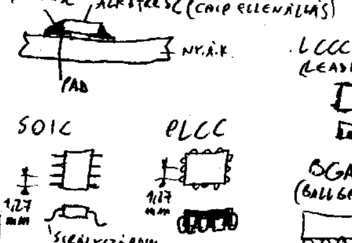
• IONIMPLANTÁCIÓ:
ionforrásból ionokat belövik az anyagot a felületbe

• OXIDNÖVESZTÉS:
- SZÁRAZ: kályhában befújják a levegőt, ez oxidálja a felületeket
- NEDVES: vízgőzt is fújnak

Mintázat is kialakítható az oxiddal, litográfiával, és maratással

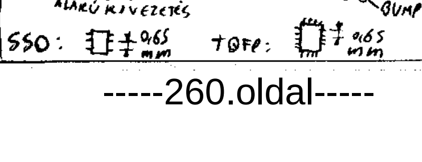
MARATÁS:
- SZÁRAZ: gázzal
- NEDVES: folyadékkal
- PLAZMAMARATÁS
- IZOTRÓP: SIMA
- ANIZOTRÓP: a kristályok más irányokban másképp reagálnak a maratásra. Ezzel lehet mikromechanikai szerkezeteket előállítani

- FURATSZERELT ALKATRÉSZEK:



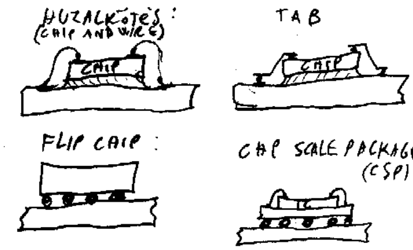
HUZAL, VAGY FIX KIVEZETÉS
TÁROLÁS
- HEVEDERES
- CSÖTÁR
- TÁLCATÁR

- FELÜLETSZERELT ALK:



TÁROLÁSOK, KISZERELÉSEK:

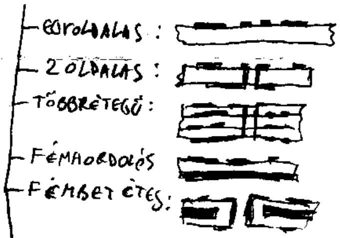
- CHIP ÉS CHIP MÉRETŰ ALKATR.



- NYOMTATOTT HUZALOZÁSÚ LEMEZEK:

HORDOZÓK:
- MEREV
  - PAPÍR + FENOL (BAKELIT)
  - ÜVEGSZÖVET + EPOXI (FR4)
  - ÜVEGPAPLAN + POLIIMID
- FLEXIBILIS
  - POLIÉSZTER
  - POLIIMID

VEZETŐSÍKOK:



- MULTIWIRE: MARATOTT + RAGASZTOTT HUZALOK
- 3D

- RÉTEGFELVITEL:

• GALVANIZÁLÁS
Me^{n+} vezető felületre, áram segítségével

• ÁRAMMENTES RÉZBEVONAT:
Me^{n+} + redukálószer = Me
katalitikussá tett csíráztató felületre.
pl. $CuSO_4 + NaOH + HCHO \to Cu + ...$

- NY.ÁK. GYÁRTÁS TECHNOLÓGIÁK:

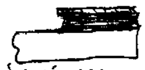
1. 1OLDALAS LEMEZEK:

• SZUBSZTRAKTÍV
a) rézfóliával borított lemez fúrása
b) fotoreziszt felvitel, litográfia (POZITÍV MASZK)
c) maratás, maszk eltávolítás

• ADDITÍV:
a) csíráztató lemez fúrása
b) NEGATÍV maszk, litográfia
c) árammentes fémbevonat, maszk eltávolítás.

HIBÁK:

a) SZUBSZTRAKTÍV: alámaródás:



b) ADDITÍV: GOMBAKÉPZŐDÉS:

2. ZOLDALAS LEMEZEK

● SZUBSZTRAKTÍV TECHN.

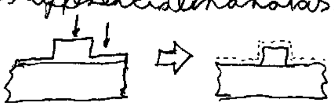
a) rézfóliával borított lemez fúrása
b) felület aktiválás (katalitikus részecskék)
c) áramnentes rézbevonat
d) NEGATÍV maszk
e) rézgalvanizálás
f) ón-ólom galvanizálás (marásálló)
g) maszk eltávolítás
h) marás
i) ón-ólom megömlesztés
j) forrasztásgátló, és forrasztható bevonat

● ADDITÍV TECHNOLÓGIA:

a) ~~katalitikus~~ szigetelő lemez
b) tapadásfokozó réteg
c) fúrás
d) negatív maszk
e) áramnentes rézbevonat
f) maszk eltávolítás
g) forrasztásgátló bevonat
h) túri marás.

● FÉLADDITÍV TECHN.

a) vékony fóliával borított lemez fúrása
b) aktiválás
c) negatív maszk
d) vastag réz galvanizálás
e) maszk leoldás
f) differenciálmarás.



3. EGYÜTTLAMINÁLT TÖBBRÉTEGŰ

1 oldalas maratott lemezeket összelaminálnak. A külső mintázatokat, és a galvanizált furatokat ezután alakítják ki.

A furatok:
- átmenő
- zsákfurat (lam. előtt)
- eltemetett VIA

VIA: 2 oldalt összekötő fémezett furat nem feltét lenül alkatrészbeforrasz táshoz.

4. SZEKVENCIÁLIS TÖBBRÉTEGŰ

Az egyes szigetelő és vezető rétegeket sorban viszik fel és munkálják ki.

MIKROVIA: 10–100 μm Ø fémezett furat. Lézerrel, plazma marással fúrják, a teljes (zsák) furatot kitöltve

– HIBRID IC-K.

vezetékek és ellenállások rétegtechnológiával.

① VÉKONYRÉTEG H. IC:

a) integhordozóra ellenállás-réteg
b) vezetőréteg felvitele
c) ~~maratás~~ (vezetőréteg)
d) ellenállásréteg maratása
e) litográfia: vezető szelektív maratása.
f) értékbeállítás lézerrel.

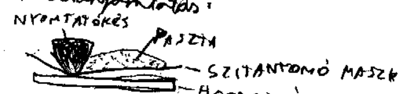
② VASTAGRÉTEG IC:

a) kerámiahordozóra vezetőréteg nyomtatása, (SZITÁZÁS) beégetése.
b) ellenállásréteg
c) értékbeállítás
d) forrasztásgátló üveg.
e)...) SMD alkatrészek

– VASTAG-RÉTEG-FELVITEL:

szitanyomtatás, pihentetés, szárítás, beégetés (800°C, 10 p).

A szitanyomtatás:



A maszk:

drótháló litográfiával zománréteg-mintázatot alakítanak ki. Ez az EMULZIÓS MASZK. A másik a FÉMMASZK (STENCIL): fém-lemezbe marják a mintát.

– VÉKONY-RÉTEG-FELVITEL:

● ADDITÍV, MASZKOS:

A maszk ablakainál lesz a mintázat.

● SZUBSZTRAKTÍV, MARATÁSOS:

Teljes felületre réteget visznek fel, és a felesleget (litográfia után) lemaratják.

– RÉTEGEK JELLEMZŐI:

● VÉKONYRÉTEG:

$R = 10..1000\ \Omega$

TERHELHETŐSÉG: 10..50 $\frac{mW}{mm^2}$

HŐMÉRS. TÉNYEZŐ: $10^{-4}/°C$

● VASTAGR.

$R = 0,1\ \Omega .. 10\ M\Omega$

HŐM.T.: 50..500 $\cdot 10^{-6}/°C$

– MULTICHIP MODULOK:

kívülről 1 nagy IC-nek néz ki, de több CHIP van benne

Szerelőlemez alapján:

- MCM-L (laminated-rétegelt) mint a többrétegű NYÁK-ok. Nagy hőtágulás. Kis disszipáció engedhető meg.
- MCM-D (deposited-felvitt rétegű) hordozóra vékonyréteg vezetőrétegeket alakítanak ki, litográfiával. (kerámia, üveg, szilícium...) Vezető + dielektrikum rétegek + vezető rétegek (síkok) Mikroviákat használnak
- MCM-C (CERAMIC - kerámia)
  - VASTAGRÉTEG (TFC)
  - NAGY hőmérs. együtt (HTCC)
  - KIS —"— (LTCC)

– FURATSZERELT ALKATRÉSZEK FORRASZTÁSA: HULLÁMFORRASZTÁS

(Előtte beültetés: kézi/gépi)

Ω-alakú forraszhullámon siklik végig a panel.

– SMD: ÚJRAFOLYATÁSOS FORRASZTÁS

forraszpasztát kennek a forrasztandó felületek és az alkatrészek közé. Hő hatására folyós, majd megszilárdulva nem paszta, hanem szilárd lesz.

Pasztázás után alkatrész-beültetés: automata PICK-AND-PLACE gépekkel.

– CHIPEK RÖGZÍTÉSE:

forrasztás / ragasztás.

FLIP-CHIPEK: anizotróp RAGASZTÓVAL (ez függőlegesen nyomásra vezethet, vízszintesen nem)

– TOKOZÁS:

nem hermetikus (pl. a nagy testek gyantával kiöntve) vagy hermetikus.

– POLIMER VASTAGRÉTEG TECHNOLÓGIA: hajlékony hordozójú vastagréteg áramkörök. Nyomógombok, fűtőlapok.

17. fejezet

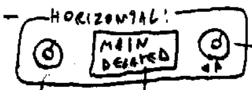
Labor

LABOR 2.

MŰSZEREK

AGILENT DIGIT SZKÓP

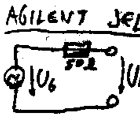
- PROBE COMP KIMENET: 4SZÖGJEL HITELESÍTÉSHEZ
- AUTO SCALE: méréshatár automatikusan. Lehet utána manuálisan is.
- GOMB: FÜGGŐLEGES POZÍCIÓ
- BEMENETEK (1)/(2)/(MATH) az világít, amit ki is jelez éppen. MATH: mat. műveletek $\frac{d}{dt}$, $\int dt$, FFT ...
- Ha kiválasztunk 1 bemenetet, akkor lehet megadni: AC/DC/GND – legyen a „CSATOLÁS"
- HORIZONTAL:



KIJELZÉSI MÓDOK:
- MAIN: normál
- DELAYED: 2 szer nagyítva: 1 normál, és egy KINAGYÍTOTT
- ROLL: lassú jelekre jól érthető
- XY: LISSAJOUS GÖRBE

- EDGE: HONNAN triggerel. LEVEL: TRIG. SZINT
- LEOLVASÁS-HELYETT (QUICK MEASURE) kiválasztani: P-P, RMS, T, f... tovább menni: van alatta gomb, hogy MEASURE ... (A KÉPERNYŐN). CLEAR MEASURE TÖRLI a választást.
- ACQUIRE GOMB:
  - NORMÁL
  - AVERAGING: átlagol ha zajos.
- HA ÉRTÉKET KELL MEGADNI
- PL. KURZOR ÁLLÍTÁS CURSOR GOMB
- RUN/STOP HA fut a kép, + lehet állítani rajta

AGILENT JELGENERÁTOR



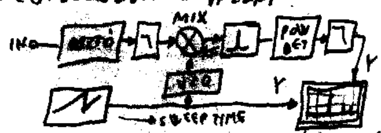
- MIVEL TERHELJÜK?
  - HA 50Ω-os a terhelés: UTILITY → OUTPUT SETUP → LOAD → 50Ω
  - HA nagyobb IMPEDANCIÁVAL: UTILITY → OUTP.S. → LOAD → HIGH Z

Ha nem így tesszük, akkor a kimenő. fesz nem annyi lesz, mint amennyit állítottunk.

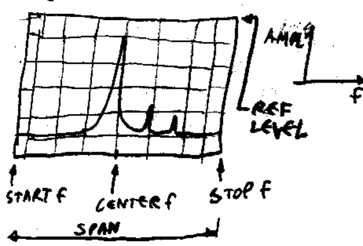
- MINDEN ÁLLÍTÁSNÁL: ablak, freki. AMPL, P-P, RISETIME...

AGILENT SPEKTRUMANALIZÁTOR (4411B)

- EGYSZERŰSÍTETT VÁZLAT:



- FOGALMAK



- HASZNÁLAT: rendes gombok, és a képernyő szélén megjelenő feliratokhoz (SOFTKEY) tartozó GOMBOK.
- FŐGOMBOK

FREQ
SPAN
AMPLIT

MARKER – mérés. leolvasás (KURZOR)

Mindegyiknek a konkrét beállítása SOFTKEY-jel történik

- BW/AVG, RES BW – ha kicsire állítva jobban elkülön. böníthetők a jelek
- jel-zaj viszonyt lehet javítani ha csökkentjük a bemeneti csillapítást.

RF SZIGNÁLGENERÁTOR (AGILENT 4430B)

- DIGITÁLIS vektorjelgen. távközlésben használt jelek előállítására.
- FOGALMAK:
  - CARRIER – vivő
  - POWER LEVEL – teljesítm. szint.
  - AM DEPTH – AM moduláció mélys.
  - AM RATE – moduláló fr.
  - FM DEVIATION – fr. löket.
  - STEP SWEEP – változtatja a frekvenciát folyamatosan
- IDŐNKÉNT A PC átveszi az irányítást. ekkor: 1 gombbal vissza kell venni
- ILLESZTÉSEK

(S_{22}) Γ_g $\quad$ Γ_t (S_{11})

HA $Z_1 \neq Z_0 \neq Z_2$: ÜTKÖZÉS!

CSILLAPÍTÁS van:

$$a = 10\lg \frac{|1-\Gamma_g \cdot \Gamma_t|^2}{1-|\Gamma_t|^2}$$

A MÉRÉSEK

1. MÉRÉS ÁRAMKÖRÉPÍTÉS + MÉRÉS

ELLENÁLLÁSOK SZÍNKÓDJA:

$R = AB \cdot 10^C \pm D\%$

vagy

$R = ABC \cdot 10^D \pm E\%$

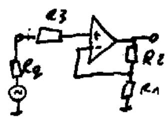
FEKETE = 0	ZÖLD = 5	ARANY = ±5%
BARNA = 1	KÉK = 6	EZÜST =
PIROS = 2	LILA = 7	
NARANCS = 3	SZÜRKE = 8	
SÁRGA = 4	FEHÉR = 9	

LED: $-(\cdot)+$

TÁPHOZ: 12 V-hoz kell

MŰVELETI ERŐSÍTŐS KAPCSOLÁSOK:

NEMINV:



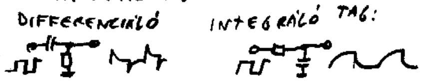
$R_3 = R_1 \times R_2 - R_g$ legyen: mert $R_{be\oplus} = R_{be\ominus}$ kell

- $A_V = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ (INVERTÁLÓ: $A_V = \frac{R_2}{R_1}$)

$A_{V_{mért}} = \frac{U_{ki}}{U_{be}}$

- KIMENETI OFFSZET FESZ: 0 jelnél U_{ki}
  BEM. OFF. FESZ: $U_{ki0}/A_V = U_{be0}$
- IMPULZUSÁTVITELI FÜGGV: 4SZÖGJELRE A KIMENET.

- SLEW RATE: TÚLVEZÉRLÉSNÉL A FESZVÁLTOZÁSI SEBESSÉG: [V/μs]
  $U_{kimax}/t_{r_{túlv.}} = SL$.
- TETŐESÉS: V/μs a CSATOLÓKONDI MIATT
- TÚLLÖVÉS: nagyobb változtatás kondi jobban átvinni + illesztetlen lezárások miatt is lehet.
- JELALAKÍTÓ TAG:
  DIFFERENCIÁLÓ $\quad$ INTEGRÁLÓ TAG:



- OFFSZET FESZ. OKA: DIFFERENCIÁLERŐSÍTŐ 2 BEM. TRANZISZTORÁNAK U_{BE0} NEM EGYENLŐ
- ERŐSÍTŐVEZÉRLÉS
  A) DIFFERENCIÁLIS – SZIMMETRIKUS
  B) SINGLE-ENDED – ASSZIMETRIKUS
- BEMENŐ BIAS ÁRAM HATÁSÁRA A BEMENETEN LÉVŐ ELLENÁLLÁSOKON FESZ. ESIK. NEM LESZ HIBA, HA EZ A 2 FESZ⊖(INV.BEM, ÉS NEMINV.BEM) EZ AKKOR, HA $R_{g\oplus} = R_{g\ominus}$
- LED: 1,3 – 2,4V SZINTŐL FÜGG. 10mA...1A

2. MÉRÉS NYÁK-TERVEZÉS

- PANEL: rézfóliával borított szigetelő lemez. A rézből alakítják ki a vezetőpályákat és a forrasztási felületeket. Esetleg csatlakozókat is.
- ÁRAMKÖRTERV

SPECIFIKÁCIÓ ALKATRÉSZVÁLASZTÁS → KAPCSRAJZ → SZIMULÁCIÓK → PANELTERV KÉSZÜLÉKTERV → DOKUMENTÁCIÓ

HA NEM JÓ

- ALKATRÉSZEK: a tervező progi (ORCAD)-ban vannak alkatrészkönyvtárban fájlok
- FOOTPRINT: alkatrészek megfelelő forrasztási felület, furatelhelyezés.
- KÖTÉSLISTA (NETLIST)

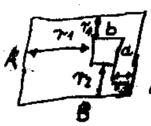
KAPCS. R. SZERK. → NETLIST → PANEL TERVEZŐ

ORCAD CAPTURE CIS — ORCAD LAYOUT PLUS

- RÉTEGEK A PANELON:
  - TOP/BOTTOM LAYER alsó/felső vezetőpálya
  - INNER/POWER/GND LAYER belső rétegek (vezető)
  - FORRASZPASZTA (SOLDER PASTE)
  - FORR. GÁTLÓ MASZK (SOLD.M.)
  - SZITÁZOTT FELIRAT: SILKSCREEN
- GERBER FILE a terv eredménye, szabvány gyártóberendezések vezérlésére, fotomaszkok előállítására.
- VIA: átvezetés rétegek közt
- SZABÁLYOK:
  - vezeték ne legyen keskenyebb mint 8 MIL (0,2mm)
  - NAGYÁRAMÚ vezeték ?? TIP MIN 4X szélesebb
  - vezetéket ne törjük derékszögben ┓ → ┐ (gyártáskor összeköthetne)
  - Ø > 4,6 mm HA többet gyártanak egyszerre.
  - a panel szélétől min 2,5 mm-re legyenek a vezetékek és a furatok.

3. MÉRÉS EMC JELENSÉGEK

- 2 VEZETŐHUROK közötti INDUKTÍV CSATOLÁS:



$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}$$

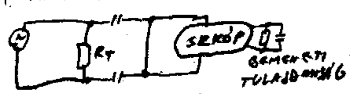
$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(2a\ln\frac{r_1+b}{r_1} + 2b\ln\frac{r_2+a}{r_2} + 2a\ln\frac{r_3+a}{r_4} + 2b\ln\frac{r_3+b}{r_3}\right)$$

SZINUSZOSAN:

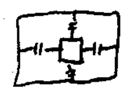
$\hat{U}_i = j\omega_1 \hat{I}_1 L_{21}$

MÉRÉSE:

- KAPACITÍV CSATOLÁS:

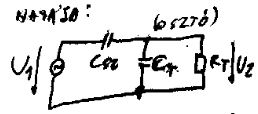


$$C_{sz_x} = \varepsilon_0\varepsilon_r \pi \frac{l}{\ln\frac{d}{r_0}}$$



$$C_{sz_e} = \sum C_{sz_x}$$

HATÁSA:



C_T - ISMERT, $U_2 = U_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$

$Z_2, U_1, U_2 \to Z_1 \to C$

- HA I_1 kicsi, akkor a kapacitív csatolás a számottevő.
- JELLEMZŐ ÁTHALLÁSI ÉRTÉKEK:

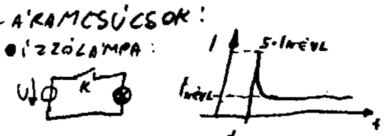
10x15cm, 5x5cm KAPACITÍV CSAT.

1 kHz → $\frac{20\,mV}{1V}$

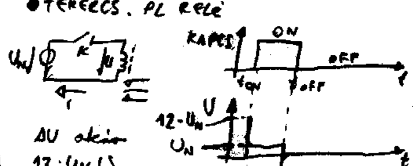
10 kHz ... 10 MHz → $\frac{20\,mV}{1V}$

20 MHz → $\frac{150\,mV}{1V}$

- ÁRAMCSÚCSOK:
  - IZZÓLÁMPA:

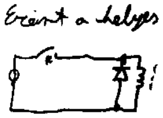


  - TEKERCS, PL RELÉ

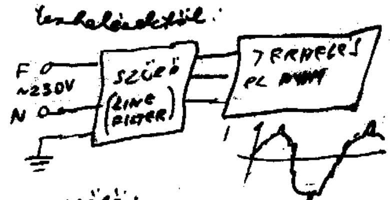


ΔU akár $12 \cdot U_N$-is lehet.

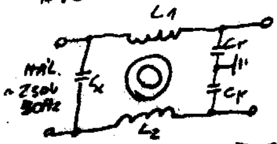
Ezért a helyes kapcsolat:



- HÁLÓZATI SZŰRŐ: a hálózat védelme a nem LINEÁRIS terhelésektől.



A SZŰRŐ:



C: X és Y KONDENZÁTOROKKAL!! (MPIS)

L: toroid VASMAGON a 2 TEKERCS.

4. MÉRÉS VILLAMOS TELJESÍTM.

- MŰSZEREK:

1. ÁRAMMÉRŐ LAKATFOGÓ

TRAFÓ, AHOL $N_1 = 1$

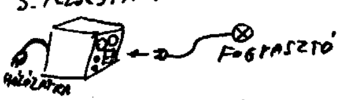
40Hz - 1kHz de főleg 50Hz-re.
40mA - 40A

2. HALL SZONDÁS ÁRAMMÉRŐ szintén LAKATFOGÓS

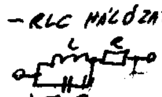
$U_{ki} \sim I_{mért}$

$U_{ki} = 100\,mV/A$ ÁTALAKÍTÁSI TÉNYEZŐ

3. TELJESÍTMÉNYMÉRŐ:



- RLC HÁLÓZAT MÉRÉSE:



3 VOLTMÉRŐS MÓDSZERREL:

$$P_Z = \frac{U_e^2 - U_Z^2 - U_R^2}{2R}$$

- NEMSZINUSZOS JELEK ESETÉN: PL SZEMÉLYI SZÁMÍTÓGÉP (P-BECSLÉS)

itt U_{eff} adott (230V) csak az áramot mérjük. LAKATFOGÓVAL.

$P = \sum_{k=1}^{n} U_k \cdot I_k$ VAGY $P = U(t) \cdot I(t)$

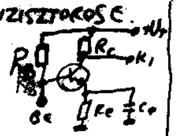
BECSLÉS:

- ALAPHARMONIKUS (50Hz) ÁRAMMAL
  $P = 230V \cdot I_{ALAP,RMS}$

  $P < I_{RMS} \cdot 220V$
  └ SZKÓPPAL:

5. MÉRÉS TRANZISZTOROS E.

– Á. KAMMERÉS: $I = \frac{\Delta U}{R}$
pl. $I_c = \frac{U_T - U_c}{R_c}$



– $\beta = \frac{I_C}{I_B}$ számítható

– $R_{KI} = R_T \cdot \frac{U_{KI\,TERHELETLEN} - U_{KI\,TERHELT}}{U_{KI\,TERHELT}}$

– $h_{11} = R_{be} = (1+\beta) \cdot r_d$ MÉRÉSE:

Ezekből számolható:
U_B mérése $\xrightarrow{R_B}$ $h_{11} \to I_B$ ↘ h_{21}
U_C mérése $\xrightarrow{R_{C}R_T}$ I_C ↗

ELTÉRÉSEK

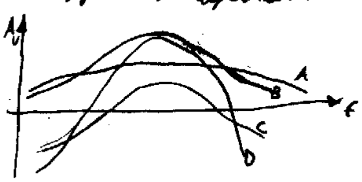
– PARAMÉTEREK HATÁSA AZ ÁTVITELI FÜGGV. BODE DIAGRAMRA

A) R_T, C_E NÉLKÜL FÖLDELTE.
– SZÉLESSÁVÚ, DE NEM NAGY AZ A_U

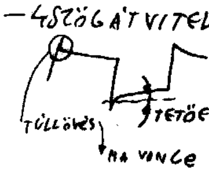
B) R_T NINCS, C_E VAN:
– kisebb sávban megnőtt az erősítés.

C) R_T VAN, C_E NINCS C_C VAN ← KOLLEKTOR KÖRI KOND.
– kis sávban van csak erősítés, máshol csillapít

D) R_T van, C_E, C_C van
– kis sávban nagy az erősítés, ezen kívül nagy a csillapítás.



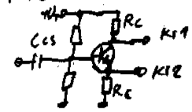
– 4SZÖGÁTVITEL



– HARMONIKUS TORZÍTÁS
$$k = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} U_i^2}}{U_1} = THD$$
i → HANYADIK HARMONIKUS ($i=1$ → ALAPH.)

KIVEZÉRELHETŐSÉG:
adott k-hoz állítjuk U_{KI}-t (U_{BE}-t)
[redacted] a SZKÓP MATH > FFT funkciójával mérjük.

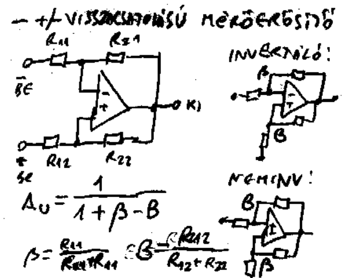
– FÁZISHASÍTÓ KAPCSOLÁS:



> ELLENFÁZISÚ JELEK
$A_U \approx 1$

6. MÉRÉS MÉRŐERŐSÍTŐ

– +/– VISSZACSATOLÁSÚ MÉRŐERŐSÍTŐ



$A_U = \frac{1}{1+\beta-B}$

$\beta = \frac{R_{11}}{R_{21}+R_{11}}$; $B = \frac{R_{12}}{R_{12}+R_{22}}$

– IC ERŐSÍTŐ KIMENETI OFFSZET!

$U_{OFF} = U_{OKI}$

BEM. OFFSZET: $U_{OBE} = \frac{U_{OKI}}{A_U}$

– kivezérelhetőség és SLEW RATE: 4szöggel vezéreljük, túlvezéreljük.

– HATÁRFREKVENCIA:
itt kezd el csökkenni a kivezérlési tartomány
SZINUSZJELLEL TÚLVEZÉRELVE változtatjuk a frekvenciát.

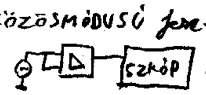
– R_{KI}=? $U_{KI\,TERHELT}$, $U_{KI\ddot{U}}$ – MÉRNI

$U_{TERH} = U_{\ddot{U}} \cdot \frac{R_T}{R_T + R_{KI}}$

– BODE DIAGRAM felvétele:
különböző frekvenciákon (JELGEN: 1kHz...1MHz LÉPÉSENKÉNT) mérjük az erősítő ki és bemenő jelét és fáziskülönbséget SZKÓPPAL. MAJD EXCELLBEN ábrázoljuk.
$|A| = \left|\frac{U_2}{U_1}\right|$ $\varphi = \varphi$

Ezt az adatbevitelt segíti az OSCBODE program, ami összeköttetésben van a szkóppal.

– KÖZÖSMÓDUSÚ jel erősítés

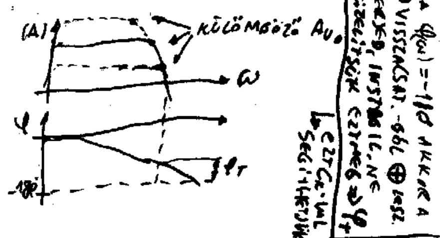


$A = \frac{U_K}{U_{BE}}$

KÖZÖSJELELNYOMÁSI TÉNYEZŐ
$E_K =$

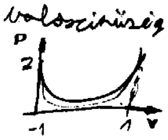
– SZIMMETRIKUS ERŐSÍTÉS:
$A_{US} = \frac{U_0^+ + U_0^-}{2}$ AD OTT F-ÁN

– FREKVENCIAFÜGGÉST BEFOLYÁSOLJA:
• OSZTÁSARÁNY (A_U)
Minél nagyobb A_U, annál kisebb a 3 dB-es határfrekv.
• F KOMP. KONDENZÁTOR:
ne legyen túllövés, és ne gerjedjen. gerjed, ha instabil: nem teljesül a NYQUIST (BODE) kritérium, miszerint ahol $|\beta(\omega)| = 1$ ott $\varphi(\omega) > -180°$ legyen! vagy ne legyenek ⊕ valós részű pólusok. $\varphi_T > 0$ legyen



7. MÉRÉS ADC, DAC

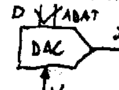
– FOGALMAK:
• KÓD BIN: 1 adott analóg feltartomány, vagy a hozzá tartozó digitális érték. 1 adott digit. kód.
• KÓD ÁTVÁLTÁSI SZINT: $T[k]$
komparálási szint ($2^N - 1$ db van)
• KÓD BIN SZÉLESSÉG $W[k]$
ΔJEL ezen intervallumon belüli kód között.
• LSB ⌐ $W[k]$ kódszélesség VAGY a legkisebb helyiértékű bit.
• ERŐSÍTÉS
$G = \frac{\Delta d}{\Delta J}$ – 1-et léptetéshez mekkora ΔJ kell $\approx W[k] \approx LSB_{EQ}$
• HIÁNYZÓ KÓD: ami sosem jelenik meg a kimeneten.
• TELJES KIVEZÉRLÉS FS (FULL SCALE)
a max jelszint ⌐ $2^N - 1$ ⌐ J_{MAX}
• NOM. KÓDSZÉLESS.: Q
• SZINUSZ JEL HISZTOGRAMJA:
valószínűség-sűrűség függvény



$P(V) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - V^2}}$
AMPL. ; VÁLTOZÓ

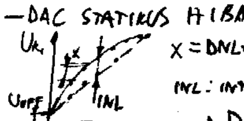
• SINAD – JEL/ZAJ+THD viszony
$SINAD = \frac{P_{JEL}}{P_{ZAJ} + P_{THD}}$ $SNR = \frac{P_{JEL}}{P_{ZAJ}}$ $THD = \frac{\Sigma P_{FELH}}{P_{ALAPH}}$

– D/A ÁTALAKÍTÓ:



kimenet jel nagy baj

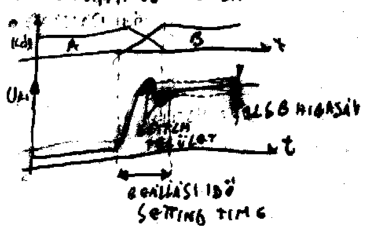
– DAC STATIKUS HIBÁI:



$X = DNL + LSB$ $DNL = X - LSB$ DIFF. NEMLIN. HIBA
INL: INTEGRÁLIS NEMLIN. HIBA

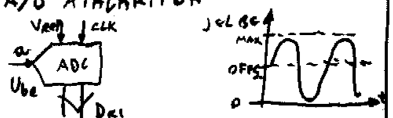
STATIKUS HIBA MÉRÉSE:
kódot kiadjuk (MATLABBAL) és DMM-mel mérjük a feszt.
SOK lépcsőben, majd EXCELLBEN kiértékeljük.

—DAC DINAMIKUS HIBÁJA:



- BEÁLLÁSI IDŐ: kódváltástól a beállásig a $\pm\frac{LSB}{2}$ HIBASÁVON belülre. Ezt fél vagy teljes tartományváltozásra adják meg. (FULL SCALE SETTING TIME)
- GLITCH: szkóppal mérve + becsüljük. 4SZÖGJEL MATLABBAL

— A/D ÁTALAKÍTÓK



— ADC VIZSGÁLATA HISZTOGRAMMAL:
transzfer karakterisztika nemlinearitás felderítése
HIÁNYZÓ KÓD → OTT 0 az érték
DIFF. NL. → CSÚCSOK
Ehhez koherens mintavétel: a mintasorozatok (szekund, regisztrátum) a jel egész számú periódusát kell tartalmaznia.

— GÖRBEILLESZTÉS
eltárolt mintasorozatra szinuszjelet illesztünk.
ΔJEL = hibafüggv. ⇒ EFF. HIBA e_{RMS}

N_{EFF} — EFFEKTÍV BITSZÁM:

$$N_{EFF} = N - \log_2 \frac{e_{RMS}}{e_{ELMÉLETI}}$$

$$e_{ELMÉLETI} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$$ KVANTÁLÁSI HIBA
Q - KV. LÉPCSŐ, KÓD SZÉLESS.

$$SINAD = 10\lg \frac{A^2/2}{e_{RMS}^2}$$

—ADC DINAMIKUS JELL.:
SZINUSZJEL → MINTAV, TÁROL → FFT
itt is SINAD, SNR, THD

8. MÉRÉS IDENTIFIKÁCIÓ

– ÁTVITELFÜGGVÉNY - KOMPENZÁCIÓ - ALAPÚ SZABÁLYOZÁST tervez a MATLAB. Ehhez a szabályozandó folyamatnak a különböző modellek szerinti (együtt) paramétereit meg kell határozni. Ezt a MATLAB IDENT - TOOLBOX segítségével.

– RENDSZERMODELLEK:
- AR - autoregresszív
- MA - mozgóátlag
- X - külső bemenő jelű
- ARX, ARMAX
- PEM - általános lineáris paraméterbecslési modell

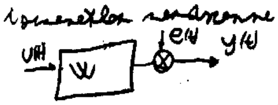
AR:
$$A(z^{-1}) \cdot y(t) = e(t)$$

ARMAX:
$$A \cdot y = BU + Ce$$

PEM:
$$A \cdot y = \frac{B}{F} U + \frac{C}{D} e$$

ahol
u(t) hasznos külső bemenet (Xm)
e(t) fehér zaj
y(t) kimenet.
A, B, C, D, E, F -et kell meghatározni.

– Az identifikáció:
ismeretlen rendszerre



1.) X(t) vizsgálójelnél mérjük, és számsorozatban (MATLAB) tároljuk u(t), y(t) értékeket.

2.) PARAMÉTERMEGHATÁROZÁS:
- rendszermodell választás
- PARAMÉTERBECSLÉSI MÓDSZER választás:
  - LS - legkisebb négyzetek
  - IV - instrumentális optimum
- fokszám választás
  nn=[egyik, másik ...]
  így kell megadni a polinomok fokszámait.
- kisz. a TH sektor - adat struktúrában helyezi el a PARAMÉTEREKET.
  pl: THARMAX = ARMAX(z, nn)
  ahol z = [U:Y] összetett MÁTRIX
  és
  [A, B, C, D, E, F] = TH2POLY(THARMAX)
  Ezt lehet ábrázolni (?!?!)

– a mérések:
- vizsgálójel: 4SZÖGJEL, jelgenerátorral (T≈30s) között adatgyűjtés.
- ω_0, ξ, T, A becslése

$A = \frac{y_{áll.}}{U}$

$\omega = \frac{2\pi}{\Delta T}$

az adatgyűjtő program:
RT_DATA_AQV_CONTROL.EXE
ha kész fájlba mentjük az adatot.
- az adatokat MATLABBA kell tölteni: y=[CTRL+V] ↵
  U(t), y(t) ábrázolása.
  PLOT(y) → SZÁMSOR ÁBRÁZOLÁSA
  PLOT(t, y) → ugyanaz csak itt t - pontokat értike van.
  $t = (0 : 0{,}1 : 10)$ → SZÁMSOR.
  0-tól, 0,1-enként, 10-ig.
  ZÖLD 1 DIAGRAMON:
  PLOT(t, u, t, y)

U, y, t - ábrázolása kérdés

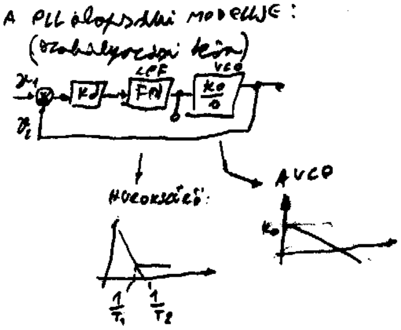
- IDENTIF. rendszermodell választás a mért adatok ábrázolás alapján az összehasonlításhoz

– SZABÁLYOZÓTERVEZÉS:
- kitöltjük a W(s) -t. Kalman-féle szabályozással.
- szimulálás a modellen. ellenőrizni, hogy elég jó-e.
- REAL-TIME kipróbálás a valóságon.
- összehasonlítani a jeleket:
  y_{szim}, $y_{valódi}$, $y_{új mért}$

– MIRE JÓ:
FOLYAMAT → W_{FOLY} → W_{SZAB}

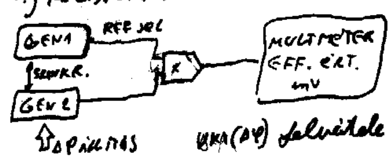
9. MÉRÉS PLL

– A PLL alapsávi MODELLJE:
(szabályozási kör)



– MÉRÉSEK:

1.) FÁZISDETEKTOR KARAKTERISZTIKA



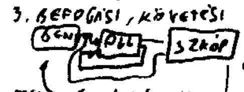
$U_{KI}(\Delta\varphi)$ felvétele

$$U_{KI} = K_d \cdot \Delta\varphi \Rightarrow K_d = \frac{U_{KI}}{\Delta\varphi_i}$$

2. VCO KARAKTERISZTIKA
POTMÉTERREL változtatjuk a VCO bemenő feszültségét, úgy, hogy F_{KI} 2kHz-el változzon.
U, f értékek alapján

$$F_{KI} = \frac{K_0}{s} \cdot U_{be} \qquad \frac{K_0}{s} = \frac{F_{KI}}{U_{BE}}$$ - ÁTLAGOL V_A

3. BEFOGÁSI, KÖVETÉSI TARTOMÁNYOK:

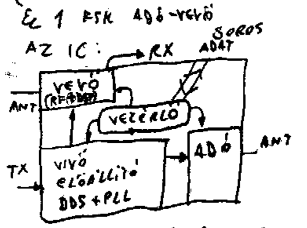


LISSAJOUS - GÖRBÉK alapján. MIKOR NEM FUT A JEL → SZINK

- a hurokszűrő időállandójától képes csak követni a PLL a hirtelen FREKVENCIAUGRÁST $f_1 \rightarrow f_1 + \Delta f$ $\Delta f_{max} \leq \frac{\Theta_{max}}{360°} \omega_p e$
- FM jelnél F-LÖKETRE
ahol $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0 K_v}{\tau_2}}$ - PÓLUSFREKVENCIA

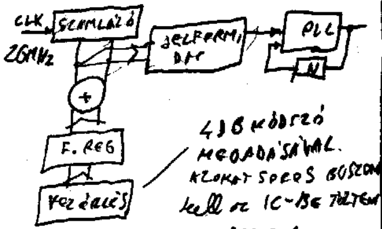
10. MÉRÉS FSK ADÓ/VEVŐ

- DIGITÁLIS INFORMÁCIÓ TOVÁBBÍTÁSA analóg csatornán.
- MODULÁCIÓK:
$f_p = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$ $S_m(t) = A\cos\left[2\pi f_v t + \frac{K U_m}{f_m} \sin 2\pi f_m t\right]$
FM-jel elméleti sávszélessége ∞. → HIBAMENTESEN NEM TOVÁBBÍTHATÓ
k_{FM} - MODULÁCIÓS index
m_f - MOD. tényező
$f_p = f_v + f_d$ $f_D = f_{d\,max}$
$f_D = k_{FM} \cdot U_M = m_f \cdot f_m$
m_f-től függően KIS/NAGY löketű FM
Ha T<1% TORZÍTÁST AKARUNK:
$B = 2\alpha f_M$ 1 ... m_f ... 1000, 100
$\frac{1}{T}$ - FSK
Harmonikus jelre:
CARSON SZABÁLY: $B = 2(f_D + B_m)$
- JELSZINTEK:
dBm – P-SZINT 1mW-HOZ KÉP.
dBμ – FESZ SZINT 1μV-HOZ K.
dBc – P SZINT a VIVŐHÖZ KÉPEST.
- AZ ADÓVEVŐ IC (TRF6900A)
a szabadon felhasználható ISM sávban működik.
(868-870 EU, 902-928 USA)
Ez 1 FSK ADÓ-VEVŐ
AZ IC:

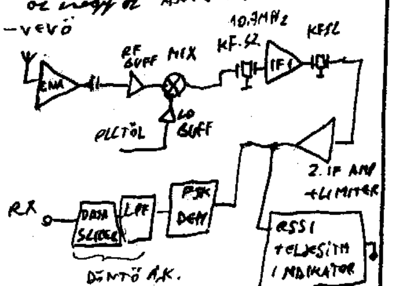


- A DDS: direkt digitális szintézer: vételkor a vivőt állítja elő (a PLL felszorozza) adáskor 2 frekvenciát: f_1, $f_1+\Delta$ ezek között váltogat. Ezt is a PLL felszorozza. $f_{DDS} \approx 3{,}5 MHz$
a PLL zárthurkú sebessége (LPF)
B_{PLL} $f_{jelzés} = \frac{1}{T}$ kell legyen.
MŰKÖDÉSE: 1 24 BITES FR. R.
~~REGISZTER~~-SZÁMLÁLÓ számlál a bemenő órajelfrekvenciával. Ha túlcsordul kezdi elölről.
TÚLCSORDULÁS: egy adott FREKVENCIAREGISZTER ÉRTÉKÉT mikor éri el a számláló.

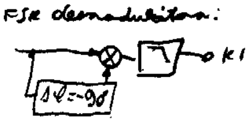
a számlálót kimenete: növekvő digitális kód. ebből előállítanak 1 SZINUSZT. ezt nagy a PLL-re.
A frekvenciaregiszterbe a TX jeltől függően 2 féle érték írható: F_V, $F_V + \Delta F$



4 DB KÓDSZÓ MEGADÁSÁVAL. KLOKKOT SOROS BUSZON kell az IC-BE TÖLTENI
- AZ ADÓ: a PLL jelét egy teljesítményerősítő erősíti. ez megy az ANTENNÁRA (50Ω)
- VEVŐ

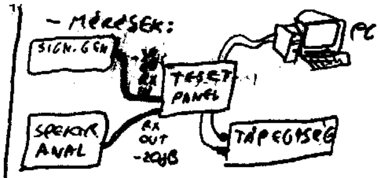


minden 2 részegység között BUFFER erősítők vannak. az impedanciákat illeszteni kell. külső 50Ω, belső egységek között 300Ω
- DDS:
FREKVENCIA KARAKTERE
$\Delta f_S = N \cdot \frac{f_{CLK}}{2^{24}}$
- FSK VEVŐNÉL nincs szükség AGC-re, jó a LIMITER IS!
- FSK demodulátor:



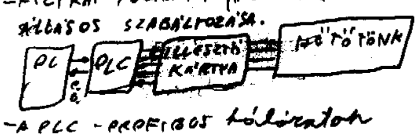
- AZ RSSI felhasználható ASK vételre.
- vételi hibaarány függ a DÖNTŐ Á.K. komparálási szintjétől. Ezt úgy állítja be, hogy bekapcsolás után 101010 SOROZATOT igényel. Ez a TANÍTÁSI BITSOROZAT
- FEJLESZTŐKÁRTYA + SZOFTVER:
VEZÉRLŐ ABLAK: kiszámítja a kódszavakat a CLK, N... -BÓL
OUTPUT PARAM: ON/OFF: IC KI/BE
BLOKKDIAGRAM ABLAKBAN EGYENKÉNT KI/BE kapcsolhatók a részek.

- MÉRÉSEK:

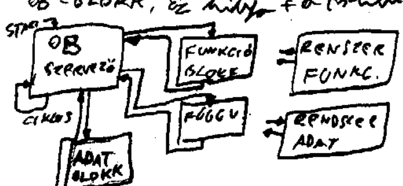


11. MÉRÉS PLC

- FIZIKAI FOLYAMAT (FŰTŐTT TEST) állásos SZABÁLYOZÁSA.



- A PLC - PROFIBUS hálózaton keresztül csatlakozik a PC kommunikációs kártyájához.
- az illesztőkártya: hőmérő áramköre, FŰTÉS/VENTILLÁTOR vezérlő teljesítményáramköre.
- A PLC programozása SIMATIC MANAGER-rel történik. Folyamat jeleinek a megjelenítése + paraméterek kézi beállítása → WINCC PROG.
a programot BLOKKOKBÓL építjük fel. Van 1 fő BLOKK: SZERVEZŐ OB-BLOKK, Ez hívja + a többit.



- SZABÁLYOZÁSOK
vannak beépített szabályozó-programok. paramétereik WINCC-ből is ÁLLÍTHATÓK.
EREZ:
- IDENTIFIKÁLÁS: ugrásfüggvény-alakú fűtésvezérléssel regisztráljuk (FÁJLBA) a rendszer válaszát. EZT MATLABBAN VIZSGÁLJUK → (IDENTIF.) IDŐÁLLANDÓK ($T_1 T_2$)
- BEÉPÍTETT PID SZABÁLYOZÓT paraméterezni a kapott adatok alapján
$T_1 \rightarrow T_i$ $T_2 \rightarrow T_d$
- TESZTELNI A SZABÁLYOZÓT.
BEÁLLÁSI IDŐ, TÚLLENDÜLÉS, SZAB. TERÜLET

18. fejezet

Kiegészítés

ZAVARVÉDELEM

— EMI – elektromágneses zavarás.

FORRÁSAI:

AC HÁLÓZAT: 50Hz

HÁLÓZATI FELHARMÓNIKUSOK: MAX 20KHz

KISÜLÉS, NAGYTELJESÍTM. ELEKTR.: 20MHz–30MHz

DIGITÁLIS ELEK: 30MHz ... SOK GHz

— EMC = ELEKTROMÁGNESES KOMPATIBILITÁS

150KHz felett van RÁDIÓFR. ZAVARÁS

Ha 1 (adó)vezeték hossza közelít a λ/4-hez, akkor nagy lehet a kisugárzás.

A TIRISZTOROS és PWM áramkörök 1–20MHz-es rádiózavart keltenek.

VÉDEKEZÉS:

f	FORRÁSNÁL	ÁLDOZATNÁL
0–100Hz	FÖLDELÉSI KÖRÁRAM ELKERÜLÉSE	– SZIMMETRIKUS JELEK – FÖLDHUROK MENTES – ÁRNYÉKOLÁS
100–2,5KHz	– FOJTÓK – SÁVARSZŰRŐK	– SZIMM. JELEK – FÖLDHUROK M. – ÁRNYÉKOLÁS – SZŰRŐK
2,5K–150K	SZŰRŐK	—"—
150K–30M	– SZŰRŐK – KÁBELÁRNYÉKOLÁS	– SZŰRŐ – ÁRNYÉKOLÁS
30M–1G	– ÁRNYÉKOLÁS – BELSŐ SZŰRÉS	– ÁRNYÉKOLÁS

A FÖLDHUROK MIATT a kábeleknek csak egyik végét kell földelni. Nagyfrekvenciák miatt viszont mindkettőt.

KOMPROMISSZUM: ÁRNYÉKOLT SODORT ÉRPÁR, MINDKÉT VÉGÉN FÖLDELT, + DIFFERENCIÁLIS JELKEZELÉS

— RF ZAVAROK

MŰSORSZÓRÓ ADÓK — 1V/m

MOBILTELEFON 1m-re — 0,1–1V/m

0,1m-re — 30V/m

RADAR 1km-re — 100V/m

Ezek ellen ÁRNYÉKOLÁS KELL

Az árnyékolás hatása:

CSILLAPÍTÁS
- reflexiós
- abszorbciós.

VÉDEKEZÉS:

- KAPACITÍV CSATOLÁS ellen: jó vezetőképességű fém
- INDUKTÍV CSATOLÁS ellen: nagy μ_r ferromágneses anyag kell.
- RÁDIÓ: Zárt fémdoboz. A rések, kábelnyílások nagyon lerontják a hatást!

CÉL: zavarok kisebbek legyenek a zavartűrésnél.

— ZAVAROK:
- BELSŐ EREDETŰ
- KÜLSŐ —"—
- FOLYAMATOS (RF, AC)
- IMPULZUSSZERŰ

ZAVARTERJEDÉS:
- VEZETETT
  - VEZETÉKEN
  - CSATOLÁSSAL
- SUGÁRZOTT
  - E
  - H
  - S (E×H)

EMC: több készüléknek egymás terében kell üzemelniük. Ehhez emissziós, és immunitási határértékek vannak megadva szabványban.

— TÚLFESZÜLTSÉGEK ELLENI VÉDELEM: VARISZTORRAL

— FÖLDHUROK

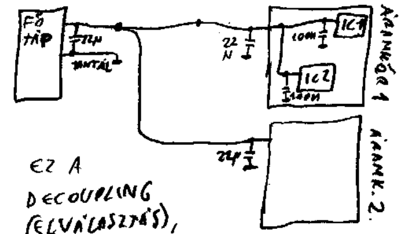
Ha 1 berendezéshez (KÁRTYÁHOZ) 2 ÚTON IS hozzávezetjük a földvezetéket, (pl TÁPFÖLD, és jelkábel-árnyékolás) akkor az HURKOT alkot, amiben zavarfeszültség indukálódik a rádiózavarások miatt, de főleg 50Hz körül.

ELKERÜLNI: csak 1 föld-hozzávezetés legyen. Viszont ezen a nagyáramúak ne ejtsenek nagy feszültséget, mert így az is bezavarhat a kisjeleseknek. Esetleg DIFFERENCIÁLIS jeleket használjunk VAGY a jelfolyamban LEVÁLASZTÓ ERŐSÍTŐT. DIGITÁLISNÁL: OPTO-CSATOLÓT, vagy OPTO-IZOLÁTORT.

— TÁPVONALI ZAJOK

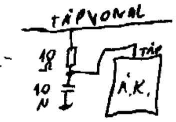
Kapcsolóüzemű tápok elég zajosak. Minden tápon zaj lesz a változó terheléstől. akár 0,5V_{pp} is lehet!

— ÁRAMKÖRÖK HELYI ZAVARVÉDELME



EZ A DECOUPLING (ELVÁLASZTÁS), (BYPASS CAPACITORS)

- Hosszú kábeleknél, amiken DC fesz megy, mindkét végére kondi kell, a ki/bekapcsolási zavarok ellen.
- ÉRZÉKENY, KIS ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKNEK ILYEN:



Érzékelőknél főleg ilyen legyen!, hogy közeli feldolgozókhoz se jusson tápzaj a bemenetre.

— KIVITEL vezetékeken

a paraziták miatt a vezetékeken késleltetés lesz: csökkentett felfutási idő

$t_{ej} = \sqrt{L'C'}$

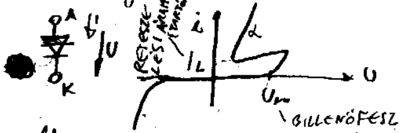
- túl hosszú vezetékeken illesztetlen esetben reflexiók lesznek. Ha $l > \frac{c \cdot t_{felf}}{3 \cdot \sqrt{\varepsilon_r}}$ (DIGIT)

(RF ANALÓG:) állóhullámarány leromlik, ha $l > \lambda/10$

SPECIÁLIS ALKATRÉSZEK

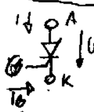
– DINISZTOROK

4 rétegű félvezető eszköz



Ha a fesz. eléri 1 értéket, az áram megindul: BEKAPCSOL

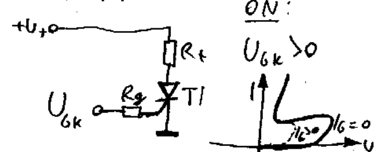
– TIRISZTOROK



vezérelhető DINISZTOR. Ezzel lehet nagy (DC) áramokat kapcsolni. Ha I_V áramot adunk, kinyit. Akkor zár le, ha a vezérelt kör generátorát kikapcsoljuk ($U_T=0$). A karakterisztikája (I(U)) ugyanaz, mint a DINISZTORRA. Csak 1 irányban vezet.

HASZNÁLAT:

ON: $U_{GK}>0$



U_{GK}-val a BILLENŐFESZÜLTSÉGET állítjuk. Megadják a gyújtóáramot $I_{G_T}=\frac{U_{GK}}{R_g}$ [10mA] ami a bekapcsoláshoz kell. Kikapcsolás:

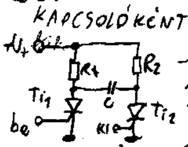
- I csökkentése I_L alá
- U csökkentése 0-ra t_{KI} (t_{OFF}) időre (VAGY ELLENT. POL.)

ALKALMAZÁS:

- AC: Minden nullátmenetkor kikapcsol, és csak az egyik félperiódust engedi.

TELJESÍTMÉNYSZABÁLYOZÁS: nullátmenet után t_{be} időt vár a vezérlő, és csak akkor kapcsolja be: GYÚJTÁSKÉSEDELMI SZÖG. EZ A FÁZISHASÍTÁSOS VEZÉRLÉS

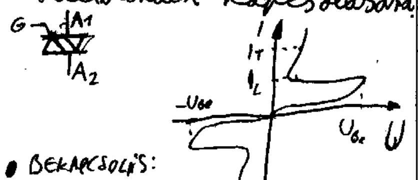
- DC: KAPCSOLÓKÉNT HASZNÁLJÁK.



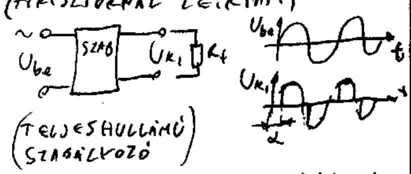
A kikapcsolás nehézkes, erre a megoldás. Ti_1 a fő tirisztor, Ti_2, R_2 a SEGÉDKÖR.

– TRIAC

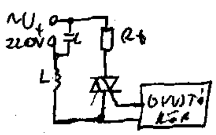
váltóáram kapcsolására



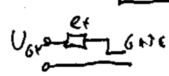
- BEKAPCSOLÁS: (GYÚJTÁSI MÓDUSOK) Bármilyen polaritású GA_1-gyújtófeszültséggel bekapcsolható.
- KIKAPCS: minden nullátmenetkor. Nagyfrekvenciás zavarokat kelt, ezért LC-hálózati zavarszűrőt kell alkalmazni. A kapcsolás másik része: GYÚJTÓKÖR.
- SZABÁLYOZÁS: itt is lehet fázishasítással szabályozni (TIRISZTORNÁL LEÍRTAM)



(TELJESHULLÁMÚ SZABÁLYOZÓ)



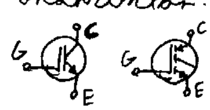
MEGADJÁK A KRITIKUS ÁRAMOT, AMI A NYITÁSHOZ KELL [15mA]



$\frac{U_{GT}}{R_t} > 15mA$ legyen

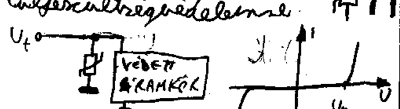
– IGBT

kis teljesítménnyel vezérelhető kis ellenállású, nagy teljesítményeket kapcsoló tranzisztor. Szigetelt vezérlőelektródás bipoláris tranzisztor.



– VARISZTOROK

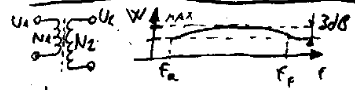
túlfeszültségvédelemre



A túlfeszültséget levágja. SEBESSÉGE ≈500ps

Adatai: Működési fesz., max túlfeszültség, áram, disszipáció.

– JELTRANSZFORMÁTOROK

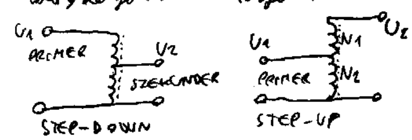


leválasztásra, csatolásra, szinteltolásra, fesz. áttételre. $L_1=N_1^2A_L$ $L_2=N_2^2A_L$

f_a, f_f adatokat a magkatalógusból nézzük.

AUTOTRAFÓ:

Nem galvanikusan leválasztott; de jobb a hatásfok, kisebb.



$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{N_1+N_2}{N_2}=\frac{I_2}{I_1}$$

RF áramkörökben: BALUN TRAFÓ

– EGYTOKOS KVARCOSZCILLÁTOROK

FAJTÁI:

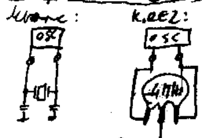
- PXO – egyszerű oszcillátor
- VCXO – feszültségvezérelt
- TXCO – hőmérs. kompenzált
- OXCO – termosztátos.

Ezek: rezgőkvarc + oszcill. kapcsolás közös házban. kimenete HCMOS/TTL, Többnyire DIL-8, DIL-14 tokban, de csak 4 kivezetéssel.

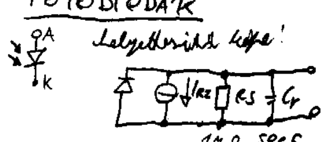
– KERÁMIA REZONÁTOR

ugyanúgy használható oszcillátorban, mint a rezgőkvarc, csak olcsóbb, és pontatlanabb.

kvarc: K.REZ:

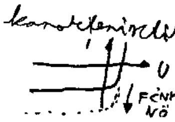


– FOTODIÓDÁK



Helyettesítő kép!

karakterisztika:



$I_{zár} \sim$ MEGVILÁGÍTÁS

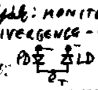
ZÁRÓIRÁNYBAN HASZNÁLJÁK. JELLEMZŐ A SÖTÉTÁRAM (0 FÉNYNÉL). MAX 1MHz, DE A PIN-DIÓDÁKNÁL 1–10GHz

– LÉZERDIÓDÁK

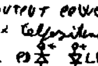
A – K

Beépített teljesítményérzékelő fotodióda szokott benne lenni. Nyitóirányban. Megadják: MONITOR CURRENT/OUTPUT POWER, BEAMDIVERGENCE – szóródás, MAX teljesítmény.

KÖZÖS POZITÍV:



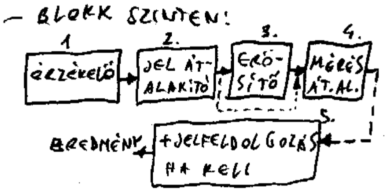
KÖZÖS NEGATÍV:



ÉRZÉKELŐK

- Érzékelések (problémák)
- ● DC: mérőhíd, mérőerősítő, integráló erősítő.
  Információ: U, I, dU/dt
- ● AC: leválasztás, erősítők, szűrők. INFO: U, I, φ, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{df}{dt}$ ...

- Blokk szinten:

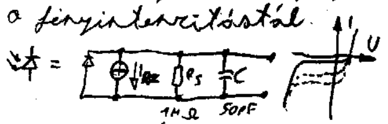


① ÉRZÉKELŐK
- Aktív (külső tápra van szüks)
- Passzív (jelet generál)

Nyúlás: nyúlásmérő bélyeg (RDR),
erő: erőmérő cella (piezo)
nyomás: membrán + nyúlásmérő
áramlás: nyomáskülönbséggel.

● Nagyimpedanciás szenzorok: nagy problémák vannak.
Fotodióda, piezo, CCD, kémiai szen.

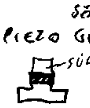
● Fotodióda
Záró irányú áram függ a fényintenzitástól.



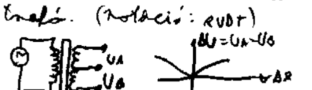
kétszeződik 10°-onként

I_{RZ}: közvetlen nap: 30mA
borús nap: 3µA
félhomály: 30nA
telihold: 3nA
sötét: 3pA

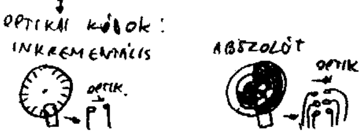
● Piezo gyorsulásérzékelő:



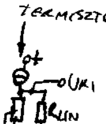
● Pozíció:
LVDT - lineárisan változó diff. trafó. (rotáció: RVDT)



Optikai kódok:
inkrementális / abszolút



● Hőmérés:
termoelem: -180°C ... 2300°C
NTC/PTC: -200°C ... 800°C
termisztor: 0 ... 100°C



hídban

nem kell generátor 10µV/°C

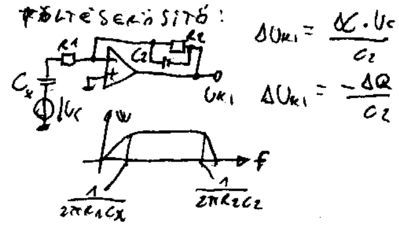
② Jelátalakítók
- ● Hídkapcsolások
- ● Áramgenerátoros:

● Fotodiódánál

transzimpedancia erősítő

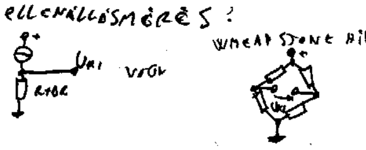
Ha R_V=1MΩ, I_{RZ}=30nA → 30mV jel
Nagyobb I_{RZ} áramhoz kisebb R_V kell
A műv. erősítő: kis U_{OFF}, I_{bias}
Kiszajú vékonyréteg ellenállás.
Probléma: szivárgási áram: szigeteléseken átszivároghat, és összemérhető a mérendő árammal.

● Kapacitív szenzor:
töltéserősítő:



$\Delta U_{ki} = \frac{\Delta C \cdot U_c}{C_2}$ $\Delta U_{ki} = -\frac{\Delta Q}{C_2}$

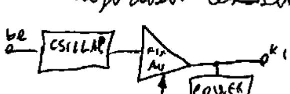
● Ellenállásmérés:



● Egyéb szempontok: linearitás, zajszűrés

③ Erősítők
Sokszor nagy erősítés kell (10µV → 5V, 10mV → 5V...)
Szabványos kimenő jelek a $1V_{pp}$ jelek. A források nagyon nem fix, széles tartományban változhat

Erősítő fajták:
- ● Sima műveleti erősítő
- ● Műszererősítő (differenciális be)
- ● LNA - rádiós előerősítő, 50Ω-os illesztéssel, kis A_U≈20dB
- ● Video erősítő: 75Ω-os,
- ● AGC: automatikus erősítés-szabályozású erősítő



Állandó kimeneti amplitúdóra ($1V_{pp}$) szabályoz (pl AD8367)

● Limiter: határolt

Nagyon nagy erősítés, tartja a maximál értéken is. Így lesz fix amplitúdójú a kimenet.

● Integráló erősítő

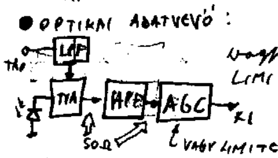
Kis áramok hatásának összegző jellegű mérésére

④ Kialakító
Szint, effektív érték, középérték mérés, jel megjelenítésének ellenőrzése, teljesítmény, f, $\frac{df}{dt}$, φ ... mérés.
Feladata még az A/D átalakítás. Eredménye 1 érték, 1 szabványos jel.

⑤ Ha a cél valami bonyolultabb, pl radar, képalkotás, Δφ mérés 1 alapjellel.
Ez még + jelfeldolgozás: analóg vagy digitális, hardveres vagy szoftveres.

- Érzékelő rendszerek
Lehetnek bizonyos részei (az 1.-től valameddig) egybe integrálva. Ezek az intelligens érzékelő-modulok. Kimenetük lehet (I2C, USB...)

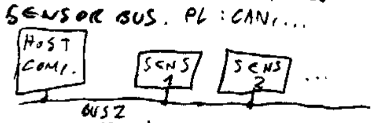
- Példák:
● Optikai adatvevő:



vagy AGC helyett LIMITER

Mivel a FD nagyimpedanciás, közel kell lennie a TIA-hoz, mert az 1MΩ távol áll a kábel 50Ω-jától.

- Intelligens érzékelők
többnyire identitásgép-hálózatot alkothat. A neve: SENSOR BUS. Pl: CAN,...



ÁRAMKÖRI ILLESZTÉSEK

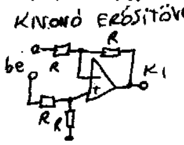
1. ANALÓG

– JELFOLYAM-RENDSZEREK TERVEZÉSE:

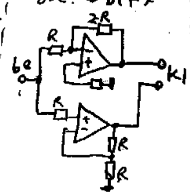
- BLOKKSZINTŰ TERVEZÉS (INTUÍCIÓ)
- BLOKKOKHOZ IC-K VÁLASZTÁSA
- BLOKKTERVEZÉS, IC-KIEGÉSZÍTÉS
- BLOKKOK ILLESZTÉSE EGYMÁSHOZ PARAMÉTEREK ALAPJÁN:
  U, I, dt, SZINTEK (MIN, MAX, DC...), Z, $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{h}}$

– ILLESZTÉS: DIFFERENTIAL 2 SINGLEEND (szimmetrikus/aszimmetrikus) erre aktív áramkör kell.

DIFF → SINGLEE.: KIVONÓ ERŐSÍTŐVEL



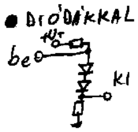
S.E. → DIFF



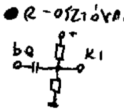
– SZINTELTOLÁS:

- TRAFÓVAL:

- DIÓDÁKKAL

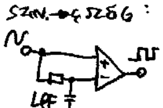


- R-OSZTÓVAL

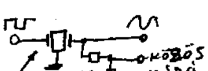


– ~~VETT~~ SZINUSZJELBŐL 4-SZÖGJEL

SZIN. → 4SZÖG:



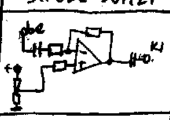
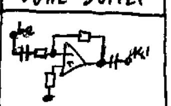
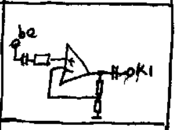
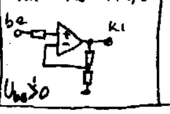
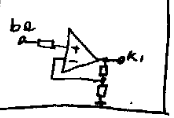
4SZÖG → SZIN.



KERÁMIA SZŰRŐ AZ ALAPHARMÓNIKUSRA

KÖZÖS MÓDÚ FESZ. (KÖZÉPÉRT.) SZIMM. FELDOLG.-HOZ

– MŰVELETI ERŐSÍTŐK SS: DS:

		SINGLE SUPPLY	DUAL SUPPLY
AC	INV		
AC	NEM INV	?	
DC	INV	NINCS ÉRTELME	
DC	NEM INV	CSAK RAIL TO R. I/O  $U_{be} \geq 0$	

KI/BEMENETEK LEHETNEK RAIL TO RAIL, VAGY SIMA. RR: tápvonal mintáját is elérheti a ki/bem. jel.

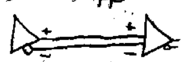
2. DIGITÁLIS

– DIGITÁLIS JELEK:

- TTL: BE: 0–0,8V, 2V–5V, 40μA
  KI: 0–0,4V, 2,4V–5V, 400μA

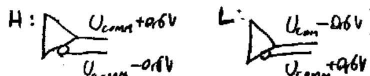
FAJTÁI:
- S – SCHOTTKY: gyorsabb 3ns, 20mW
- LS – KIS TELJESÍTM. SCHOTTKY 10ns 2mW, 1,1V KOMPARÁLÁSI SZINT.
- F – 3ns, 4mW
- ALS – 4ns, 1mW

- ECL – differenciális KI/BEMENET



EZEK A LEGGYORSABBAK

így kisebb a zavarkeltés.
A szabványos IMPEDANCIA: 50 Ω
50 Ω-os forrás, lezárás, és vezeték (MICROSTRIP)
BE: ±0,6V +3,6V$_{commonm.}$ 250μA
KI: ±0,9V +3,6V$_{commonm.}$



$U_T = 5V$
EZ VOLT A PECL. A NECL áramkörök ⊖ TÁPRÓL mennek, −1,2V körül van a közös m. fesz.
PECL: $U_{comm} = U_T - 1,3V$ NECL: $U_c = -1,3V$
0,1ns is lehet a késleltetés. 25mW

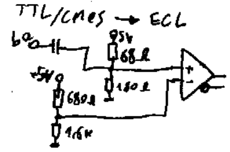
- CMOS

$U_T = 3V \ldots 15V$ kis teljesítményű bemenetek statikusan feltöltődhetnek, ezellen védő áramkör van beépítve, MAX 100V
BE: ±0,1μA L: 0–1,5V H: $U_T - 1,5V - U_T$
KI: ±24mA L: 0–0,1V H: $U_T - 0,1V - U_T$
Kapacitív terhelés korlátozva szokott lenni: MAX 50pF

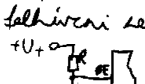
- LV TTL

kis energiafelhasználású, és telepes készülékekhez.
Többféle szabvány van:
$U_T =$ 3,3V; 2,2V; 1,8V; 1,6V; 1,5V...

– EZEK KÖZÖTT LEVEL TRANSLATOR IC-K váltják át a jeleket.
NÉHÁNY ESETBEN PASSZÍVAN IS LEHET:
TTL/CMOS → ECL



– NYOMÓGOMB ILLESZTÉS:
Kapuk bemenetét LEHÚZNI lehet, felhúzni nem szoktuk.



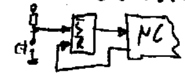
A NYOMÓGOMB r = 0 Ω – 200 Ω LEHET!

$\boxed{\frac{U_T}{R} > I_{be_{IC}}}$ (H) LEGYEN, $\boxed{U_T \cdot \frac{r}{R+r} < U_{be_{L_{MIN}}}}$ (L)

ÉS $\boxed{I_{be_L} \cdot r < U_{be_{L_{MIN}}}}$

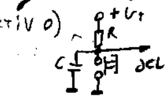
MIKROKONTROLLER BEMENETÉN:

- SIMA PORTLÁB: POLLING
- POLLY + $\bar{S}\bar{R}$ FLIP-FLOP



- MEGSZAKÍTÁSSAL

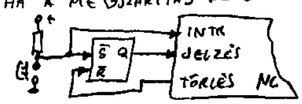
KONDIVAL LASSÍTVA A VÁLTOZÁST, hogy ellenőrizni lehessen, melyik bemenetre jött a jel.
(AKTÍV 0)



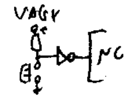
$\tau = R \cdot C \approx 0,1s$

- MEGSZ + $\bar{S}\bar{R}$ FLIP-FLOP

...
HA A MEGSZAKÍTÁS FELFUTÓ ÉLRE VAN.

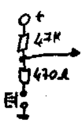


VAGY



- lassú, μC használ
- felmegy → jelez, rutin ellenőriz,
- elenged.

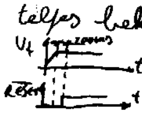
LEGEGYSZERŰBB:



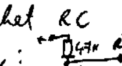
– RESET

μP SUPERVISORS: RESET áramkörök, tápfelügyelet, WATCHDOG áramkörök.

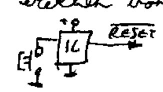
- POR: POWER ON RESET: bekapcsolás után, amíg stabilizálódik a tápfesz, ne működjenek a digitális áramkörök. Az MCU-k sok idő kell a teljes bekapcsoláshoz (200ms)



Ezt lehet RC taggal:

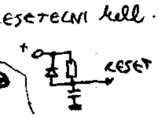


Vagy RESET generátor IC-vel: ezekben van MANUÁLIS RESET IS.

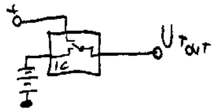


- BOR: BROWN OUT RESET: ha a tápfesz bizonyos időre megváltozik, RESETELNI kell.

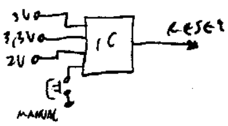
Továbbfejlesztésre:
[redacted]



– TÁPFELÜGYELET/LOW BATTERY INDICATION
Ellenőrzi egy IC a tápot, és ha nem jó, jelez, vagy azzal jelzi hogy lemerül az akksi.
BATTERY BACKUP:
Kritikus áramkörök működjenek akkor is, ha kivesszük a fő akksit. Ekkor átkapcsol a tartalékra, amit csak akkor használ.

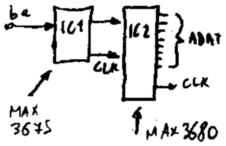


VAN TÖBBTÁPFESZES RESET-generátor is:



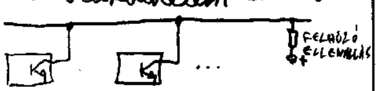
—VONALMEGHAJTÁS:
több IC-t kiszolgáló jeleket erősíteni célszerű BUSZ-MEGHAJTÓ IC-kkel. Hosszabb vezetékek esetén is.
Ilyen jelek még az ÓRAJEL, A RESET...
Van külön órajelelosztó IC.

—SOROS PÁRHUZAMOS ÁTALAKÍTÁS



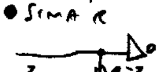
—ADAT ÚJRAIDŐZÍTÉS
CLOCK RECOVERY AND DATA RETIMER
Vett eredetileg digitális, de k. csillapodott, zajos jelekből használható digitális jelfolyamot állít elő tárolás(?)

—BUSZOK
vannak BUSZMEGHAJTÓK, ÉS BUSZVEVŐK csatlakoznak.
Tehát nem közvetlenül a DIGIT. áramkörök. Főleg akkor kell ha sok felé akarjuk ágaztatni a jeleket
Ha több adó van, akkor célszerű az OPEN COLLECTOR-os kimenetűeket használni a rövidzárvédelem miatt.

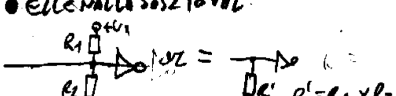


—BUSZVÉGEK LEZÁRÁSA:
az IC-k bemenetei nemlineárisak, A zavarokat csillapítani kell: LEZÁRÁSSAL
● SIMA R

TTL-nél IS!



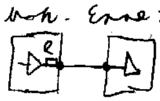
● ELLENÁLLÁSOSZTÓVAL:



de például: (TTL)
$(U_{TÁP} R_2)/(R_1+R_2) > 2,4V$ legyen

AZ IC-K ZAJTŰRÉSE MIATT NEM MUSZÁJ IDEÁLIS ($Z_0=R$) LEZÁRÁS: ha a ZAJTŰRÉS (TTL ≈ 0,4V) FELÉNEK MEGFELELŐ LENGÉST ENGEDÜNK MEG:
$\Gamma < 0,2$, $R_T = 1,5 Z_0$

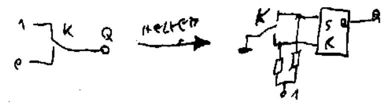
—LIVE INSERTION: (HOT SWAP)
Bizonyos digitális áramkörök képesek arra, hogy bekapcsolt állapotban ki/be csatlakoztathatók részegységeik.
Szintekre lehet csoportosítani az ilyen készülékeket:
A, B, AA ... (AA - építhető/összeállítható)
Bizonyos logikai IC-knek a bemenetein védő-diódák vannak, amik hibás működést eredményezhetnek, ha adott pillanatban csak az egyik modul kap tápfeszt, de a jelvezeték már áram alatt van. Erre: SOROS VÉDŐELLENÁLLÁS



A BICMOS IC-k kimenete lekapcsol, ha a táp lecsökken.
Léteznek beépített ESD-védő áramkörök. Mert az elektrosztatikus feltöltődés ilyenkor nagy problémát okozhat (4000V)
● 1 része a megoldásnak: Csatlakoztatáskor mindig már/még a GND csatlakozzon legyen! (elsőnek húzni ismételhető)
● Az adott IC-nek ellenőrizni kell, hogy alkalmasok-e erre (bemeneti ESD védelem)
● felhúzó ellenállásokat célszerű használni a bemeneteken.
● vannak BUSZKAPCSOLÓ IC-K (CBT), luxus ADÓ/VEVŐ ic-k (ETL)
Hasonlóak a BTL, GTL áramkörökhöz
● AMÚGY:
RÁDIÓTECHN. ÉVKÖNYV 2001/50. OLDAL.
● HA SZABVÁNYOS CSATLAKOZÓKAT (MICRO NET?) használunk, akkor meg kell nézni a szabvány leírását.

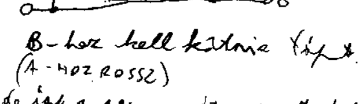
Az USB ilyen, az eredeti PCI nem...
—PCMCIA – kártyaolvasó: hitelkártya méretű, KÁRTYÁK csatlakoztatására.
54×85,6mm, 68 PIN.
3,3mm vagy 5mm vagy 10,5mm/15 vagy 18mm vastagok.
(TYPE I.–IV SZABVÁNYOK)
INSERTION:
– kártya felismerés
– kártya konfigurálás
– illesztő konfig
– kivétel

—KAPCSOLÓ PERGÉS MENTESÍTÉS:



HIGH SPEED PCB & GROUNDING (AMAZ fele!)

- 2 oldalas panel kell, mindkét oldalon GROUND PLANE
- külön analóg/digitális GND
- a vonalak hurkok, kicsik legyenek.
- vezetékek rövidek legyenek a reflexiók és a tap miatt.
- ~~[illegible]~~ szélesek legyenek, hogy R_S kicsi legyen, de KESKENYEK, hogy C_{SZ} kicsi legyen.
  a tápvezetékek mindenképp szélesek legyenek
- a kapcsolatban lévő alkatrészek közel legyenek egymáshoz, mivel rövidek a vezetékek, kis hurok...
- analóg áramkörök ne legyenek a csatlakozók közelében (TÁP, DIGIT, NAGYÁRAM), viszont a DIGITÁLISAK ott legyenek! (legrövidebb ⇒ ANALÓG)
- Kapcsolóüzemű tápban lehetnek nagyobb gyorsulások szerint: a táp távol legyen, ~~[illegible]~~ kondi kell a TÁP BEMENETRE
- Minden táphoz kell 3...20µ TANTÁL kondi, IC-k tápbevezetéseire 10n...100n KERÁMIA
- NINCS 1 FÖLDPONT ⇒ SOK VAN. Mindig a megfelelőt kell választani 1 alkatrész bekötéséhez.
- Ha egy áramkörben huzalozáskor vezetőfólkvezetékes nagyobb terhelések áramok is folynak, akkor a feszültségesés hozzáadódik a hasznos jelhez (≈ 1mΩ/cm, 5nV/400)
  A NAGY ÁRAMOK KÜLÖN VEZETŐPÁLYÁN FOLYJANAK!!!

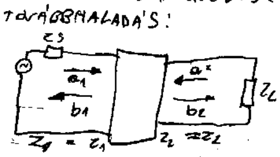


B-hez kell kötni a táp-t (A-hoz ROSSZ)
de így a jelimpedancia is egy ott, ahol a nagyáram is.

- Az áramot a GROUND-PLANE-ben:
  DC: a legkisebb ellenállású úton
  AC: a legkisebb IMPEDANCIÁJÚ úton → legkisebb INDUKTIVITÁSÚ ÚT → legkisebb területű hurok.
  (2 OLDALASNÁL egyszerre [illegible] kössük a 2 oldalt!)

S-PARAMÉTEREK

- HÁLÓZATOK leírására használják (NAGYFREKVENCIÁKON). Ezek alapján megjósolható a működésük. Nagyfrekvencián ez a legjobb leírás. 4PÓLUSOKRA → SPARAMÉTEREKKEL lehet őket leírni.
- SCATTERING PARAMETERS: (S-PARAM) SZÓRÓDÁSI PARAMÉTEREK
  jelfolyamba KAPCSOLÓDÓ 4PÓLUSON hogy SZÓRÓDIK (HALAD TOVÁBB) VAGY VERŐDIK VISSZA A JEL.
- HOGY MÉRIK:
  Más paramétereknél szakadásokat + rövidzárakat kell összeállítani a 4 PÓLUSON. Ezt RF-en nem lehet csinálni, ezért az S-PARAMÉTEREKET 50Ω IN/OUT illesztés mellett mérik. (főleg a csatlakozók, kapcsolók hiánya miatt az oszcillációkra)
- HULLÁM VISSZAVERŐDÉS ÉS TOVÁBBHALADÁS:



a_i - HALADÓ (SZÓRÓDÓ) HULLÁMOK:

$$a_i = \frac{U_i + Z_i I_i}{2\sqrt{|Re\, Z_i|}} \qquad Z_i = \frac{V_i}{I_i}$$

b_i - VISSZAVERT HULLÁMOK:

$$b_i = \frac{U_i - Z_i^* I_i}{2\sqrt{|Re\, Z_i|}}$$

EZEK NORMALIZÁLT FESZÜLTSÉGEK

$Z_i < {Z_1 \atop Z_2}$ } HOZZÁVEZETÉS HULLÁMELLENÁLLÁSA: $= Z_0$ (= 50Ω ÁLTALÁBAN)

- AZ S PARAMÉTEREKKEL EZEKET LEHET MEGHATÁROZNI.

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

tehát a szórt hullámok és az S-ek alapján a VISSZAVERŐDÉST

- MI: $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0}$ BEMENETI REFLEXIÓS TÉNYEZŐ. KI=0

$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0}$ KIMENETI REFLEXIÓS TÉNYEZŐ BE=0

$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0}$ TOVÁBBÍTÁSI ÁTVITEL KI=0 (BEÉKELÉS, BELÖVÉS ∓) INSERTION

$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0}$ VISSZATOVÁBBÍTÁSI TÉNYEZŐ, VISSZASZÓRÓDÁSI ERŐSÍTÉS BE=0-NÁL (INSERTION)

($S_{11} = \frac{U_{reflexiós}}{U_{visszavert}}$)

MINDEGYIK ILLESZTETT LEZÁRÁSOS KI/BEMENET MELLETT. (NORMALIZÁLT MENNYISÉGEK)

$S_{11} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$ [illegible] $Z_1 = Z_0 \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}}$

$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = r_{12} = \Gamma_{12}$

Z_1 = BEMENETI IMPEDANCIA, és Γ

$z_1 = Z_{0\,BEM.VEZETÉK}$ MERT S_{ik}-T ILLESZTETTEN MÉRIK

- A SMITH DIAGRAM (SMITH CHART)
  A KOMPLEX REFLEXIÓS TÉNYEZŐ (S_{11}) ábrázolása POLÁR KOORDINÁTA RENDSZERBEN
- Az impedanciákat (VEZETÉK végén) NEM A Z értékkel adjuk meg, hanem az ő reflexiós tényezőjükkel egy fix (50Ω, 75Ω, 100Ω, 600Ω) impedanciához viszonyítva. Így könnyebb az impedancia illesztés
- NORMALIZÁLT IMPEDANCIA:

$$z = \frac{Z_1}{Z_0} = r_1 + jx_1 = \frac{R}{Z_0} + j\frac{X}{Z_0}$$

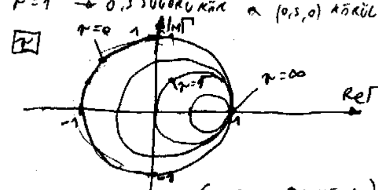
így $\Gamma_1 = S_{11} = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$ tehát $\Gamma_1(z_1)$

$$r = \frac{1 - \Gamma_{RE}^2 - \Gamma_{IM}^2}{1 + \Gamma_{RE}^2 - 2\cdot\Gamma_{RE} + \Gamma_{IM}^2}$$

$$x = \frac{2\Gamma_{IM}}{1 + \Gamma_{RE}^2 - 2\Gamma_{RE} + \Gamma_{IM}^2}$$

(Γ: REFLEXIÓS TÉNYEZŐ)

- ÁBRÁZOLÁS (NORMALIZÁLT IMPEDANCIA) VALÓS RÉSZ A KOMPLEX Γ RENDSZERBEN:
  MINDEN r értékhez tartozik 1 KÖR, a körök középpontja a valós tengelyen van, a jobb szélük közös (+1,0) PONT.
  r = ∞ (SZAKADÁS) → 0 SUGARÚ KÖR
  r = 0 (RÖVIDZÁR) → 1 SUGARÚ KÖR ORIGÓ KÖRÜL
  r = 1 → 0,5 SUGARÚ KÖR A (0,5,0) KÖRÜL



(KONSTANS r KÖRÖK)

KÖZÉPPONT: $\left(\frac{r}{r+1}; 0\right)$ SUGÁR = $1/(1+r)$

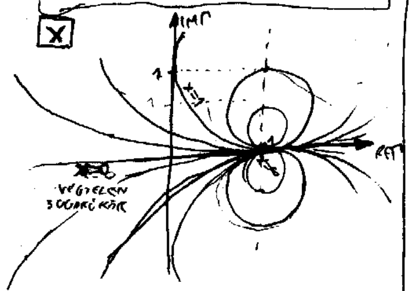
A KÉPZETES RÉSZ HASONLÓAN, DE 1 X értékhez 1 /V (NAGYKÖR) tartozik. TEHÁT KÖRÖK.
MINDEN kör tartalmazza az (1;0) PONTOT. ⊕X → FELSŐ FÉLSÍK

⊖X → ALSÓ FÉLSÍK

Mindegyik kör középpontja az $Re\{\Gamma\}=1$ függőleges egyenesen van.

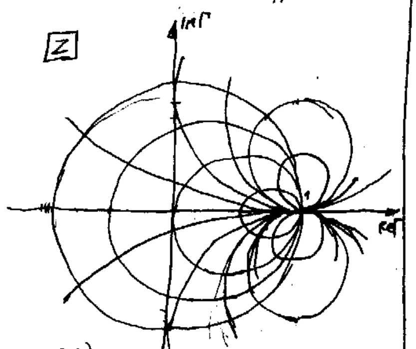
KÖZÉPPONT: $(1, 1/X)$ SUGÁR $=\frac{1}{X}$

$\boxed{X}$



A TELJES DIAGRAM:

$\boxed{Z}$



(Z.S.C) (EZ AZ IMPEDANCIA-SMITH-DIAGRAM)

— ALKALMAZÁSA: $Z \rightarrow r, x \xrightarrow{ÁBRA} \Gamma$ vagy fordítva.

— KARAKTERISZTIKUS IMPEDANCIA: AMIHEZ VISZONYÍTUNK (50 Ω)

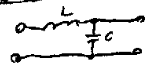
— MIRE JÓ (S.C.) sorba kapcsolt elemekhez kapcsolni újabb elemeket egyszerű: a körök mentén kell elmozdulni.

— PÁRHUZAMOS KAPCSOLÓDÁSOK (ÚJ ELEMEK PÁRHUZAMOSAN) hasonlóan az impedanciással, csak:

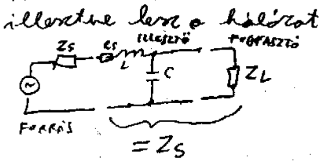
ÚJ DIAGRAMOT KELL RAJZOLNI: (ADMITTANCIA-SMITH DIAGRAM)(Y.S.C) EZ ANNYI, HOGY az origóra elforgatunk minden pontot 180°-kal.
így ÚJ ELEMEK hozzáépítése PÁRHUZAMOSAN LESZ EGYSZERŰ

— ÁRAMKÖR REFLEXIÓS TÉNYEZŐJÉNEK a meghatározása (50 Ω-hoz VISZ.)
Mint 1 fotonállna felvételnél, egyenként hozzuk be az elemeket a rajzból (vagy helyettesítő képből) a SMITH-DIAGRAMBA.
ÍGY NEMCSAK Γ, de Z_e IS meghatározható.
(A legmélyebben lévő alkatrésztől haladva a KAPOCS-PONTOKIG)

— MÁSIK ALKALMAZÁS: ✱
tetszőleges IMPEDANCIÁJÚ forrás, és nyelő esetén illesztő hálózat MEGHATÁROZÁS

Ez lehet egy  -tag, ami lehet 1 kábel is.

ÍGY MINDKÉT (IN/OUT) PONTON illesztve lesz a hálózat.



- ehhez NORMALIZÁLNI KELL Z_S, Z_L-t valami hozzájuk közel eső értékhez, vagy 50 Ω-HOZ VAGY $Z_N=Z_S$
- ELHELYEZNI Z_S^* (D PONT) Z_L (A PONT)-T diagramon.
- A-T TÜKRÖZZÜK AZ ORIGÓRA (A')
- MAJD óramutató járásával egyező irányban haladunk 1 konstans r körön (l_1) a függőleges tengelyig (B) VAGY ADDIG, AMÍG MEGFELELŐ C-T NEM KAPUNK.
- B-t tükrözzük origóra (B')
- haladunk 1 konstans r körön óramutatóval egyező irányban (l_2) amíg a D-ket a konstans X körig nem értük D'.
- innen D-be konstans X körön át. l_3. (az R_1 és R_2 közötti táv)
- ÉRTÉKEK: $C=\frac{l_1}{\omega Z_N}$ $L=\frac{l_2 Z_N}{\omega}$ $R=R_2-R_1$

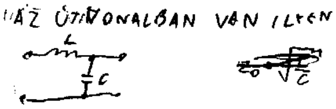
Ez csak akkor jó, ha $\frac{1}{r_L}<r_S$

— Ha $\frac{1}{r_L}>r_S$:

vagy egyazon félsíkon van A és D: utat kell találni A-ból D-be.

UTAK:
- óramutatóval egyező irány az Y.S.C. diagramon → PÁRH. KOND. (kondikkal) (KONST R KÖRÖN)
- óramutatóval egyező irány a ZSC diagramon: SOROS L (KONST R KÖRÖN)
- KONSTANS X körön kifelé SOROS R ZS.C-n
- KONSTANS X KÖRÖN KIFELÉ YSC-n: PÁRH. R
- ÓRAJÁRÁSSAL ELLENTÉTESEN Y.S.C-n az PÁRHUZAMOS L
- ÓRAJÁRÁSSAL ELLENTÉTESEN ZSC-n: az SOROS C.

— HÁLÓZAT ÚTVONALBAN VAN ILYEN:



[redacted]

— UGYANAZ AZ ÁBRA használható a Z.S.C.-nek, mint az Y.S.C-nek. Csak átlépéskor (SOROS/PÁRH KAPCS) tükrözni kell az aktuális pontot az origóra.

— Ha úgyanúgy választjuk meg Z_N-t, akkor $\frac{1}{r_L}=r_S$ akkor csak 1 L-C hálózat kell, [redacted]

$r_S=\frac{R_S}{Z_N}$ $r_L=\frac{R_L}{Z_N}$

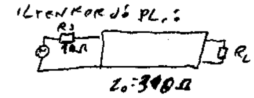
tehát ha

$$Z_N=\sqrt{R_S\cdot R_L}$$

— HA AZ $_N$LC egy kábel: $Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}=Z_N$

(de adott frekvencián adott a kábelhossz, mint L,C adott, és nem L', C' EZ NEM BIZTOS)

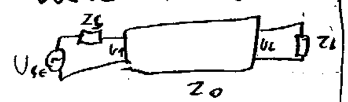
ILYENKOR JÓ PL.:



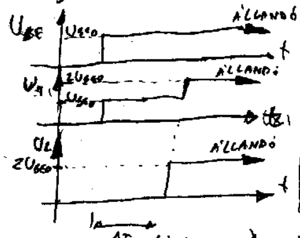
PL DIGITÁLIS jeleknél

— AZ KOMPENZÁLÁS LÉNYEGE, HOGY egyik oldalról nézve a másik oldal olyan legyen, mint ahonnan nézzük.

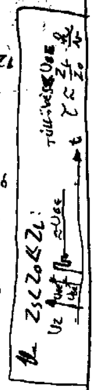
– ILLESZTETLENSÉGEK



Ha $Z_S = Z_0 \ll Z_L$:

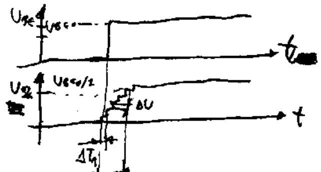


ΔT - késés $= \frac{l}{v} = \frac{l \sqrt{\varepsilon_r}}{c}$



Ha a DIGITÁLIS jel (4 szög) periódusideje /6 -nál kisebb ez a ΔT, akkor OK.

Ha $Z_L = Z_S \gg Z_0$



$\Delta T_1 = \frac{l}{v}$ $\quad \Delta U_1 = U_{SE} \cdot \frac{Z_0}{Z_L}$

$\tau_{80\%} = \frac{Z_L}{Z_0} \cdot \frac{l}{v}$

SZINUSZJELNÉL

ÁLLÓHULLÁM IS KELETKEZIK, ha $Z_L > Z_0$ AMPLITÚDÓ MEGNŐ a felét azonnal kirakozik. (Ha $Z_S = Z_0$ → csak 1X NŐ MEG 2SEC AMPL)

S-PARAMÉTEREK - FOLYTATÁS

– az eredeti S paraméterek úgy adja meg a viszonyokat, hogy átfolyások ~~(...)~~ teljesítményeket:

$|S_{11}|^2 = \frac{P_{VISSZAVERT(BEM)}}{P_{BE}}$

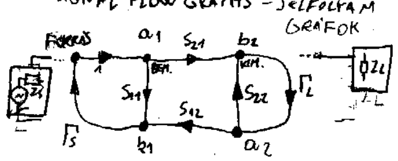
$|S_{22}|^2 = \frac{P_{VISSZAVERT(KIM)}}{P_{KI}}$

$|S_{21}|^2 = \frac{P_{BE}}{P_{KI}}$ = TELJESÍTMÉNYERŐSÍTÉS (JELÁTALAKÍTÓ = TRANSDUCER)

$|S_{12}|^2 = \frac{P_{KI}}{P_{BE}}$ = VISSZAÁRAMLÓ TELJESÍTMÉNY ARÁNY A KIMENETRŐL A BEMENETRE (ÁTHALLÁS)

— S_{11}, S_{22}: ILLESZTÉSI VESZTESÉGEK

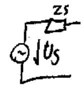
— SIGNAL FLOW GRAPHS - JELFOLYAM GRÁFOK



– JELÁTALAKÍTÓ TELJESÍTMÉNYERŐSÍTÉS

$$A_P = G_T = \left|\frac{b_2}{b_S}\right|^2 (1-|\Gamma_S|^2)(1-|\Gamma_L|^2)$$

ahol $b_S = \frac{U_S \sqrt{Z_0}}{Z_S + Z_0}$



$$G = \frac{P_{LOAD}}{P_{FORRÁSBÓL\ LEVEHETŐ}}$$

és $b_2 = \frac{U_{KI} - Z_L I_L}{2\sqrt{|Re\, Z_L|}}$

a kimeneten haladó HULLÁM

– JELÁTALAKÍTÓ BEMENETI reflexiós tényezője tetszőleges kimeneti terhelésnél:

$$S_{11}' = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_L}{1 + S_{22}\Gamma_L}$$

– FESZÜLTSÉGERŐSÍTÉS:

$$A_U = \frac{S_{21}(1+\Gamma_L)}{(1-S_{22}\Gamma_L)(1+S_{11})}$$

– az S paramétereket mérték különböző frekvenciákon ~~mérni~~.

S_{11}, S_{22} SMITH DIAGRAMON ábrázolható, több frekvencia-görbékkel. Ha „SEPRŰNK" a frekvenciával.

ilyesmi MAJDNEM-KÖRÍV görbéket kapunk.

S_{21}, S_{12} BODE vagy POLÁR diagramon lehet ábrázolni.

FÁZISKÉSÉS: ÖSSZETEVŐBŐL: LINEÁR FÁZISÚ KÉSZ (ÁLLANDÓ IDŐKÉSÉS) ÉS FÁZISTORZÍTÁS . EZ AZ ÖSSZEGE.

– ERŐSÍTŐTERVEZÉS (KESKENYSÁVÚ)

S_{12} kicsi → a bemenet független a kimeneti terheléstől (FESZÜLTSÉGILEG, ÉS IMPEDANCIAILAG)

Hogy ne gerjedjen:

$$|S_{21\,dB}| < |S_{12\,dB}| \text{ kell!}$$

Lásd DISZKRÉT TRANZISZTOROS erősítőket alkalmaznak nagyobb frekvenciákon. (GHz)

Ha $|S_{21\,dB}| \ll |S_{12\,dB}|$

akkor S_{12}-t elhanyagolhatjuk. $S_{12} = 0$ (nem dB)

$A_{U_{MAX}} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|}$ – MAX STABIL ERŐSÍTÉS

KITÉRŐ

$$A_{U_{MAX}} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|} \cdot M$$ A MAX ~~KÖNNYÍTÉSES~~ ERŐSÍTÉS

$$M = \begin{cases} 1 & \text{ha } K < 1 \\ K - \sqrt{K^2 - 1} \end{cases}$$

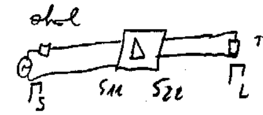
ahol K - STABILITÁSI FAKTOR!

$$K = \frac{1 + |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 \cdot |S_{12}|\,|S_{21}|}$$

ERŐSÍTÉS (TELJ.) : $A_P = A_0 \cdot A_1 \cdot A_2$

$$A_P = |S_{21}|^2 \cdot \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - S_{11}\Gamma_S|^2} \cdot \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2}$$

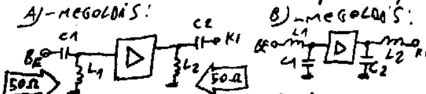
ahol



MAX ERŐSÍTÉS: $S_{11} = \Gamma_S$ és $S_{22} = \Gamma_L$ -nél

ILLESZTŐ HÁLÓZATOK kellenek a kimenetre és a bemenetre, ez a hálózat transzformálja az 50Ω-os terhelést az erősítőhöz. Ezek ~~...~~ -nisadfoku tagok.

A)-MEGOLDÁS: B)-MEGOLDÁS:



S_{11} -ből ~~(BEMENETI)~~ -ből és S_{22} -ből is eljutni a KONSTANS Z_0 (VEZETÉK Z_0-JA / VAGY 50Ω) kör - és az vízszintes tengely (bal) metszésébe.

A) ÓRAMUTATÓ JÁRÁSSAL egyező irányokban mozgunk B+FORDÍTVA

● S_{11} -ből konstans körön eljutni az Z_0 KONSTANS R KÖRIG. Ez a PÁRHUZAMOS REAKTANCIA (X_p'). az ábrázolás: ΔX'

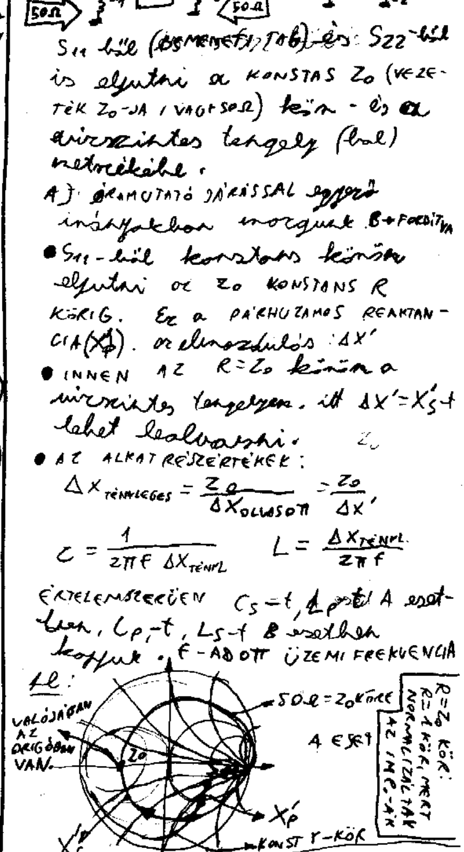
● INNEN AZ $R = Z_0$ körön a vízszintes tengelyen. itt $\Delta X' = X_S' +$ lehet leolvasni.

● AZ ALKATRÉSZÉRTÉKEK:

$$\Delta X_{TÉNYLEGES} = \frac{Z_0}{\Delta X_{OLVASOTT}} = \frac{Z_0}{\Delta X'}$$

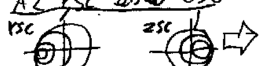
$$C = \frac{1}{2\pi f\, \Delta X_{TÉNYL}} \qquad L = \frac{\Delta X_{TÉNYL}}{2\pi f}$$

ÉRTELEMSZERŰEN C_S-t, ~~A~~ A esetben, C_P-t, L_S-t B esetben kapjuk. f - ADOTT ÜZEMI FREKVENCIA



ADMITTANCIA-SMITH-DIAGRAMÉS IMP. S.D.

AZ YSC ÉS A ZSC:



EGYMÁSRA KELL RAJZOLNI.

SZÉLESSÁVÚ ERŐSÍTŐ

ILLESZTÉSE már jóval bonyolultabb.

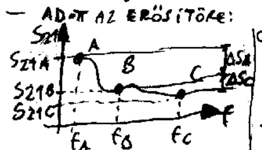
1π és 2 db illesztőhálózat kell (kivéve ha eleve 50Ω-os az erős.)

A HÁLÓZAT:

– ez 2 feladatot lát el:

1. IMPEDANCIÁK ILLESZTÉSE (reflexiós csökkentés)
2. Erősítő $A_p(f)$ frekvencia karakterisztikájának az egyenletessé tétele.

– ADOTT AZ ERŐSÍTŐRE:



EZT ÚGY KOMPENZÁLJUK hogy $S_{21A_{új}} = S_{21C_{új}} = S_{21B}$ legyen

$A_p = A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \; \left[\frac{W}{W}\right]$

ALAP $|S_{21}|^2$ — BEMENETI HATÁS — KIMENETI HATÁS

– ILLESZTÉS: S_{22} (SMITH-RE OBMANIT)

- BERAJZOLNI S_{22}-t f_A-n, f_B-n, és f_C-n
- ÁLLANDÓ ERŐSÍTÉSŰ KÖRÖK f_A-n, f_B-n, és f_C-n:

PL f_A-n: f_A pont és az origó közé egyenes rakunk. A sokon- ~~oldali origótól~~ kp-ra levő kör közepe. g-tényező:

$$g_{2a} = A_{2_{fA}}(1-|S_{22}|^2)$$

SUGARA:

$$r_{2a} = \frac{\sqrt{1-g_2}\,(1-|S_{22}|^2)}{1-|S_{22}|^2\cdot(1-g_2)}$$

$$r_2 = \frac{1-g_2|S_{22}|}{1-|S_{22}|^2(1-g_2)}$$

- $\Delta|S_A|^2$ és $\Delta|S_C|^2$ számítása

$|S_{21B}|^2 = |S_{21_{végső}}|^2$

ezeket a megfelelő (f,) körökhöz hozzárendelni.

$A_{2_{fB}} = 0\,dB \qquad A_{2_{fB}} = \Delta|S_A|^2$

$A_{2_{fC}} = \Delta|S_C|^2$.

- X_S', X_P' relatív admittanciák számítása a SMITH-DIAGRAM alapján: f_B-n legyen illesztve a dolog, mint a keskenysávú erősítőnél.

$\Delta X'$-k kellenek,

?

- ÉRTÉKEK:

$L_S = \frac{\Delta X' \cdot Z_0}{2\pi f_C} \qquad L_P = \frac{Z_0}{\Delta X_1' \cdot 2\pi f_A}$

PARAMÉTERÁTVÁLTÁSOK

$$S_{11} = \frac{(h_{11}-1)(h_{22}+1) - h_{12}h_{21}}{(h_{11}+1)(h_{22}+1) - h_{12}h_{21}}$$

$$S_{12} = \frac{2h_{12}}{(h_{11}+1)(h_{22}+1) - h_{12}h_{21}}$$

$$S_{21} = \frac{-2h_{21}}{(h_{11}+1)(h_{22}+1) - h_{12}h_{21}}$$

$$S_{22} = \frac{(1+h_{11})(1-h_{22}) + h_{12}h_{21}}{(h_{11}+1)(h_{22}+1) - h_{12}h_{21}}$$

$$h_{11} = \frac{(1+S_{11})\cdot(1+S_{22}) - S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}}$$

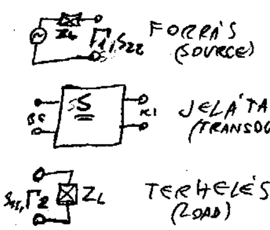
$$h_{12} = \frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1+S_{22}) + S_{12}S_{21}}$$

$$h_{21} = \frac{-2S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22}) \quad S_{12}S_{21}}$$

$$h_{22} = \frac{(1-S_{22})(1-S_{11}) \quad S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1+S_{22}) \quad S_{12}S_{21}}$$

EGYÉB

– RF áramkörökben 3 féle blokk van, kétkapuk vagy szimpla rezetékek, vagy TÁVVEZETÉK. (itt van $z_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$) (2 féle) a 3 elem:



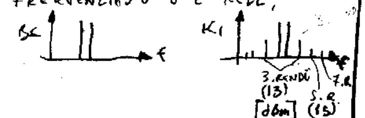
Ezekat kell tudni illeszteni egymáshoz.

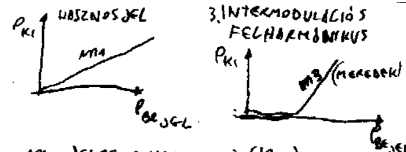
IP3

HARMADRENDŰ METSZÉSPONT

– INTERMODULÁCIÓS TORZÍTÁS: Erősítőbe bemegy 2 jel (f_1, f_2) a kimeneten megjelenik $f_1, f_2, f_1+f_2, f_1-f_2$

– MÉRÉSE: (IMT): 2 közeli frekvenciájú jel kell,



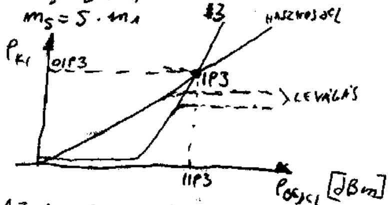


m_1 – JELRE A MEREDEKSÉG $\left(\frac{dP_{KI}}{dP_{BE}}\right)$

m_3 – a 3. INT. MOD. FELH. meredeksége

$m_3 = 3 \cdot m_1$

$m_5 = 5 \cdot m_1$



AZ IP3 PONTOT NEM CÉLSZERŰ MEGKÖZELÍTENI, SEM a P_{BEJEL}-LEL

TEHÁT:

IIP3: AZ a P_{JELBE} [dBm] ahol a 3. „FELHARMONIKUS" TELJESÍTMÉNYE = A HASZNOS JELÉVEL A KIMENETEN

– EZ PERSZE FREKVENCIAFÜGGŐ

– S-PARAMÉTEREK SPEC. ÉRTELMEZÉSE

- INSERTION LOSS := ATTENUATION $S_{21} \mp$ CSILLAPÍTÁS. jelátalakító csillapítása. többnyire passzív hálózatok, kábelek... (FORWARD TRANSMISSION COEFFICIENT) CSILLAPÍTÁS $= 20\lg\left|\frac{U_{KI}}{U_{BE}}\right|$
- RETURN LOSS = (REFLECTION LOSS) ECHO$\mp$visszatérő veszteség $\mp S_{11}$ =

$RL = -10\lg\frac{P_2}{P_1} = 20\lg\frac{Z_0+Z_2}{Z_0-Z_2}$

P_1 beérkező teljesítmény, P_2 a visszavert.

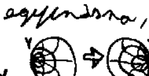
Reflexiós tényező: r_2 áramra, feszültségre de teljesítményre: r_2^2

$RL = 10\lg r_2^2$

- ÁLLÓHULLÁM-ARÁNY: $VSWR = \sigma = \frac{U_{MAX}}{U_{MIN}} = \frac{1+|r_2|}{1-|r_2|}$
- INVERSE TRANSMISSION COEFFICIENT: S_{12}

2 FÉLE SMITH DIAGRAM VAN!

– AZ EGYIKNÉL A ZSC, ÉS AZ YSC nem illeszthedik egymásra, de ott átlépéskor nem kell tükrözgetni (TÜKRÖZÉS)



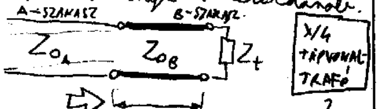
a másiknál pedig (EGYSZERŰ) tükrözni kell, de ott egymásra a vonalak a 2 diagramon.

– IMPEDANCIAILLESZTŐ HÁLÓZATOK

Céljuk a visszaverődések, és veszteségek megszüntetése. (RETURN LOSS) $P_{ÁTM} \cdot S_{11}$, $P_{KI} \cdot S_{22}$)

Ezek adott frekvencián (keskeny sávú) használhatók.

– LEGEGYSZERŰBB illesztő hálózat: λ/4 hosszúságú vezetékdarab.



$$Z_{be} = \frac{Z_{OB}^2}{Z_t}$$

(HA A Z_t a B-SZAKASZTÓL $d = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$ TÁVOLSÁGRA VAN, AKKOR Z_t helyett $\frac{Z_{OA}^2}{Z_t} = Z_t'$ - kell (λ/4 PÁRATLANAD RÉSZE) $Z_{OA}\ Z_{OB}\ Z_{OA}$)

A vezetékpótlásnál Z_{OB} az állítandó paraméter.

- Z_t VALÓS (OHMOS):

$$Z_{OB} = \sqrt{Z_{OA} \cdot Z_t}$$

- Z_t KOMPLEX:

$$Z_t' = Z_{OA}^2 \cdot \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{(VALÓS LESZ)}$$

ahol $\Gamma = \frac{Z_t - Z_{OA}}{Z_t + Z_{OA}}$ így

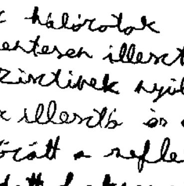
$$Z_{OB} = \sqrt{Z_{OA} \cdot Z_t'}$$

- HA A PÓTLÁS HOSSZA L, nem feltétlenül λ/4: $Z_t = R_t + j \cdot X_t$

$$Z_{OB} = \frac{\sqrt{Z_{OA} \cdot R_t - R_t^2 - X_t^2}}{\sqrt{1 - R_t/Z_{OA}}} \Rightarrow$$

$$tg(\beta L) = \frac{Z_{OB} X_t}{Z_{OA} R_t - Z_{OB}^2} \Rightarrow L$$

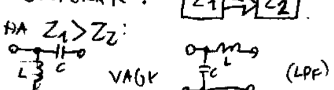
– LC hálózatok veszteségmentesen illesztenek. A szimulációk nyilván nem. Az illesztő és az illesztett között a reflexiós tényező adott frekvencián kicsi



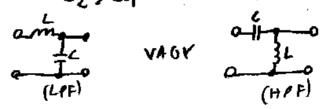
Ezek lehetnek aluláteresztő, vagy felüláteresztő szűrők, f_0 a töréspont frekvencia.

– STRUKTÚRÁK: $\boxed{Z_1} \Rightarrow \boxed{Z_2}$

- HA $Z_1 > Z_2$:



- HA $Z_2 > Z_1$



- VANNAK MÁS STRUKTÚRÁK IS: Π és T alakú alul/felül áteresztő, kettős 2LC tagos, és SÁVSZŰRŐ ALAKÚAK.

– PARAMÉTERSZÁMÍTÁSRA

Van HTML számító FÁJL: WWW-INST.EECS.BERKLEY.EDU/~WETHEREL vagy nekem CD-n.

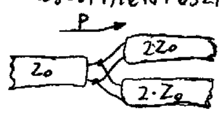
VAGY: SMITH DIAGRAMON

– EZEKNEK KICSI A SÁVSZÉLESSÉGE. NÖVELÉS: TÖBB LÉPÉSBEN KELL TRANSZFORMÁLNI. (TÖBB LC HÁLÓZAT)

RF ELEKTRONIKA

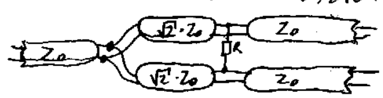
– JELKELTÉS: GUNN-OSZCILLÁTORRAL. benne PN átmenet nélküli GUNN-DIÓDA van.

– TELJESÍTMÉNYOSZTÓ (ELOSZTÓ)



akkor illesztett csak.

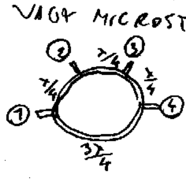
Ha csak Z_0-os kábel van, imp.-transzformátorok kellenek. Ezek. Ezek lehetnek λ/4 tápvonaltrafók: $\sqrt{2} Z_0$-lal. Ezek a tulajdonságainak a javítására $R = 2 \cdot Z_0$ ellenállás kell. Ez így a WILKINSON-FÉLE TELJESÍTMÉNYOSZTÓ.



A kicsatoló ~~rajz~~ ennek a fordítottja.

– GYŰRŰS HIBRID

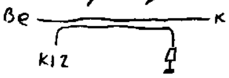
Egymással ellenfázisban lévő jelek előállítására, teljesítményfelezésre. Az IRÁNYCSATOLÓK 1 fajtája. λ/4-es IMP.TR.-ok vannak benne és (70,7 Ω-os 50 Ω-os RENDSZERBEN) $\frac{Z_{KI/BE}}{\sqrt{2}} = Z_0$ vezetékekből áll. 75 Ω KOAX, VAGY MICROSTRIP.



ELLENÜTEMŰ:
①: BE, ②: KI1,
③ — 50 Ω, ④: KI2

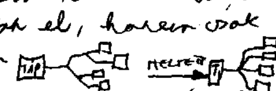
AZONOS FÁZISÚ:
③: BE, ②: KI1 (90°)
①: — 50 Ω, ④: KI2 (90°)

– CSATOLT VONALAS IRÁNYCSATOLÓ jelátvitel áthallással. iránvérzékeny. teljesítményszétosztás...

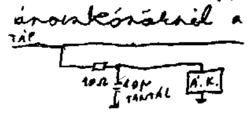


RF PCB

- kis impedanciásak legyenek a vezetőpályák: KIS L: ground plane legyen a vezetékek alatt. KIS C: vékony vezetékek, távol.
- digitális áramkörök nagy tápzajt keltenek, ami miatt az analóg áramköröktől külön táp kell.
- GROUND PLANE kell, amit a negatív táphoz kötünk. Célja az árnyékolás, induktivitáscsökkentés, tápvonalrövidítés.
- Ha antenna van a közelben: és nem megfelelőek a lezárások, DC offszet keletkezhet az analóg áramkörökben. Emellett az AC zavarás mellett. (120 dB körül az áthallási csillap.)
- DECOUPLING: kondikat kell tenni minden (+) táplábra. Ezek kerámiakondik. (100nF) A típusukat katalógusban ellenőrizni kell, hogy az adott (zavar) frekvencián jók-e!
- TÁPELOSZTÁS: Ne több helyen ágazzon el, hanem csak az elején



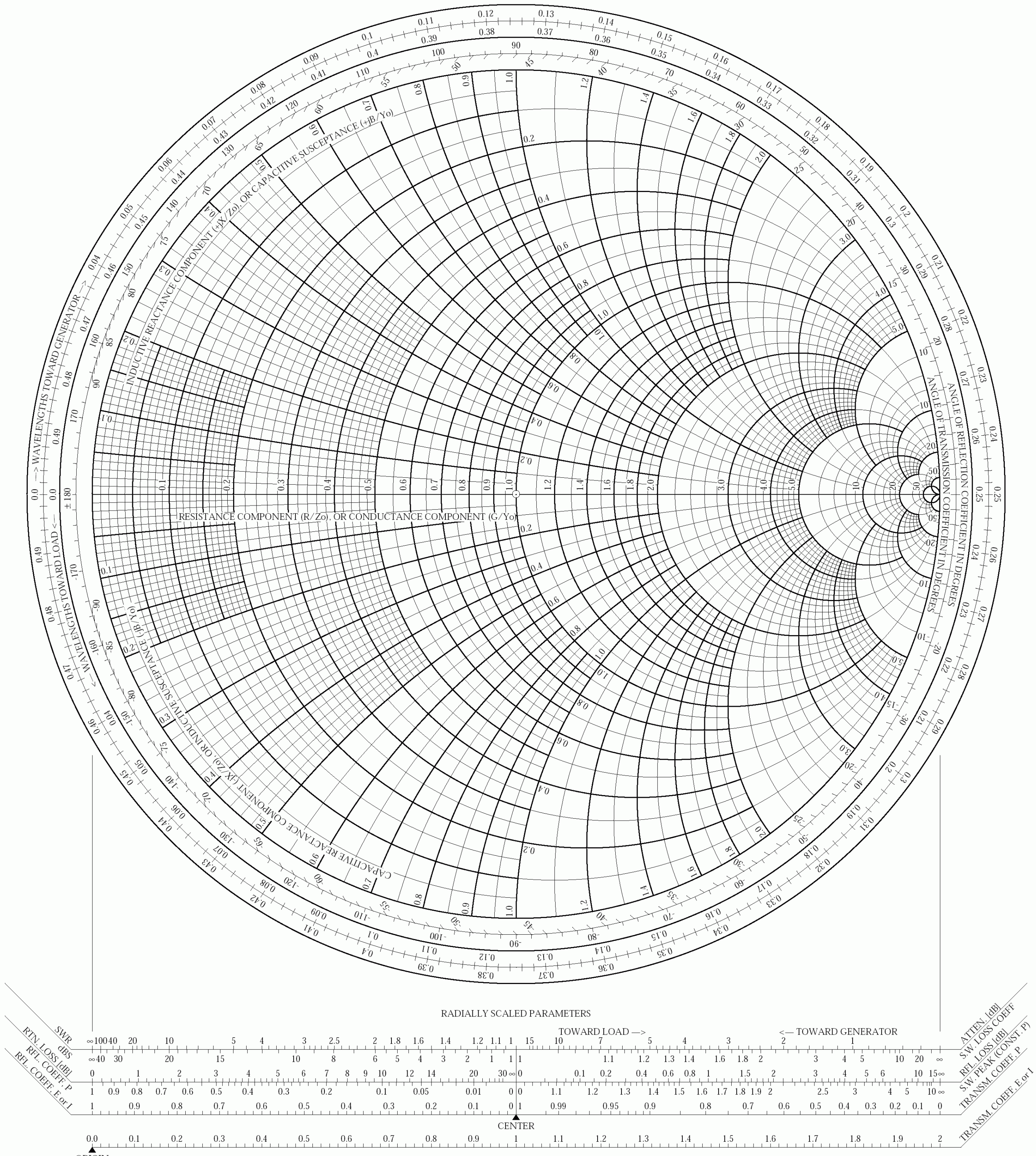
Mindegyikre DECOUPLING a végére. kis áramú nagyon érzékeny áramköröknél a DECOUPLING:



- ügyelni kell, hogy a GROUND-PLANE-en minden út rövid és széles legyen. vezeték, VIA-eltolással lehet segíteni.
- nagyfrekvencián SKIN-hatás miatt szélesíteni kell a vezetékeket (622 MBPS → 12 MIL)
- CSATLAKOZÓKNÁL katalógusból ellenőrizni kell a határfrekvenciát. kábelekre ugyanígy.
- ÁTHALLÁS: N db vezeték között a csatolást N×N-es C és L MÁTRIXSZAL jellemezzük.

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



KÁBELEK

- IMPEDANCIÁK
- 75 Ω – elterjedt antennákhoz jól illeszthető. VIDEOJELEKHEZ IS.
- 50 Ω MINIMUM a SKIN-EFFECT (áramkiszorítás). PANELON IS JÓ
- 27 Ω RAMBUS RAM.
- KISFREKVENCIÁN NAGYIMPEDANCIÁS vezetékek, nagy R_{LOAD}, kis R_{SOURCE}
- AZ 50 Ω KOMPROMISSZUM, a nagy teljesítmény (30 Ω), nagy fesz (66 Ω) és a kis veszteség (75 Ω) között. A MAI KOAX KÁBELEKNEK 51,9 Ω (50 Ω) a minimális veszteségi helyük
- 150 Ω / 100 Ω ÁRNYÉKOLT SODORT ÉRPÁRHOZ. 2 ÉR + 1 ÁRNYÉK.

- ÁTVITEL / KÁBEL TESZTELÉS

VEKTOR-HÁLÓZAT-ANALIZÁTORRAL (VNA) vagy TDR oszcilloszkóp + JELFORMA generátor (PATTERN G.). DIFFERENCIÁLT IN/OUT

- KÁBELEKNÉL:

S_{21} – INSERTION LOSS: ÁTVITELI VESZTESÉG

S_{11} – RETURN LOSS: VISSZATÉRÉSI VESZTESÉG.

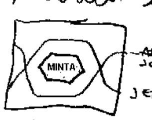
ezeket a frekvencia függvényében mérik.

- EYE-DIAGRAM (SZEM DIAGRAM)

AZ ÁTVITT 4SZÖGJEL, VAGY ADATFOLYAM ELLAPULÁSÁT MÉRJÜK VELE.

ADAT → Y, CLK → X SZKÓP

PL. A VEVŐ ÁRAMKÖRNEK KELL EL EGY ILYEN t_r, T_{TOP}, t_f arány. Ezt lehet leolvasni, hogy ettől laposabb-e a jel vagy nem



HA ITTÓL ELLAPUL, AKKOR ISI-LESZ, NEM LESZ DETEKTÁLHATÓ A JEL.

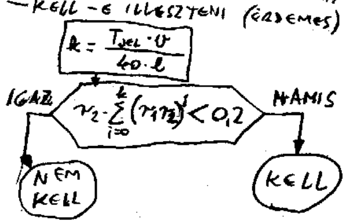
MÉRÉS: SZKÓPPAL y ÉS y INVERZE EGYSZERRE MEGJELENÍTVE, EGYMÁSRA TOLVA. HIBA OKA: HULL.I.C. CSATORNA, VAGY REFLEXIÓ

- HÍRADÁSTECHNIKAI KÁBELEK

SZIMMETRIKUS KÁBEL → MAX 600 kHz ÁTHALLÁS KÖTEGNÉL (ÉRPÁR, SZALAGKÁBEL) 5 MHz – ELLAPITÁS

KOAX KÁBEL → 100 kHz … 60 MHz

- KELL-E ILLESZTENI (ÉRDEMES) LEZÁRÁST:



- SIGNAL INTEGRITY:
- ÁTHALLÁS, reflexiók, torzítás, táptüske, csillapítás, veszteség, kisugárzás.
- Ezeket kell minimalizálni.

- ÁTVITEL SÁVSZÉLESSÉGIGÉNYE:

ANALÓG: $F = f$

DIGITÁLIS: $f = \frac{0{,}3}{t_r}$

- Ha $\boxed{\lambda \leq 10 \cdot l}$ akkor kell TÁVVEZETÉKMODELLEL SZÁMOLNI

$\lambda = \frac{v}{F} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} f}$

DIGIT: $\boxed{\lambda = \frac{c \cdot t_r}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot 0{,}3}}$

tehát ezt a λ-t a kábelhosszhoz kell hasonlítani.

Ha $\lambda > 10 l$ akkor a kábel csak 1 VEZETÉK (rövid vezeték)

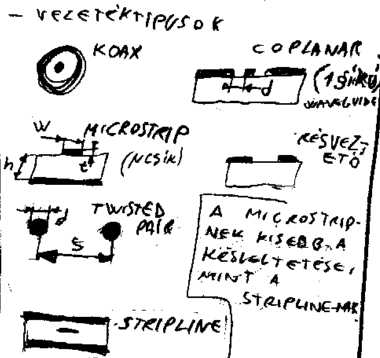
HA DIGITJELRE $\lambda = \frac{c \cdot t_r}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot 0{,}3} > 10 \cdot l$ AKKOR NEM KELL TÁVVEZ. PARAM. – SZÁMOLNI

- PANELON ÁLTALÁBAN:

$25\,cm = l \Rightarrow F > 55\,MHz$

$l = 2{,}5\,cm \Rightarrow F > 400\,MHz$

- VEZETÉKTÍPUSOK



A MICROSTRIP-NEK KISEBB A KÉSLELTETÉSE, MINT A STRIPLINE-NAK

- ÁTHALLÁS VEZETÉKEK KÖZÖTT

$U_{KIMAX} \sim \frac{1}{t_r}$

KIS TERHELŐ IMPEDANCIA

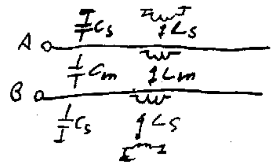
NAGY R_L

- TÖBBVEZETÉKES RENDSZER: (BUSZ)

$$-\frac{\partial U_A}{\partial z} = \underline{\underline{L}} \frac{\partial I_A}{\partial t} + R \cdot I_A$$

$$-\frac{\partial I_A}{\partial z} = \underline{\underline{C}} \frac{\partial U_A}{\partial t} + G \cdot U_A$$

ahol $\underline{\underline{L}}$ és $\underline{\underline{C}}$ minden vezetékpárra számítva.



PL. MICROSTRIPNÉL, ÉS LOGIKAI BUSZRENDSZERNÉL AKÁR 1,5 V IS LEHET! EZ KAPACITÍV + INDUKTÍV CSAT.

- MINÉL MAGASABB (h MINÉL NAGYOBB) ANNÁL JOBBAN SUGÁROZ EM-BEN

- MOTORHAJTÁS KÁBELEN: PWM MÓD. TÚLFESZÜLTSÉG LESZ A MOTORON. EZ $U_T \sim \frac{1}{t_r}$, $U_T \sim l_{KÁBEL}$ (NEM EGYENES ARÁNY, HANEM HA EGYIKNŐ, AKKOR A MÁSIK IS) Esetleg leválasztó hálózat kell a motornál.

- NÉHÁNY PANEL-VEZETŐPÁLYA:

1.) MICROSTRIP: $\left(\frac{h[mm]}{W[mm]} \to Z_0[\Omega]\right)$

1/0,8 → 75 Ω	
1/1 → 68 Ω	2/1 → 92 Ω
1/0,5 → 90 Ω	2/0,5 → 113 Ω
1/0,3 → 104 Ω	2/0,3 → 128 Ω
1/1,5 → 56 Ω	2/1,5 → 79 Ω
1/2 → 48 Ω	2/2 → 70 Ω

TÖBBRÉTEGŰ PANELNÁL:

0,2/0,4 → 45,8 Ω

0,2/0,8 → 29,6 Ω

KESKENY VEZETŐRE:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}}} \left[\ln\frac{8h}{w} + \frac{1}{32}\left(\frac{w}{h}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0{,}451 + \frac{0{,}242}{\varepsilon_r}\right)\right]$$

SZÉLES VEZETŐRE:

$$Z_0 = \frac{188{,}5/\sqrt{\varepsilon_r}}{\frac{w}{2h} + 0{,}44 + \frac{\varepsilon_r + 1}{2\pi\varepsilon_r}\left[\ln\left(\frac{w}{2h} + 0{,}94\right) + 1{,}4\right] + \frac{0{,}08(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r^2}}$$

2.) COPLANAR LINE:

?

- ALKATRÉSZLÁB PARAZITÁK:

	DIP, PGA	TQFP	BGMP	
C	5	2	0,5	[pF, nH]
L	3,5	7	0,1	

- EGYÉB KÁBELEK:

SZALAGKÁBEL, VAGY CSAVART ÉRPÁR

$d/S \to Z_0$ (RIBBON/TWISTED PAIR)

0,8/2,54 → 146 Ω	0,2/1,5 → 214 Ω
0,3/2,54 → 224 Ω	0,2/0,3 → 87 Ω
0,3/1 → 150 Ω	0,2/0,25 → 72 Ω (FÜLHALLGATÓ)
0,2/1 → 182 Ω (ATA33)	
0,25/0,5 → 150 Ω (ATA133)	

- ÁRAMKÖR-ÁRNYÉKOLÁS FÉMDOBOZZAL

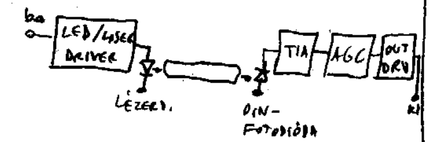
$\frac{E_{KINTI}}{E_{BELSŐ}} = \frac{\lambda}{2l}$ $S_e = \eta_{[dB]} = 20\lg\left(\frac{\lambda}{2l}\right)$

EZ 1 RÖVIDREZÁRT CSŐTÁPVONAL. BENNE CSAK $f > f_{MIN} = \frac{150\,MHz}{a}$ HULLÁMOK LÉTEZHETNEK

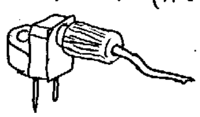
- KÁBEL-ELEKTRONIKA

A kábelek meghajtása, illesztése nem egyszerű. Külön IC-k vannak hozzá, minden szabványhoz, és vannak univerzális vonalmeghajtók/vevők

- SZÁLOPTIKA:



kisebb sebességre van kész ADÓ és VEVŐ modul. Vagy direkt kábelhez tokozott PIN/LED: (IFE01, IFE08)

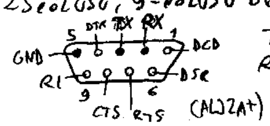


- PROTOKOLLOK

● RS232 (FULL DUPLEX)

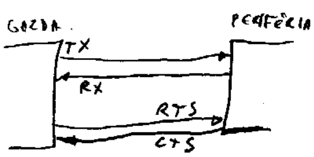
SOROS DIGITÁLIS ADATÁTVITELRE. ADÓK ±15V-tal (±6V) működnek, a VEVŐKBEN a H-szint: +3...+15V, az L-szint: -3...-15V. Között hiba van.

Szabványos CSATLAKOZÓK: 25-pólusú, 9-pólusú DB9S csatl.



A protokoll sima UART-szabványú. A meghajtók invertálják a jelet. A DRIVER/RECEIVER (INTERFÉSZ)-IC-k szintfordítást végeznek (TTL↔) (PL MAX 232 és HASONLÓK)

HANDSHAKING:



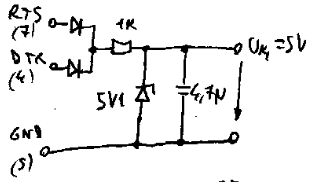
TÁPLÁLÁS: az INTERFÉSZ-IC előállítja a ±12V (±5V) tápját magának, beépített DC-DC-vel.
ADATSEBESSÉG: eredetileg 20kbps max 350kbps az új IC-kkel.
KÁBEL:
MAX 2500PF LOAD kapacitás az adottat kell a kábelhosszt megválasztani.

A kábel lehet árnyékolatlan. átlagos kábel: 100pF/m

$C_{be} \approx 200pF$, $C_{extra} \approx 60pF$

$$l_{MAX} = \frac{2500pF - C_{be} - C_{extra}}{100pF/m}$$

Ha a perifériának tápfeszre van szüksége: $I_{KI\,MAX} = 10mA_{IC}$ (500mA)

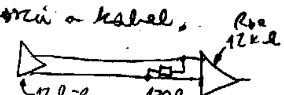


● RS 422, RS 485

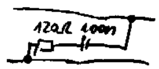
Itt a jelek differenciálisak, csavart érpárral, (vagy árnyékolt csav. érp.) H: 2~6V, L: -2...-6V.

A bemeneten: H: U>200mV L: U<-200mV (minimum...)

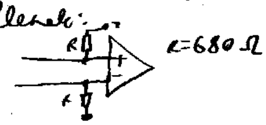
10 adó/vevő csatlakozhat a szabványban. Az RS-485-ben 32 csatlakozhat. Lezárás: $Z_1=Z_0=Z_2$ ha hosszú a kábel.



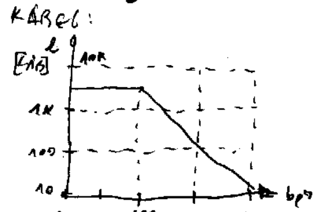
● DC terheléses csökkentése:



Ha nincs aktív adó, a vevő bemenetén ne legyen zaj: fel/lehúzó ellenállások kellenek:



KÁBEL:



GYAKRAN VAN SZÜKSÉG ESD és földhurok miatt IZOLÁCIÓRA. Vannak ilyen TRAFÓS IC-k. Ilyenkor a GND-t nem kell átvinni. Lehet OPTOCSATOLÓS IS. Lehet 100Ω-ellenállás a GND-összekötésben.

● USB

univerzális soros busz. Csillag topológiájú perifériahálózat. A HOST (központi számítógép) kezdeményezhet kommunikációt. A perifériák HUB-okon keresztül csatlakoznak a HOST-hoz. Minden perifériának címe van (1...127)

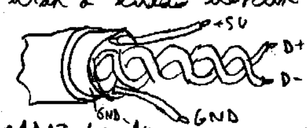
Sebesség: 12Mbps, 1,5Mbps (USB1.1)

KÁBEL: 4vezetékes árnyékolt. Differenciális 1pár adatvezeték csavart érpár, mellettük 2egyenes vezeték: +5V, GND. Az adat TTL kompatibilis

$I_{TÁP\,MAX}$ = 100mA (0,5mA STANDBY, max 500mA)

MAX 5m lehet a kábel.

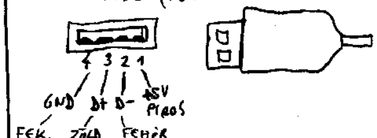
Jelek: NRZI - NON RETURN TO ZERO és INVERTÁLT. Ezért 6db 1-es után a küldő beszúr 1 0-ást.



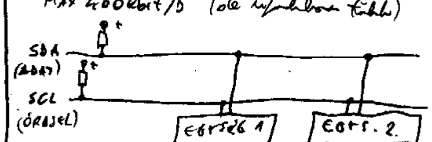
USB 2.0: 480Mbps

ADATOK: A HOST-TAL CSATLAKOZVA. Vezérlőadatok, sima adatok. Az egyes perifériákon belül vannak a hozzáférési végpontok (MAX 16db). 1ms-os adatkeretek vannak, 10% vezérlési INFO. Minden csomagot nyugtázni kell. (3féle nyugtacsomag van)

CSATLAKOZÓ (DUGÓ)



● I2C - SOROS BUSZ, PANELEN BELÜLI KOMMUNIKÁCIÓRA.
MAX 400kbit/s (az újabbak több)



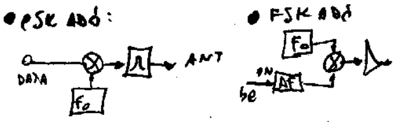
MASTER-SLAVE RENDSZERŰ, TÖBB MASTER LEHET. HANDSHAKING VAN. Minden eszköznek címe van. A címek vagy fixek, vagy programból állíthatók (MCU), vagy (részben) lábkötéssel programozhatók.

● SPI BUSZ: 1MASTER, TÖBB SLAVE
SDI, SDO: adatok, SCK órajel, SS - SLAVESELECT

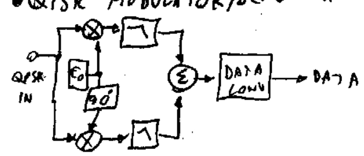
RÁDIOTECHNIKA

– DIGITÁLIS MODULÁCIÓS RENDSZEREK:

● PSK ADÓ: ● FSK ADÓ

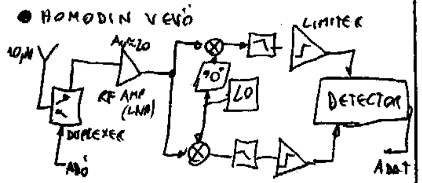


● QPSK MODULÁTOR/DEMODULÁTOR



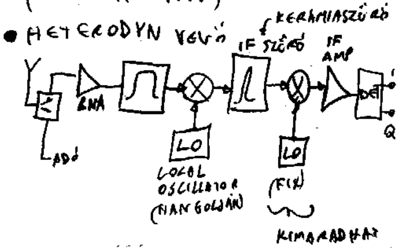
van még rengeteg fajta

● HOMODIN VEVŐ

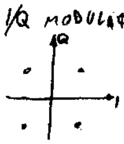


(ZERO-IF VEVŐ)

● HETERODYN VEVŐ



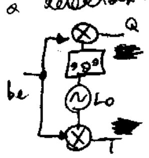
– I/Q MODULÁTOR/DEMOD.



A adott bizonyos (4 db, 16 db...) pontjaihoz

hozzá adatkódok tartoznak. Ha ismerjük az I/Q vektort, akkor az adat kinyerhető.

a detektor:



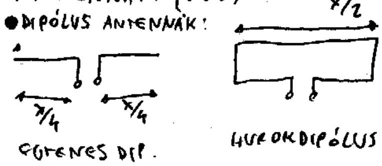
– DUPLEXER: (HIBRID)
egyidejű adást/vételt tesz lehetővé 1 antennával.
- PTT: átkapcsolgatja az antennát.
- szűrős: DIPLEXER. az adó és a vevő más sávban van.
- CIRCULATOR

– KITERJESZTETT SPEKTRUMÚ RÁDIÓ:
A zavarérzékenység miatt (SS)
- FREQUENCI HOPPING: f-et változtat előre adott sorrendben
- DIREKT SZEKVENCIA: ...

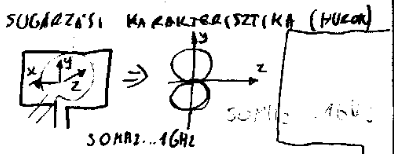
A jel/zaj-viszony is sokkal jobb így.

– ANTENNÁK (adó/vevő)

● DIPÓLUS ANTENNÁK:



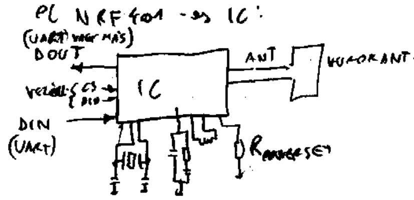
SUGÁRZÁSI KARAKTERISZTIKA (HUROK)



ELTERJEDT A MICROSTRIP HUROK-ANTENNA; Erre vannak méretezési leírások.
Van rezonancia frekvenciája.
Ezeket a NYÁK-on ki lehet alakítani. olcsó. KIS P (10mW)
(A vevők érzékenysége ≈ 100 dBm)
Jellemzője a jósági tényező $Q = \frac{F_0}{B}$

● YAGI ANT: nagyobb távra

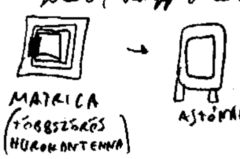
– DIGITÁLIS KIS TÁVOLSÁGÚ ÁTVITEL (WIRELESS)
Erre már front-end IC-k vannak.
ISM-sávokban üzemelnek.
(csak itt szabad) 433MHz, 868MHz, 2,4GHz, 330MHz, 1,9GHz
pl NRF401-es IC:



(Ez HALF-DUPLEX)

ILYESMIT GYÁRT: NORDIC VLSI, MICREL, MAXIM, TI, MICROCHIP

– RFID:
Kis adó/vevőket helyeznek el pl. bolti lopás ellen. Bőröndállomás kezelőben kommunikál, és jelez, hogy a kézelben van



100-150kHz-es, 10-20 MHz-es

– REMOTE KEYLESS ENTRY
(rádiós kulcs)
315MHz-en kommunikál.
de 300–500MHz is lehet.

– AZ ADATOKAT általában kódolni az átvitel előtt. A kialakítás hibajelzés miatt.

– HCS – UGRÓKÓDOS ESZKÖZÖK
(MICROCHIP – KEELOQ)
Járműnyitás, ajtónyitás, zárójú kommunikációjú digitális rádiórendszerek.
Minden alkalommal más kódot használ, így nem feltörhető simán lehallgatással. Az adó/vevők időnként szinkronizálódnak.
Ha megfelelő kód érkezett, kiadja az engedélyező jelet.
Ezt gombnyomásra (adó) lehet kérni.

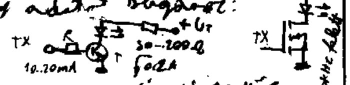
– BLUETOOTH (2,4GHz, ISM-SÁV)
vezeték nélküli számítógép-hálózat, kis távolságra.
FREQ. HOPPING-ot alkalmaznak.
Elektr. készülékek összekötésére.
Működés közben 1 modul fel-veheti 380mA-t. gyors, viszont nem sokáig tartja a tápot.
MASTER-SLAVE rendszerben.
CSOMAGOK: KÓD (cím, vezérlés), HEADER, ADATOK.
CSATLAKOZÁS:
1. kérelem: jel kiadás (MASTER)
a SLAVE-ek erre szinkronizálódhatnak. (INQUIRY) 5106
2. kód kiadás: a slavek ellenőrzik, hogy nekik szól az üzenet (PAGING)
3. KAPCSOLÓDÁS, ADATFORGALOM
4. STANDBY
kérelem után mindenki visszakapcsol a helyet, és rámi saját magánál. A master innen tudja, kiknek lehet üzenni.
KB 700kbps a max sebesség.

– WLAN (IEEE 802.11)
rádiós számítógép-hálózat.
A területet állomások osztják, minden állat 1 bázisállomás körül.

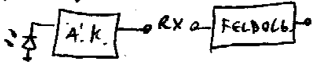
– GPS
1575MHz-en megy. Rádiónavigációs rendszer. 24 db NAVSTAR-GPS műholdal, 20200km magasan.
Működés: adott helyen, időben meg lehet határozni a távolságot az egyes műholdaktól.
A földi vevő mér. Minden műhold egyedi jelet sugároz. Az időkésés ⇒ távolság ⇒ 3 SZÖGELÉS.
Tudni lehet mikor melyik műhold hol van. Időméréshez kell 1 4. műhold is a látótérben.

INFRAVÖRÖS TECH.

— ÁLTALÁBAN. ADÓ 1 (több) INFRALED ami jelet, vagy adatot sugároz:



és van 1 VEVŐ ÁRAMKÖR. Ami bonyolultabb.



— Zavarás:
Fényzaj. Napsugárzás megfelelő DC offset adódik az érzékelő jeléhez. Ez csökkentheti az érzékenységet. AC zaj is adódik hozzá. kb 60dB-lel nagyobb lehet mint a jel. pl 50Hz → izzók fényzaja. A fényspektrumot is célszerű leszűkíteni IR szűrővel

— ÉRZÉKELÉS:

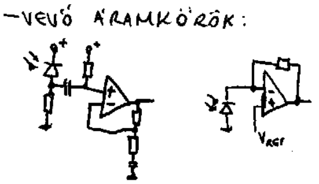
FOTOTRANZISZTOR MAX 10kHz ↑ FŐLEG OPTOKAPUKHOZ

FOTO DARLINGTON ↑ LEGÉRZÉKENYEBB

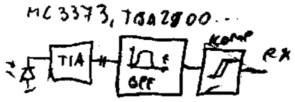
FOTODIÓDA ↑ JELEK VÉTELÉRE

— Adó: sok adatátvitelhez nem szükséges moduláció: direkt adattal hajtják az infraledet. De sokan 20...50kHz-es modulált jellel hajtják, így a vevőhöz szűrőzésével javítható a vétel. MAX 0,5A, b=30% négyszögjellel általában.

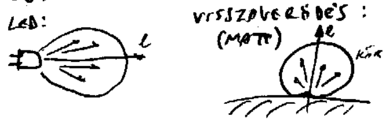
— VEVŐ ÁRAMKÖRÖK:



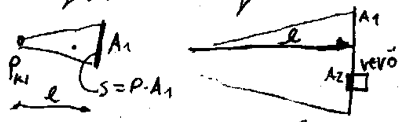
VAGY IC-S FRONT-END MC3373, TBA2800...



— SUGÁRZÁSI KARAKTERISZTIKA:



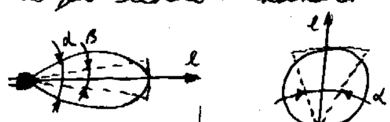
A karakterisztikáknál leolvasható az adott irányban a teljesítmény. arány a MAX.-hoz



A detektornál $\rho = \frac{S A_2}{A_2} = \frac{P \cdot A_1}{A_2}$

Dokon megadják a $I_R(P_{ve})$-diagramot. A_1 becsülhető: az a felület, amit az adott l távolságban bevilágítana, ha egyenletesen sugározna:

tekintett ilyen lenne a karakt.



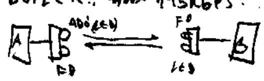
$\beta \approx \frac{\alpha}{2}$ VAGY α

-3db-hoz tartozó szög

$\alpha \approx 60°$

— IRDA

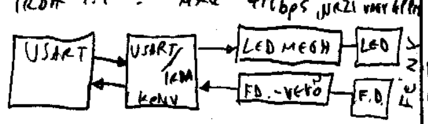
Soros (USART) port kiegészítése infravörös csatornává. HALF DUPLEX.. MAX 115Kbps.. MAX 1m-távolság



Itt az USART NRZ jeleit 3/16-os kitöltésű RZ jelekké alakítják az átvitelhez. Ehhez elő kell állítani a BAUD RÁTA 16-szorosát. Pontosabban NRZI (inverted).

IRDA 1.0 : 2,4kbps ... 115,2kbps

IRDA 1.1 : MAX 4Mbps (NRZI nem kell)

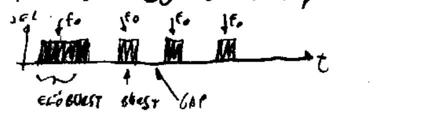


Az egész USART-hoz illeszthető áramkör PL MAX3120. Ehhez LED + FD kell.

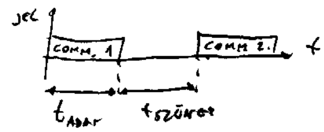
RS232 kompatibilis teljes modul a TFDS4500. Ebben FD + LED is van, de 3/16 → RZ/NRZI konverter nincs: (TTL is, +RS232-re is jó)

— TÁVIRÁNYÍTÓK

1 adó 1 vevő. impulzuscsomagokkal kommunikálnak. Ezek neve BURST. 1 BURST bizonyos számú 45zől periódus, amit modulálnak. Az impulzusok minimális száma, és a vivőfrekvencia szabványos



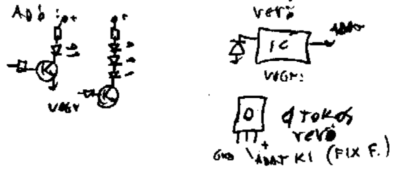
Ha lenyomunk 1 gombot, a PREBURST-ot adja ki az adó. utána mehetnek a parancsok. 1 PARANCS / 1 BURST.



A vivőfrekvenciák 30kHz, 38kHz, 50kHz, 76kHz, 450kHz... max 4-5 kbps adatsebességgel.

A vevőkben szűk sávszűrő van. Az adó a vevőnek kódokat (parancsokat ad)

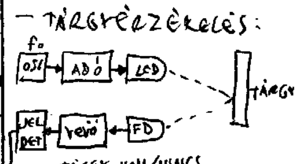
A kommunikáció felső (fizikai feletti) rétegeire vannak IC-k. Fizikai réteg:



— OPTOLOGIC:

DIGITÁLIS LEVÁLASZTÁS: OPTOCSATOLÓ + meghajtó / vevő áramkörök 1 IC-ben.

— TÁRGYÉRZÉKELÉS:



ADÓ: Sima optikai adó

VEVŐ:

AZ EGYENIRÁNYÍTÓ: $T_1 = R_1 \cdot C_1$ $T_2 = R_2 \cdot C_2$

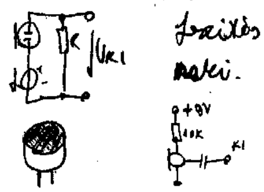
$T_1 \approx \frac{1}{f_0}$ $T_2 \approx 10 \cdot \frac{1}{f_0}$

AUDIO TECHNIKA

– MIKROFONOK

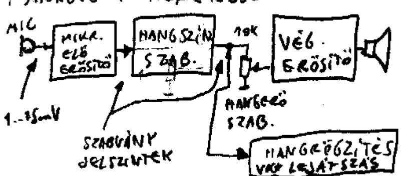
● DINAMIKUS
A kézi mikrofonok ilyenek. Energiát szolgáltat, DC előfeszítés nem kell!

● KONDENZÁTOR ÉS ELEKTRÉT MIKROFON: Ehhez DC előfeszítés kell neki.



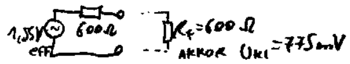
Egy átlagos mikrofonon 1-5mV jel, de max 15mV jelenik meg.
Az impedanciája: 200Ω ... 2kΩ

– ANALÓG HANGRENDSZEREK



MAX $775mV_{eff}$ SZINUSZJEL ($2V_{pp}$) vagy max 1mW.

NORMÁL GENERÁTOR:

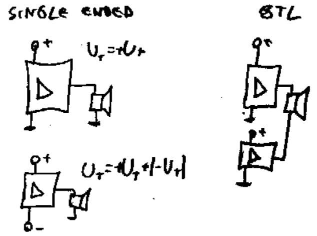


AUDIÓ ÁTVITELNÉL célszerű 20Hz–20kHz-et átvinni. Beszédátvitelnél 800Hz-4kHz

– ANALÓG VÉGERŐSÍTŐK:

4-6-8Ω-os HANGFALAKHOZ.
Kimenet szempontjából:

SINGLE ENDED BTL



$\hat{U}_{KI_{MAX}} = \frac{U_T - 2U_{SAT}}{2}$ $\hat{U}_{KI_{MAX}} = U_T - U_{SAT}$

$U_{KI_{pp}} = U_T - 2U_{SAT}$ $U_{KI_{pp}} = 2(U_T - U_{SAT})$

$U_{KI_{pp}} > U_T$

PL. TDA 1554 – BTL MÓDBAN:

$$P_{MAX} = \frac{[(U_T-2,8)\cdot 0,707]^2}{R_t}\cdot 1,414$$ (4 SZÖGJEL VAGY ZENE!)

MAX SZINUSZOS TELJESÍTMÉNY:

$$P_{MAX_{SZIN}} = \frac{P_{MAX\,4SZÖG}}{1,414}$$

KIS FESZRŐL NAGYOBB TELJESÍTMÉNY KIVÉTEL: 1Ω-os ERŐSÍTŐ – 4Ω-os HANGFAL, kézi leválasztó TRAFÓ.

– FÉLVEZETŐK HŰTÉSE:

A max kimenő audio teljesítmény: P_{KIMAX}

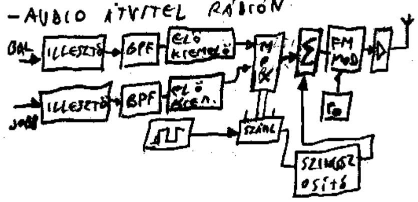
$$P_{HŰTÉS} = (1-\eta)\cdot\frac{P_{KIMAX\,ZENE}}{8}$$

a zenei jelek természetéből

– EGYÉB ÁRAMKÖRÖK KELLHETNEK:

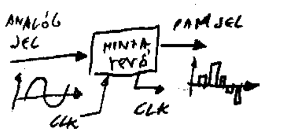
SZŰRŐK, ILLESZTŐK, KORREKTOROK, KIVEZÉRLÉS JELZŐK, ANALÓG KAPCSOLÓK/MULTIPLEXEREK, BALANSZ ÁLLÍTÁS.

– AUDIO ÁTVITEL RÁDIÓN:



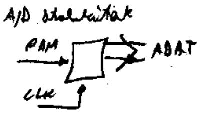
– DIGITÁLIS AUDIÓ RENDSZEREK

[illegible], zajoktól mentes



SZABVÁNYOS MINTAVÉTELI FREKVENCIÁK: 44,1kHz, 48kHz, 96kHz

● A/D átalakítók



● KÓDOLÁS: 2-ES KOMPLEMENS KÓDBAN
AZ EGÉSZ:

● A PCM-JEL: NRZ formátumú, 44,1kHz-nél 22,7µs/minta, 16 bitnél 705 600 bps sebességű adatfolyam. (352,8kHz CSATORNASZÉLES.) Ezt 1 multiplexer végzi.

SZABVÁNY PCM JELEK:

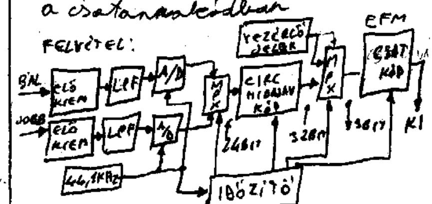
DATA — ADAT SOROS MULTIPLEXELVE
CK — ÓRAJEL 16×44,1kHz
LRC — MINTA-ÓRAJEL: 44,1kHz

● CSATORNAKÓDOLÁS
Teljesen soros átvitelhez. NRZI módban, időnként beszúrnak 1-1 0-át, hogy a CLK rekonstruálható legyen.
EFM – CD-rendszer: 4,32Mbps/1,4MHz
Ezt négyzetesre, [illegible] átvitelre használják.

– CD RENDSZER

A CD elején van 1 TOC-rész. Ezt be kell tölteni lejátszás előtt. Ebben vannak a [illegible] adatok. 4,3218 Mbit/s hibajavító kód is van (CIRC) a csatornakódban

FELVÉTEL:

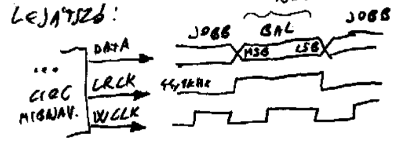


KIMENETI KERET: CIRC KÓDOLÓ UTÁN:

396 BIT ADAT	Q PARITÁS	96 BIT	P PARITÁS

Egyéb KIEGÉSZÍTŐ ADATOKAT IS BESZÚR: szinkron kódot...

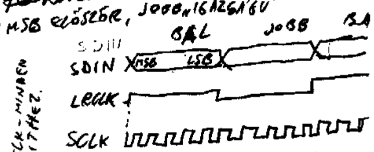
LEJÁTSZÓ:



— SOROS PCM FORMÁTUMOK:

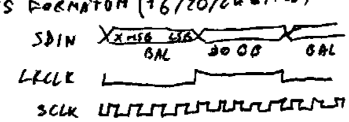
Az IC-k bemenetén lábkiválasztással, programozással lehet megadni a formátumot

● MSB ELŐSZÖR, JOBBRA IGAZÍTOTT

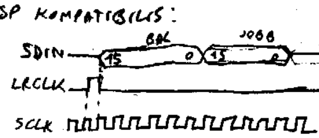


16/20/24 BITES lehet.

● IIS FORMÁTUM (16/20/24 BITES)



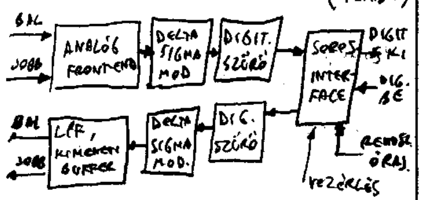
● DSP KOMPATIBILIS:



● MSB LEFT-JUSTIFIED: hasonló az előzőhöz.

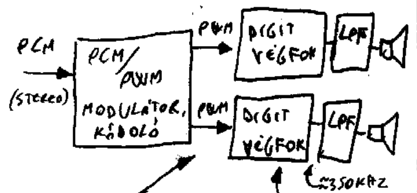
VAN MÉG MCLK bemenet is: rendszerórajel lehet.
$f_{MCLK} \gg f_{SCLK}$ IC adatlapján adott.

– AUDIO CODEC IC-K (PCM3000 TEXAS I.)



SZABVÁNY DIGITÁLIS jelfolyamot kezel.

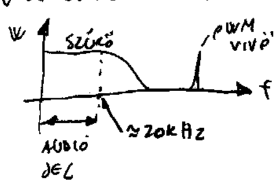
– DIGITÁLIS ERŐSÍTŐK

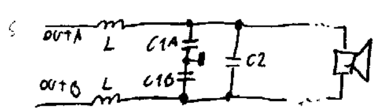


LUTTL tiszta PWM jel. Az analóg jel amplitúdójából arányos kitöltési tényezőjű.

NAGY TELJESÍTMÉNYŰ VEZÉRELT KAPCSOLÓ.

- A kimeneti LPF LG-szűrő a PWM-jel középértékének megfelelő „DC" feszültséget ad a kimenetén.





$C_2 = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}\pi f R_H}$ $L = \frac{R_H}{2\sqrt{2}\pi f}$

$C_1 = 0{,}1\cdot C_2$ KERÁMIA.

– SPDIF DIGITÁLIS AUDIÓ JEL

[redacted], 1 vezeték + föld

zajos STEREO jelátvitel készülékek között.

16/24 BIT, 44,1kHz/48kHz/32kHz

soros információk is be lehet szúrni.

- ADATSEBESSÉG:
  f_s = 44,1kHz → 2,8MHz ADAT
  48K → 3,1MHz
- KÁBEL 75Ω, l < 10m
  FESZÜLTSÉG: 0,4Vpp – 0,6Vpp (MAX 1V)
  vevőnél: 0,2Vpp – 0,6Vpp

RCA/BNC/JACK – CSATLAKOZÓVAL

5.1-HANG: 3 db SPDIF CSATORNA

a jelszint lehet TTL, vagy 1Vpp is.

- VEZÉRLŐJEL: másolás, adattípus: PCM/MPEG/AC3/DTS...
- OPTIKAILAG IS lehet továbbítani, ez a TOSLINK VÖRÖS fénnyel. MAX 10m.
- csatornakódolás: BIFÁZISÚ-JELKÓDOLÁS (BMC)

32 BITES csomagokat (SUBFRAME) küld:

0-3 : PREAMBLE
4-7 : AUXILIARY AUDIO ADAT
8-27 : MINTÁK
28 : HELYES VOLT A KÜLDÖTT ADAT
29 : SZOLGÁLTATÁSKÓD
30 : CSATORNA STÁTUSZ
31 : PARITÁS

2 SUBFRAME = 1 FRAME (STEREO)
1 BLOKK = 192 FRAME

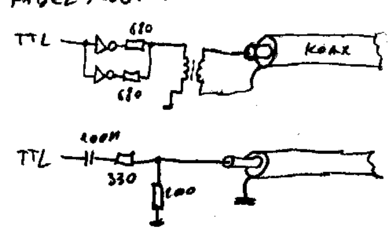
A PREAMBLE adja, hogy A csat./B csat. vagy BLOKK kezdő SUBF.

1 BLOKKBAN összegyűjthetők a kiegészítő információk.

Jelentései: AUDIO/NEM, MÁSOLÁS-VÉDETT/NEM, FORMÁTUM (CD, PCM...)

- SZINTILLESZTÉS kellhet. de pl PC-n belül lehet hogy TTL-les az adó is és a vevő IS.

KÁBEL MEGHAJTÁS:

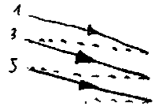


– analóg audiojelekhez árnyékolt vezeték kell. Főleg az 1mW-os, vagy kisebb jeleknél. Az árnyékolást csak az egyik végén kössük be, ha nagy a brumm, vagy ha földhurok van.

VIDEO TECHNIKA

— A PAL TV-KÉP

váltottsoros letapogatás:



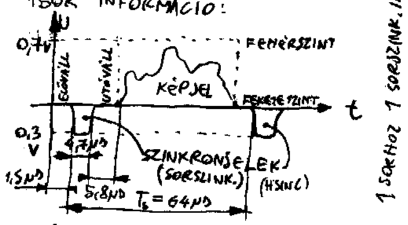
625 sor (800x600)

Először a páratlanadik sorokat jeleníti meg, majd a párosakat. 50Hz a félkép-frekvencia. A függőleges eltérítés 50Hz-es, a vízszintes 15,625kHz-es. A visszafutás alatt ki kell oltani a fényt. Erre jó a kioltójel.

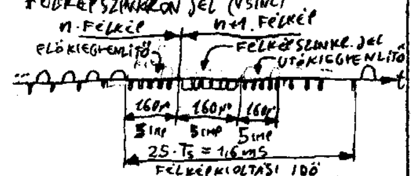
— ALAPSÁVI VIDEÓJEL (FEKETE-FEHÉR)

Ez világosságjelet és szinkronjelet tartalmaz.

1SOR INFORMÁCIÓ:



FÉLKÉPSZINKRON JEL (VSINC)

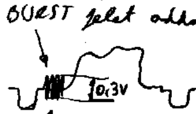


—SZÍNES ALAPSÁVI VIDEO

A fény (Y) és szinkron jeleken kívül átvezik a színjelet (C) is. Ezt modulált színsegédvivő formájában viszik át.

A F-F spektruma fésűs. ahol üres, oda illesztik be a színinformációt.

1 BURST jelet adnak a sorokhoz:



1 színsegédvivő jelet adnak az eredeti F-F jelhez, amit modulálnak. A SZÍN INFÓ: színkülönbségi jelekkel: R-Y, B-Y. Ezekkel egyszerre modulálják a vivőt. Ez a KVADRATÚRA (SZÖG) - MODULÁCIÓ. Ezt a szinkronjel idejére ki kell oltani. A demodulációhoz kell a burst, mint szög-referencia-jel

SPEKTRUM:

KB 5MHz széles, de szabványfüggő: PAL-G, PAL-D, PAL-B...

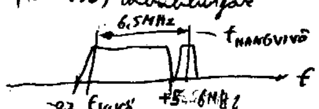
A max frekvencia a képpontfrekvenciától függ, ami a vízszintes felbontástól. Ennek a spektrumába színeli bele a színsegédvivő.

—PAL DEKÓDER

ezek világosság vezérlő jelek (3DB ELEKTR. SUGÁR)

— RF jelút:

Az összetett videojelet CSONKA-OLDALSÁVOS AMPLITÚDÓMODULÁCIÓVAL (AM-VSB) továbbítják



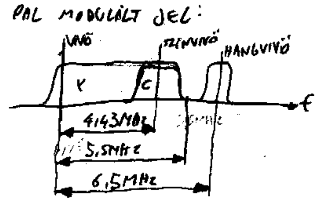
A HANGOT FM-be modulálják.

CSATORNÁK:

8MHz-eseket vannak adók. (1 ilyen 1 csatorna)

VHF 1.	1-2 CSAT	48...66MHz
VHF 2	3-5 CSAT	76...100MHz
VHF 3.	6-12 CSAT	174-230MHz
UHF:	21-34, 38-69 CSAT	470...582, 606...860

PAL MODULÁLT JEL:



A SZÍNJELEK CSAK 1MHz a sávnál.

— KOMPOZIT VIDEÓJEL: (CVBS)

A bemutatott alapsávi videojel. 1Vpp. Az Y és a C jel (ami modulált) is benne van. 75Ω-os kábelen, RCA csatlakozókkal használják

—NATIVE VIDEO (FORRÁSJEL).

RGB-VIDEO

3DB KOMPOZIT F-F video jel. Csak itt az egyik az R, a másik G, a 3. a B-t jelenti. (pl. A VGA-MONITOR KÁBEL)

—KOMPONENS VIDEO JEL

2 jel: Y-LUMINANCE - VILÁGOSSÁG, C - CHROMINANCE - SZÍNJEL (SZÍNKÜLÖNBSÉGI JEL, SZÖGMODULÁCIÓVAL)

ILYEN AZ S-VIDEO-JEL

Ennek a SZABVÁNY CSATLAKOZÓJA: (ALJZAT)

1-GND(Y) 2-GND(C)
3-Y 4-C

—TUNER EGYSÉG

általában egyben gyártják. Ez erősíti az antennajelet, kiválasztja a csatornát, és KOMPOZIT videojelet VAGY SVIDEO jelet ad.

Antenna jelszintek: (EATV) dBμV-ban adják meg.

VHF1: 40-80 dBμV

: 54-84 dBμV

UHF: 57-84 dBμV 1mVpp

célszerű 60dBμV-ot HASZNÁLNI.

—RGB-VIDEÓNÁL:

$Y = 0,3R + 0,59G + 0,11B$

DIGITÁLIS VIDEO

—PAL/DIGITÁLIS DEKÓDER (YCrCb)

ADV7185 video A/D és digitális video port interfész

- BEMENET: 6KOMPOZIT/3SVIDEO/2YCrCb lábbal választható. AGC van a bemeneteken, így a jelszint nem szigorúan adott.
- KIMENET: FIFO-val VAGY SIMÁN. VIDEO SZINKRON JELEK (HSYNC, VSYNC) és $P_0 \dots P_{19}$ PIXEL OUTPUT PORT

3 féle kimeneti MÓD VAN:

1.) LLC SZINKRON PIXEL INTERFACE
LLC1 és LLC2 jelekre lehet szinkronizálni. a pixel pontokat vagy ki az adott választható felbontásban.

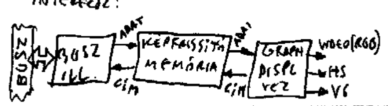
2.) SZINKRON FIFO: SAPI/SCAPI INTERF.
ilyenkor CLKIN bemenettel lehet az adatot kiolvasni. vigyázni kell, hogy a FIFO középtájon maradjon. Erre vannak a FIFO FLAG-ek.

I²C porton lehet megadni a működés legtöbb paraméterét, pl. VIDEO szabvány, BITFELBONTÁS, adatformátum.

A kimenet 8-10-16-20 BITES YCrCb multiplexelt, vagy sima. Y-világosság, $C_r = R-Y$, $C_b = B-Y$ színkülönbségi jelek. 4:2:2=4:4:4 (CCIR601/CCIR656 szabványok)

—VGA analóg RGB komponens videojel (0,7Vpp) és HS, VS TTL szinkronjelek.

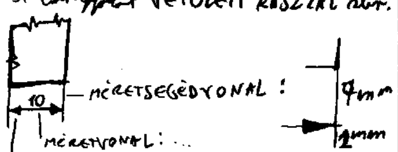
INTERFÉSZ:



MŰSZAKI RAJZ (Gép rajz)

- VONALAK: 3 féle vonalvastagság van (0,3; 0,5; 0,7 mm)
vonalfajták: folytonos, szabadkézi, törésvonal (—⌇—), szaggatott vonal, pontvonal (—.—.—), 2 PONT VONAL (—..—..).
VÉKONY FOLYTONOS: méretvonal, metszet, [illegible]
VASTAG FOLY.: látható él, keret.
KIEMELT: lemez metszet, nagyítás.
törés: ábrázolt rész határa.
SZAGGATOTT: nem látható él
PONTVONAL: tengely, középvonal
2PONT: hajlítás

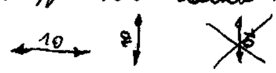
- MÉRETMEGADÁS:
A tárgyat VETÜLETI RAJZZAL ábr.



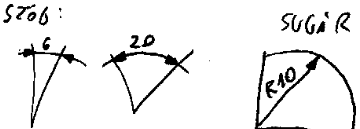
MÉRETNYÍL:

HA A MÉRET <10mm akkor kívülről kell a nyíl:

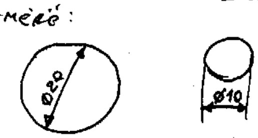
A méretszám: 3,5mm magas betűk, felülre, vagy bal oldalra kerülhet.



SZÖG: SUGÁR

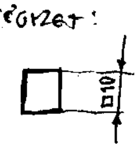


ÁTMÉRŐ:



A méretszámot vonal nem metszheti. FÉL MÉRETVONAL

HA NÉGYZET:

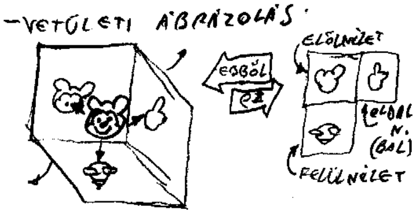


NÉZETEK MERŐLEGES MÉRET

(VAGY ... LEMEZVASTAGSÁG)

- MÉRETARÁNY:
a rajzon elhelyezve:
M 2:1 → nagyítás
M 1:10 → kicsinyítés

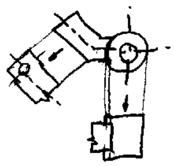
- VETÜLETI ÁBRÁZOLÁS:



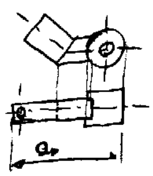
Amelyik oldalról látjuk, azon vetítjük a szemközti oldalra.

- RÉSZÁBRÁZOLÁS:
ha csak 1 része érdekes a tárgynak:

- FERDE TÁRGYAK:
1. ferde síkra vetítünk:



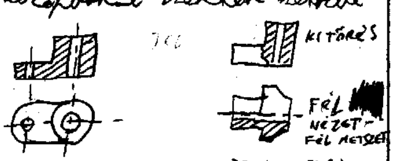
2. KITERÍTETT NÉZET: kiegyenesítjük a tárgyat.



- ADOTT IRÁNYÚ VETÜLET

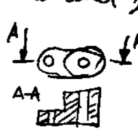
a vetület.

- METSZET
középvonal mentén metszve

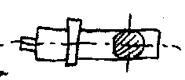


TELJES METSZET RÉSZMETSZET

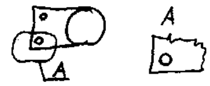
ha nem középvonal mentén: be lehet jelölni a vágósíkot.



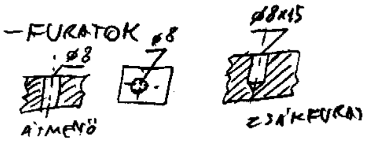
- SZELVÉNY: tengely-keresztmetszet befordítva



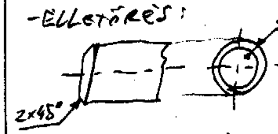
- KIEMELT RÉSZLET:



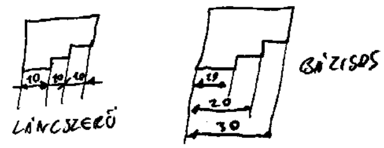
- FURATOK



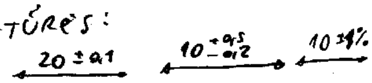
- ÉLLETÖRÉS:



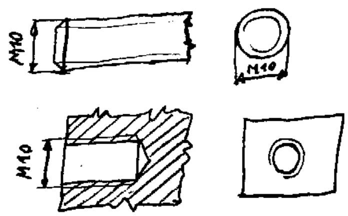
- MÉRETMEGADÁSOK:



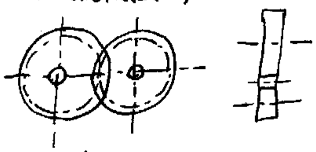
- TŰRÉS:



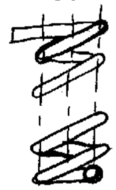
- CSAVARMENET:



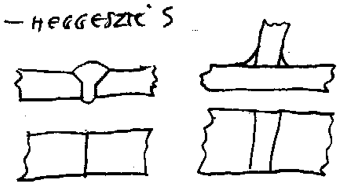
- FOGASKERÉK, FOGASLÉC



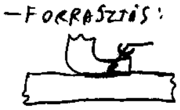
- RUGÓK



- HEGESZTÉS



- FORRASZTÁS:



- RAGASZTÁS: